

3.4 KINEMATIČKI SINGULARITETI

Jacobian je, općenito, funkcija konfiguracije \mathbf{q} ; konfiguracije za koje matrica \mathbf{J} nema puni ranga predstavljaju kinematičke singularitete. Pronalaženje singulariteta manipulatora je od velikog interesa iz više razloga:

- Singulariteti predstavljaju konfiguracije kod kojih je pokretljivost strukture smanjena (reducirana), tj. nemoguće je ostvariti odgovarajuće kretanje vrha manipulatora.
- Kada se struktura nalazi u singularitetu može postojati beskonačno mnogo rješenja inverznog kinematičkog problema.
- U okolini singulariteta, male brzine u operacijskom prostoru mogu prouzročiti velike iznose brzina u prostoru zgloba.

Singulariteti se mogu svrstati u dvije grupe:

- Granični singulariteti, javljaju se u slučaju kad je struktura manipulatora u ispruženom ili uvučenom (zgrčenom) položaju. Oni ne predstavljaju posebnu teškoću, jer se mogu lahko izbjeći. Naime, manipulator ne treba pogoniti granicom dostižnog radnog prostora i time će granični singulariteti biti izbjegnuti.
- Unutrašnji singulariteti, locirani su unutar dostižnog radnog prostora, a uzrokovani su poklapanjem dvije ili više osovina kretanja, ili dostizanjem specificirane konfiguracije vrha manipulatora. Oni predstavljaju posebnu poteškoću, jer se mogu naći bilo gdje unutar dostižnog radnog prostora za planiranu putanju u operacijskom prostoru.

Primjer 1. Dvosegmentna planarana ruka

Matrica homogene transformacije, odnosno, direktna kinematička funkcija dvosegmentne planarne ruke ima oblik:

$$\mathbf{T}_2^0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & c_{12} & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ 0 & -c_{12} & s_{12} & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Geometrijski Jacobian poklapa se sa analitičkim i dobiva se jednostavno deriviranjem komponenti vektora položaja p_x i p_y u direktnoj kinematičkoj funkciji:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} & -a_2s_{12} \\ a_1c_1 + a_2c_{12} & a_2c_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

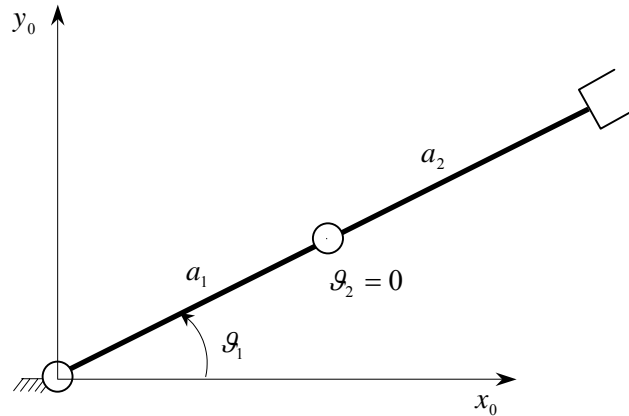
Determinanta Jacobiana je:

$$\det(\mathbf{J}) = a_1a_2s_2. \quad (3.37)$$

Za $a_1, a_2 \neq 0$, rješenja jednadžbe determinante ($\det(\mathbf{J})=0$) su:

$$\mathcal{G}_2 = 0 \quad \mathcal{G}_2 = \pi, \quad (3.38)$$

pri čemu je \mathcal{G}_1 irelevantna za određivanje singularnih konfiguracija. One se javljaju kada je vrh manipulatora na vanjskoj ($\mathcal{G}_2 = 0$) ili na unutrašnjoj ($\mathcal{G}_2 = \pi$) granici dostupnog radnog prostora. Drugim riječima, struktura manipulatora (lakat) je u potpuno ispruženom, odnosno potpuno uvučenom (zgrčenom) položaju. Singularitete ovog tipa nazivamo *singulariteti lakta*. Na Sl. 3.2. prikazana je situacija za $\mathcal{G}_2 = 0$.



Slika 3.2. Singularna konfiguracija dvosegmentne planarne ruke.

Analizirajući različita kretanja prikazane strukture u ovakvoj konfiguraciji može se primijetiti da dva vektora stupaca Jacobiana $[-(a_1 + a_2)s_1 \quad (a_1 + a_2)c_1]^T$ i $[-a_2s_1 \quad a_2c_1]^T$ postaju paralelna, što ima za posljedicu da rang matrice Jacobiana bude jednaka jedinici; ovo znači da komponente brzina nisu neovisne (vidjeti pod tačkom (a)).

Primjer 2. Antropomorfna ruka

Singulariteti robotske ruke mogu se pronaći iz matrice \mathbf{J}_p koja daje vezu između linijskih brzina zglobova i vrha manipulatora. Ovi singulariteti su posljedica kretanja prva tri segmenta.

Matrica \mathbf{J}_p antropomorfne ruke ima oblik:

$$\mathbf{J}_p(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Determinanta $\det(\mathbf{J}_p)$ izračunava se na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J}_p(\mathbf{q})) = & -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \begin{bmatrix} -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \end{bmatrix} \\ & + c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_3c_{23} \end{bmatrix} \\ & - a_3c_1s_{23} \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

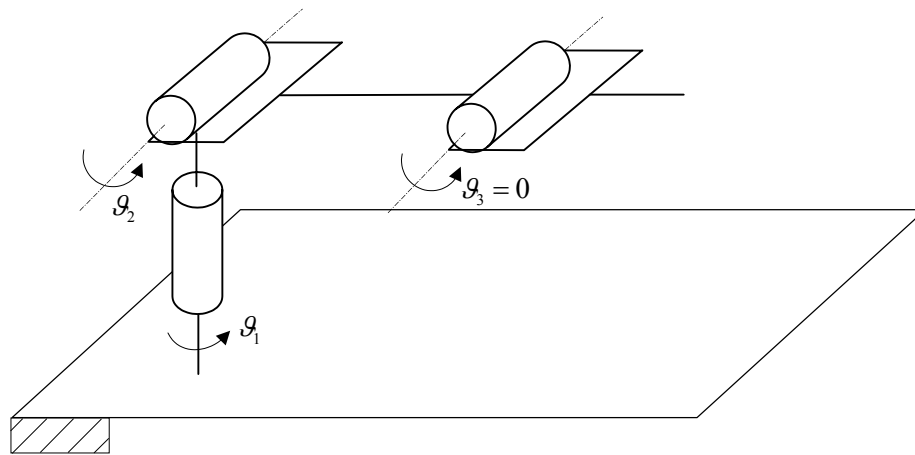
$$\det(\mathbf{J}_p(\mathbf{q})) = -a_2 a_3 s_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) . \quad (3.40)$$

Determinanta Jacobina \mathbf{J}_p ne ovisi o varijabli prvog zgloba ϑ_1 . Uz pretpostavku $a_2, a_3 \neq 0$, determinanta postaje nula ako je $s_3 = 0$ i/ili $(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) = 0$

Prvi slučaj se događa uvijek kada je:

$$\vartheta_3 = 0 \quad \vartheta_3 = \pi , \quad (3.41)$$

što znači da je lakat ispružen ili uvučen. Ovaj tip singulariteta se zove singularitet lakta (Sl. 3.3) i konceptualno je ekvivalentan singularitetu pronađenom kod dvosegmentne planarne ruke.



Slika 3.3. Antropomorfna ruka kod singulariteta lakta.

Promatranjem matrice homogene transformacije

$$\mathbf{T}_3^0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

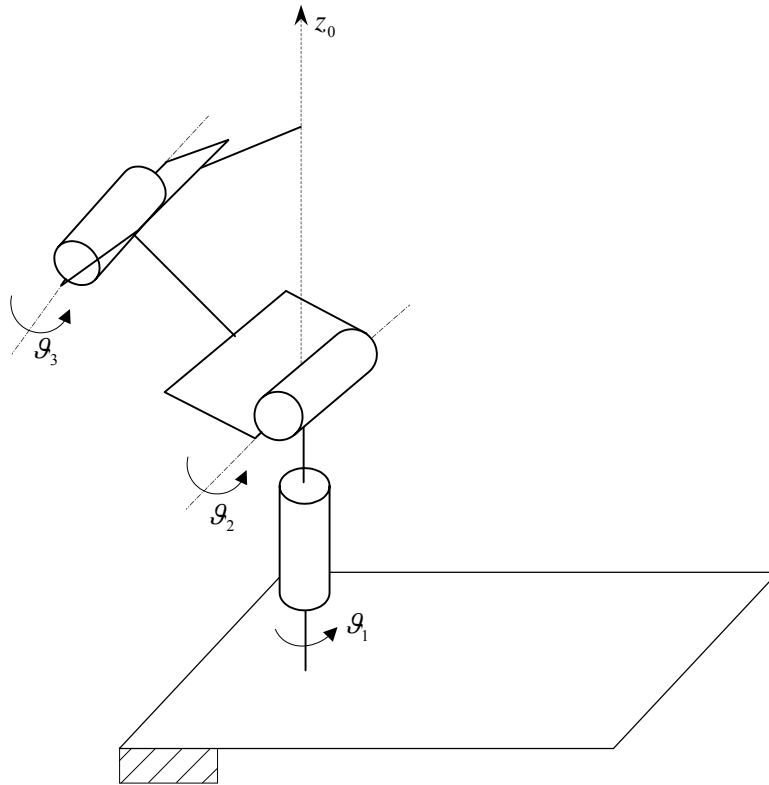
dolazi se do zaključka da se drugi tip singulariteta javlja u slučaju kada ishodište šake leži na osi z_0 baznog (nepokretnog) koordinatnog sistema, što je karakterizirano sa:

$$p_x = p_y = 0 . \quad (3.42)$$

Ovakva vrsta singulariteta zove se singularitet vrata (Sl. 3.4).

Važno je napomenuti da čitava os z_0 opisuje kontinuum (geometrijsko mjesto tačaka) singularnih konfiguracija; rotacija ϑ_1 u tom slučaju ne uzrokuje bilo kakvu translaciju položaja vrha manipulatora

(šake) (prvi stupac matrice \mathbf{J}_p je uvijek nula u singularitetu ramena) i tada kinematička jednadžba dopušta beskonačno mnogo rješenja; osim toga, kretanje započeto iz singularne konfiguracije s ciljem translacije šake duž z_1 osi nije dozvoljeno.



Slika 3.4. Antropomorfna ruka kod singulariteta vrata.

Primjer 3. Sferna ruka

Dio Jacobiana koji se odnosi na linearnu brzinu ove strukture dan je izrazom:

$$\mathbf{J}_p(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -s_1 s_2 d_3 - c_1 d_2 & c_1 c_2 d_3 & c_1 s_2 \\ c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 & s_1 c_2 d_3 & s_1 s_2 \\ 0 & -s_2 d_3 & c_2 \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Determinanta Jacobiana je:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J}_p(\mathbf{q})) &= (-s_1 s_2 d_3 - c_1 d_2) \begin{bmatrix} s_1 c_2 d_3 & s_1 s_2 \\ -s_2 d_3 & c_2 \end{bmatrix} - c_1 c_2 d_3 \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 & s_1 s_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} + c_1 s_2 \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 & s_1 c_2 d_3 \\ 0 & -s_2 d_3 \end{bmatrix} \\ &= (-s_1 s_2 d_3 - c_1 d_2) s_1 d_3 - c_1 c_2 d_3 (c_2 (c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2)) + c_1 s_2 (c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2) (-s_2 d_3) \\ &= s_1^2 s_2 d_3^2 - c_1 s_1 d_2 d_3 - c_1^2 c_2^2 s_2 d_3^2 + c_1 s_1 c_2^2 d_2 d_3 - c_1^2 s_2^3 d_3^2 + c_1 s_1 s_2^3 d_2 d_3 \\ &= c_1 s_1 d_2 d_3 - c_1^2 s_2 d_3^2 - s_1^2 s_2 d_3^2 - c_1 s_1 d_2 d_3 = -s_2 d_3^2 \end{aligned}$$

$$\det(\mathbf{J}_p(\mathbf{q})) = -s_2 d_3^2. \quad (3.44)$$

Uvjet $\det(\mathbf{J}_p(\mathbf{q})) = 0$ daje:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad s_2 = 0 & \Rightarrow \vartheta_2 = 0 & \vartheta_2 = \pi. \\ \text{(ii)} \quad d_3 = 0 & \end{aligned} \quad (3.45)$$

Singularna konfiguracija strukture $d_3 = 0$ znači smanjenje pokretljivosti strukture (linearni zglob ne može se linijski pomjerati gore-dole).

3.4.1 Dekomponiranje kinematičkih singulariteta

Računanje unutrašnjih singulariteta preko determinante Jacobiana može biti veoma zamorno i nije jednostavno za složenije strukture manipulatora. Za manipulatore koji imaju sfernu šaku moguće je dekomponirati problem dobivanja singulariteta u dva odvojena problema:

- izračunavanje *singulariteta ruke*, kao posljedice kretanja prva tri ili više zglobova
- izračunavanje *singulariteta šake*, kao posljedice kretanja zglobova šake.

Za slučaj $n=6$ matrica Jacobiana može se prikazati u obliku:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

gdje su, budući da su vanjska tri zgloba obrtna, izrazi za dva desna bloka:

$$\mathbf{J}_{12} = [\mathbf{z}_3 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_3) \quad \mathbf{z}_4 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_4) \quad \mathbf{z}_5 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_5)]$$

i

$$\mathbf{J}_{22} = [\mathbf{z}_3 \quad \mathbf{z}_4 \quad \mathbf{z}_5]. \quad (3.47)$$

Budući da su singulariteti prirodna osobina manipulatora, oni ne ovise o izboru koordinatnih sistema koji opisuju kinematiku. Pogodno je izabrati ishodište koordinatnog sistema vrha manipulatora u presjeku osi šake. Izbor $\mathbf{p} = \mathbf{p}_w$ daje rezultat:

$$\mathbf{J}_{12} = [0 \quad 0 \quad 0], \quad (3.48)$$

jer su vektori $\mathbf{p}_w - \mathbf{p}_i$ paralelni jediničnim vektorima (ortovima) \mathbf{z}_i ($i = 3, 4, 5$), bez obzira kako koordinatni sistemi 3,4,5 bili izabrani prema Denavit-Hartenbergovoj konvenciji. Ovakvim izborom Jacobian postaje blokovska donja trokutasta matrica za koju je izračunavanje determinante znatno pojednostavljeno, jer je determinanta ukupnog Jacobiana jednaka proizvodu determinanti dvaju blokova na dijagonali, tj.:

$$\det(\mathbf{J}) = \det(\mathbf{J}_{11})\det(\mathbf{J}_{22}). \quad (3.49)$$

Na ovaj način se postiže stvarno dekomponiranje singulariteta; uvjet:

$$\det(\mathbf{J}_{11}) = 0 \quad (3.50)$$

daje *singularitete ruke*, a uvjet:

$$\det(\mathbf{J}_{22}) = 0 \quad (3.51)$$

dati će *singularitete šake*.

Važno je uočiti da ovakav oblik Jacobiana ne uspostavlja relaciju između brzine zglobova i brzine vrha manipulatora, nego samo olakšava izračunavanje singulariteta.

Primjer 4. Sferna šaka

Singulariteti sferne šake mogu se odrediti ispitivanjem blok matrice $\mathbf{J}_{22} = [z_3 \quad z_4 \quad z_5]$ na osnovu teze o dekomponiranju singulariteta. Lako se uočava da je sferna šaka u singularnoj konfiguraciji uvijek kada su jedinični vektori z_3, z_4 i z_5 linearno ovisni.

Iz uvjeta $\det(\mathbf{J}_{22}) = 0$, slijedi:

$$\det(\mathbf{J}_{22}) = \det \begin{pmatrix} 0 & -s_4 & c_4 s_5 \\ 0 & c_4 & s_4 s_5 \\ 1 & 0 & c_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -s_4 & c_4 s_5 \\ c_4 & s_4 s_5 \end{bmatrix} = -s_4^2 s_5 - c_4^2 s_5 = -s_5 = 0 \quad (3.52)$$

Prema tome, postoji mogućnost poklapanja z_3 i z_5 ako je :

$$\mathcal{G}_5 = 0 \quad \mathcal{G}_5 = \pi. \quad (3.53)$$

Ako je $\mathcal{G}_5 = 0$, tada je gubitak pokretljivosti uzrokovan činjenicom da rotacije jednake po amplitudi, a suprotne po smjeru od \mathcal{G}_4 i \mathcal{G}_6 ne proizvodi nikakvo kretanje vrha manipulatora. Osim toga, šaci (ručni zglob) nije omogućena rotacija oko osi koje su ortogonalne na z_4 i z_5 . Ovaj tip singulariteta je opisan u zglobovskom prostoru i može se pojaviti bilo gdje unutar dostupnog radnog prostora.

Prema tome, singulariteti šake su opasniji od singulariteta ruke jer su prvi definirani u zglobovskom prostoru, dok se zadatak robotu definira u operacijskom prostoru. S tim u vezi, potrebno je posebnu pažnju posvetiti programiranju kretanja vrha manipulatora kako bi se ovi singulariteti izbjegli.

Primjer 5. Stanford manipulator

Budući da se Stanford manipulator sastoji od sferne ruke i sferne šake, moguće je izvršiti dekomponiranje singulariteta na singularitete ruke i šake.

Singulariteti šake dobivaju se iz uvjeta:

$$\det(\mathbf{J}_{22}) = 0,$$

tj.

$$\begin{aligned}
& \det \left(\begin{bmatrix} c_1 s_2 & -c_1 c_2 s_4 - s_1 c_4 & c_1 c_2 c_4 s_5 - s_1 s_4 s_5 + c_1 s_2 c_5 \\ s_1 s_2 & -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 & s_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 s_4 s_5 + s_1 s_2 c_5 \\ c_2 & s_2 s_4 & -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix} \right) \\
&= c_1 s_2 \begin{bmatrix} -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 & s_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 s_4 s_5 + s_1 s_2 c_5 \\ s_2 s_4 & -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix} - (-c_1 c_2 s_4 - s_1 c_4) \begin{bmatrix} s_1 s_2 & s_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 s_4 s_5 + s_1 s_2 c_5 \\ c_2 & -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix} \\
&\quad + (c_1 c_2 c_4 s_5 - s_1 s_4 s_5 + c_1 s_2 c_5) \begin{bmatrix} s_1 s_2 & -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 \\ c_2 & s_2 s_4 \end{bmatrix} \\
&= c_1 s_2 (-c_1 s_2 s_5 - s_1 s_4 c_5 + c_1 c_2 c_4 c_5) + (c_1 c_2 s_4 + s_1 c_4) (-s_1 c_4 s_5 - c_1 c_2 s_4 s_5) \\
&\quad + (c_1 c_2 c_4 s_5 - s_1 s_4 s_5 + c_1 s_2 c_5) (s_1 s_4 - c_1 c_2 c_4) \\
&= -c_1^2 c_2^2 s_5 - s_1^2 s_5 - c_1^2 s_2^2 s_5 = -s_5 = 0
\end{aligned}$$

Prema tome singularne konfiguracije se javljaju za :

$$\vartheta_5 = 0 \quad \vartheta_5 = \pi.$$

Singulariteti ruke izračunavaju se iz uvjeta:

$$\det(\mathbf{J}_{11}) = 0,$$

odnosno,

$$\begin{aligned}
& \det \left(\begin{bmatrix} -s_1 s_2 d_3 - c_1 d_2 - d_6 (c_1 s_4 s_5 + s_1 c_2 c_4 s_5 + s_1 s_2 c_5) & c_1 c_2 d_3 + c_1 d_6 (c_2 c_5 - s_2 c_4 s_5) & c_1 s_2 \\ c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + d_6 (c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 s_2 c_5 - s_1 s_4 s_5) & s_1 c_2 d_3 + s_1 d_6 (c_2 c_5 - s_2 c_4 s_5) & s_1 s_2 \\ 0 & -s_2 d_3 - d_6 (s_2 c_5 + c_2 c_4 s_5) & c_2 \end{bmatrix} \right) = 0. \\
& \det \left(\begin{bmatrix} -s_1 s_2 d_3 - c_1 d_2 - d_6 (c_1 s_4 s_5 + s_1 c_2 c_4 s_5 + s_1 s_2 c_5) & c_1 c_2 d_3 + c_1 d_6 (c_2 c_5 - s_2 c_4 s_5) & c_1 s_2 \\ c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + d_6 (c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 s_2 c_5 - s_1 s_4 s_5) & s_1 c_2 d_3 + s_1 d_6 (c_2 c_5 - s_2 c_4 s_5) & s_1 s_2 \\ 0 & -s_2 d_3 - d_6 (s_2 c_5 + c_2 c_4 s_5) & c_2 \end{bmatrix} \right) \\
&= (-s_1 s_2 d_3 - c_1 d_2 - d_6 (c_1 s_4 s_5 + s_1 c_2 c_4 s_5 + s_1 s_2 c_5)) \begin{bmatrix} s_1 c_2 d_3 + s_1 d_6 (c_2 c_5 - s_2 c_4 s_5) & s_1 s_2 \\ -s_2 d_3 - d_6 (s_2 c_5 + c_2 c_4 s_5) & c_2 \end{bmatrix} \\
&\quad - (c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + d_6 (c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 s_2 c_5 - s_1 s_4 s_5)) \begin{bmatrix} c_1 c_2 d_3 + c_1 d_6 (c_2 c_5 - s_2 c_4 s_5) & c_1 s_2 \\ -s_2 d_3 - d_6 (s_2 c_5 + c_2 c_4 s_5) & c_2 \end{bmatrix} \\
&= (-s_1 s_2 d_3 - c_1 d_2 - d_6 (c_1 s_4 s_5 + s_1 c_2 c_4 s_5 + s_1 s_2 c_5)) (s_1 d_3 + s_1 c_5 d_6) \\
&\quad - (c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + d_6 (c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 s_2 c_5 - s_1 s_4 s_5)) (c_1 d_3 + c_1 c_5 d_6) \\
&= -s_2 d_3^2 - s_2 c_5 d_3 d_6 - c_2 c_4 s_5 d_3 d_6 - c_2 c_4 c_5 s_5 d_6^2 - s_2 c_5 d_3 d_6 - s_2 c_5^2 d_6^2 \\
&= -s_2 (d_3 + c_5 d_6)^2 - c_2 c_4 s_5 d_6 (d_3 + c_5 d_6) = 0
\end{aligned}$$