5. PLANIRANJE TRAJEKTORIJE

5.1 UVOD

Da bi robot mogao obaviti određeni zadatak, potrebno je zadati niz tačaka u prostoru kroz koje vrh manipulatora mora proći. Cilj postupka planiranja trajektorije jeste generiranje referentnih ulaza u sistem upravljanja kretanjem, koji osigurava manipulatoru slijeđenje zadane trajektorije. Korisnik obično odabire jedan skup parametara dovoljnih za opis željene trajektorije. Planiranjem se generira vremenska sekvenca vrijednosti pridružena polinomskoj funkciji koja interpolira željenu trajektoriju. U nastavku se obrađuju postupci za generiranje trajektorija u slučaju:

a) kada su zadane samo početna i krajnja tačka putanje (od tačke do tačke, eng. *point-to-point*),
b) kada je zadana konačni skup tačaka duž putanje (kretanje po putanji, eng. *path motion*).

Pod pojmom trajektorije podrazumijeva se proračun ubrzanja, usporenja, sinhronizacija kretanja među osima (usklađivanje brzina) te izračunavanje pozicija zglobova svih osi gibanja u skladu sa zadanom putanjom kretanja vrha manipulatora. Za razliku od trajektorije, putanja je geometrijsko mjesto tačaka u zglobovskom prostoru ili u operacijskom prostoru koje manipulator treba da slijedi pri izvršavanju određenog zadatka.
Kod planiranja trajektorije nužno je u proračune uključiti ograničenja koja kod robota objektivno postoje uslijed geometrije robota i ograničenja radnog prostora te zbog realnih karakteristika konstrukcije robota (čvrstoća) i njegovih pogona (maksimalno dozvoljeno ubrzanje i brzina kretanja svakog zgloba).
U općem slučaju su ulazi u algoritam planiranja trajektorije: opis putanje, ograničenja na putanju i ograničenja na dinamiku manipulatora, a izlazi su su trajektorije zglobova (vrha manipulatora) u obliku vremenske sekvence vrijednosti koje poprima pozicija, brzina i ubrzanje. Putanja je definirana ili u zglobovskom ili u operacijskom prostoru, pri čemu je prirodnije (sa stanovišta operatora) opis u operacijskom prostoru.
Najčešće se zadaje ukupno vrijeme realizacije trajektorije, ograničenja na maksimalne brzine i ubrzanja,kao i eventualne brzine i ubrzanja u nekim dodatnim tačkama koje su posebno interesantne.

5.2 PLANIRANJE TRAJEKTORIJE U ZGLOBOVSKOM PROSTORU

Kretanje manipulatora obično se definira u operacijskom prostoru pomoću trajektorijskih parametara, kao što su početna i krajnja lokacija vrha manipulatora, moguće međulokacije i vrijeme trajanja kretanja duž pojedinačne geometrijske staze. Ako se planiranje trajektorije želi obaviti u zglobovskom prostoru, tada je neophodno, pronaći vrijednosti zglobovskih varijabli. To se može učiniti na dva načina:
1. Primjenom algoritma inverzne kinematike, ako se planiranje vrši bez neposrednog učešća manipulatora (eng. Off-line).
2. Direktnim mjerenjem pomoću davača zglobovskih varijabli, ako se planiranje vrši obučavanjem (eng. Teaching-by-showing).

Algoritam planiranja generira funkciju $q(t)$, koja interpolira dane vektore u svakoj tački i uzima u obzir nametnuta ograničenja.
Algoritam za planiranje trajektorije u zglobovskom prostoru treba ispuniti slijedeće uvjete:

- računanje trajektorija ne smije biti suviše komplicirano sa računarske tačke gledišta,
- varijable položaja zglobova i brzine zglobova moraju biti kontinuirane funkcije vremena, kontinuiranost se može (ali ne mora) nametnuti i na ubrzanja zglobova,
- nepoželjni efekti trebaju biti minimizirani (npr. odsustvo glatkoće trajektorije koje interpoliraju putanje).

5.2.1 Kretanje od tačke do tačke (engl. point-to-point motion)

U ovom slučaju manipulator se kreće iz početne do konačne konfiguracije za zadano vrijeme t_f. Stvarna putanja vrha manipulatora nije toliko važna, nego je bitno da manipulator za dano vrijeme stigne iz početne u krajnju tačku. Može se pronaći veliki broj operacija koje manipulator obavlja uz kretanje od tačke do tačke. Takve su operacije tačkasto zavarivanje, bušenje, podizanje i spuštanje itd. Osnovno načelo kretanja od tačke do tačke uključuje slijedeće korake:

1. pomak u zadanu poziciju, npr. između dvije elektrode,
2. zaustavljanje u zadanoj poziciji,
3. obavljanje zadataka (zavarivanje),
4. pomak u slijedeću poziciju.

U velikom boju slučajeva, kod kretanja od tačke do tačke su trajektorija i brzina kretanja zapravo nevažne. Pri tome se načelno kretanje robota može odvijati na dva osnovna načina:
1. svaka os zasebno kreće sa maksimalnom brzinom,
2. sve osi završavaju kretanje istovremeno, što znači da se maksimalnom brzinom kreće ona os koja mora prevaliti najveću udaljenost, dok se ostale osi kreću sporije.

5.2.1.1 Planiranje trajektorije od tačke do tačke interpolacijom kubnim polinomom

Za definiranje kretanja zgloba može se odabrati kubni polinom:

$$q(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \tag{5.1}$$

koji ima parabolični profil brzine:

$$\dot{q}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1, \tag{5.2}$$

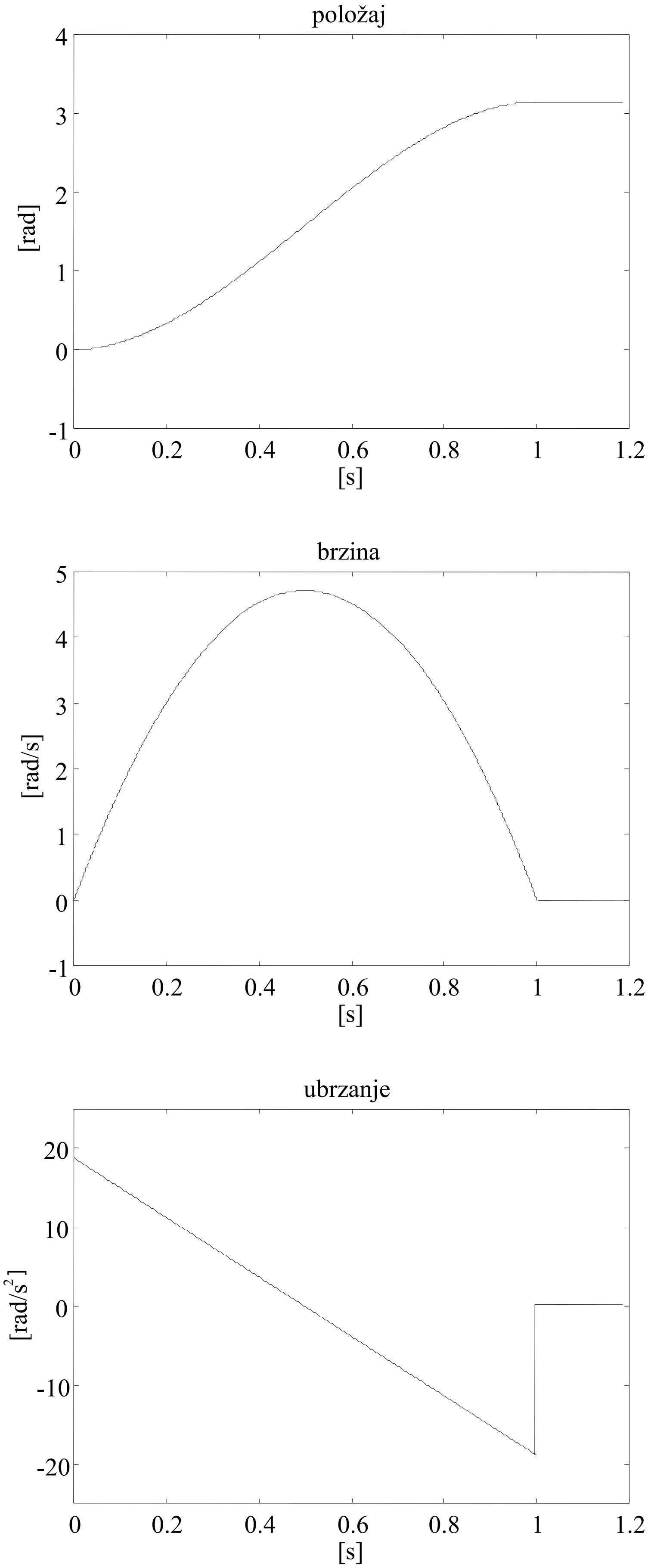
i linearni profil ubrzanja:

$$q(t) = 6a_3 t + 2a_2. \tag{5.3}$$

U ovom slučaju postoje 4 nepoznata koeficijenta za čije se određivanje, pored početnih i krajnjih vrijednosti varijabli zgloba q_i i q_f, mogu upotrijebiti i početne i krajnje vrijednosti brzine zgloba $\dot{q}_i$ i $\dot{q}_f$, koje se obično postavljaju na nulu. Određivanje specificirane trajektorije obavlja se rješavanjem slijedećeg sistema jednadžbi:

$$\begin{aligned} a_0 &= q_i \\ a_1 &= \dot{q}_i \\ a_3 t_f^3 + a_2 t_f^2 + a_1 t_f + a_0 &= q_f \\ 3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f + a_1 &= \dot{q}_f \end{aligned} \tag{5.4}$$

Na Sl. 5.1 prikazan je zakon vremenske promjene, dobiven sa slijedećim ulaznim podacima : $q_i = 0, q_f = \pi, t_f = 1, \dot{q}_i = 0, \dot{q}_f = 0$. Kao što se i moglo pretpostaviti, brzina ima parabolični profil, a ubrzanje linearni profil sa početnim i krajnjim prekidom prvog reda.

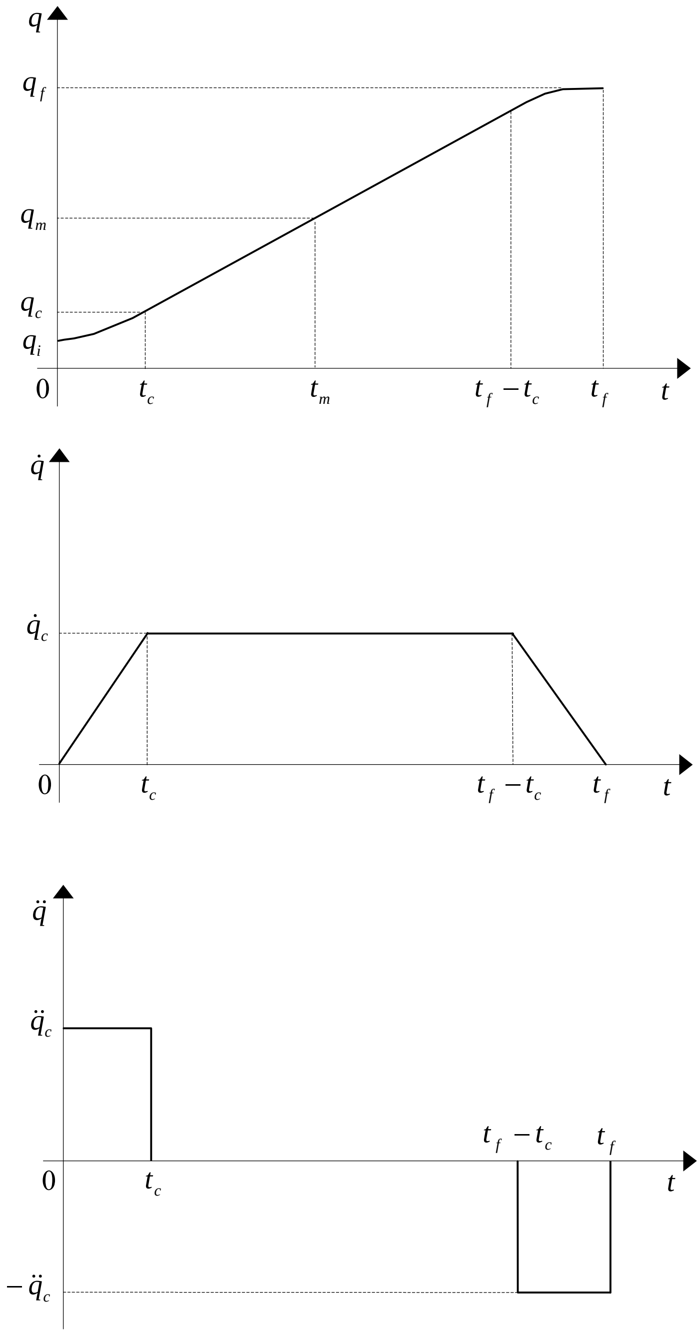


Slika 5.1. Vremenski dijagrami položaja, brzine i ubrzanja sa vremenskom promjenom položaja u obliku kubnog polinoma.

Alternativni pristup u planiranju trajektorije kretanja manipulatora od tačke do tačke je pomoću *nadoveznih vremenskih polinoma*. Ovakav pristup omogućuje da se odmah provjeri da li rezultujuće brzine i ubrzanja dani manipulator može realizirati s obzirom na interna dinamička ograničenja.

5.2.1.2 Planiranje trajektorije od tačke do tačke postupkom nadoveznih vremenskih polinoma

Često se postavlja zadatak robotu da iz početne q_i u krajnju (ciljnu) q_f tačku stigne što je brže moguće, u skladu s maksimalno dozvoljenim brzinama i ubrzanjima zglobova. Prijelazna pojava zadanog kretanja prikazana je na Sl. 5.2.



Slika 5.2. Trapezoidni profil brzine.

Tijekom prijelazne pojave mogu se uočiti tri tipična intervala: interval maksimalnog ubrzanja $[0, t_c]$, interval maksimalne brzine $[t_c, t_f - t_c]$ i interval maksimalnog usporenja $[t_f - t_c, t_f]$. Početna i krajnja vrijednost brzine jednake su nuli, a početni i krajnji interval konstantnog ubrzanja jednakog su trajanja; posljedica toga su jednake amplitude $\ddot{q}_c$ u oba intervala. Na osnovu ovakvog izbora trajektorija postaje simetrična s obzirom na srednju tačku $q_m = \dfrac{q_f + q_i}{2}$ u trenutku $t_m = \dfrac{t_f}{2}$.

Trajektorija mora zadovoljavati neka ograničenja ukoliko se želi preći iz q_i u q_f za vrijeme t_f. Brzina na kraju paraboličkog segmenta mora biti jednaka brzini (konstantnoj) linearnog segmenta, tj.

$$\ddot{q}_c t_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c}, \tag{5.5}$$

gdje je q_c vrijednost varijable zgloba na kraju paraboličkog intervala u trenutku t_c sa konstantnim ubrzanjem $\ddot{q}_c$ $(\dot{q}(0) = 0)$. Tada je:

$$q_c = q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t_c^2 . \tag{5.6}$$

Kombiniranjem izraza (5.5) i (5.6) dobiva se:

$$\ddot{q}_c t_c^2 - \ddot{q}_c t_f t_c + q_f - q_i = 0 . \tag{5.7}$$

Budući da je $\ddot{q}_c$ obično poznato i za zadani t_f, q_i i q_f, rješenje za t_c računa se iz (5.7) kao ($t_c \le \dfrac{t_f}{2}$):

$$t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_f^2 \ddot{q}_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot{q}_c}} . \tag{5.8}$$

Naravno, ubrzanje mora zadovoljavati relaciju:

$$|\ddot{q}_c| \ge \frac{4|q_f - q_i|}{t_f^2} . \tag{5.9}$$

Ako je prethodni izraz zadovoljen sa znakom jednakosti, tada trapezoidni profil brzine postaje trokutasti.

Prema tome, za zadane vrijednosti t_f, q_i i q_f, izraz $|\ddot{q}_c| \ge \dfrac{4|q_f - q_i|}{t_f^2}$ omogućuje postizanje vrijednosti ubrzanja koja je konzistentna sa trajektorijom. Zatim se izračuna t_c iz (5.8), čime se dobiva :

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t^2 & 0 \le t \le t_c \\ q_i + \ddot{q}_c t_c (t - t_c/2) & t_c < t \le t_f - t_c \\ q_f - \frac{1}{2}\ddot{q}_c (t_f - t)^2 & t_f - t_c < t \le t_f \end{cases} . \tag{5.10}$$

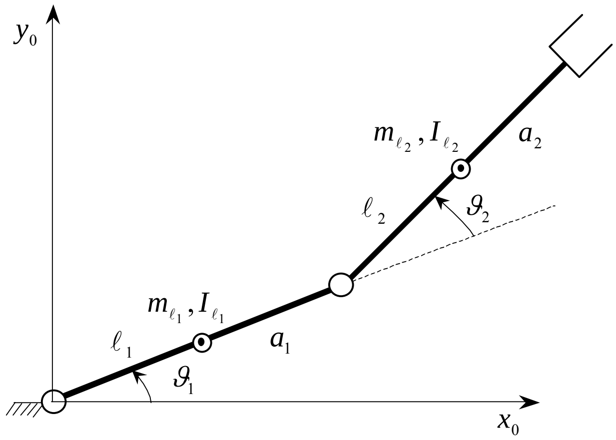
U ovom slučaju smo dodatno nametnuli vrijednost ubrzanja za željenu trajektoriju sa trapezoidnim profilom brzine.

Primjer 5.1
Planiranje trajektorije od tačke do tačke postupkom nadoveznih vremenskih polinoma (trapezoidni profil brzine) za dvosegmentnu planarnu ruku.

Zadana je dvosegmentna planarna struktura manipulatora (Sl. 5.3) sa slijedećim podacima:

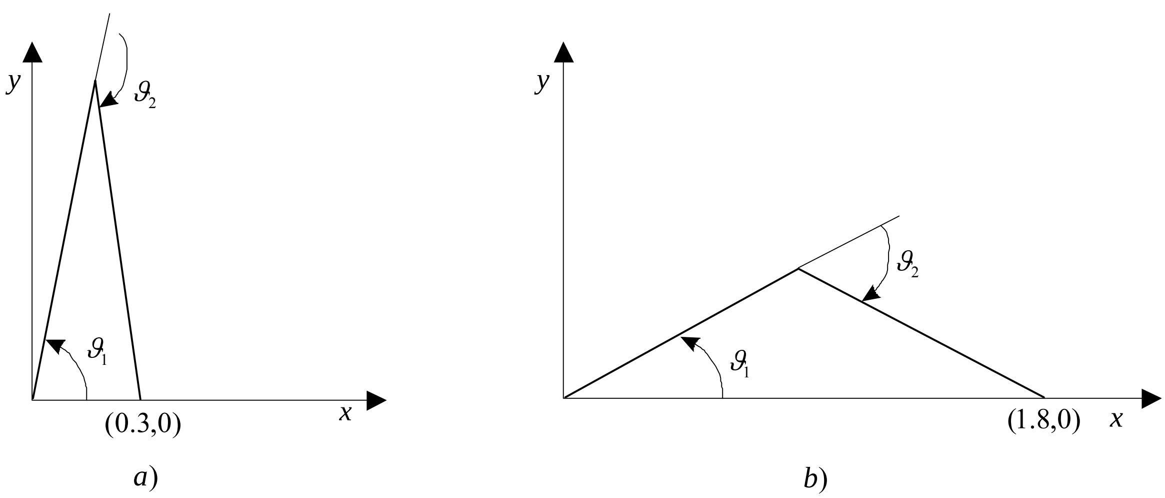
$$a_1 = a_2 = 1\,\mathrm{m} \quad \ell_1 = \ell_2 = 0.5\,\mathrm{m} \quad m_{\ell_1} = m_{\ell_2} = 50\,\mathrm{kg} \quad I_{\ell_1} = I_{\ell_2} = 10\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$$
$$k_{r_1} = k_{r_2} = 100 \quad m_{m_1} = m_{m_2} = 5\,\mathrm{kg} \quad I_{m_1} = I_{m_2} = 0.01\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2,$$

pri čemu oba segmenta imaju potpuno identičnu geometrijeku građu.



Slika. 5.3. Dvosegmentna planarna robotska ruka.

Željeni profil trajektorije brzine je trapezoidnog oblika pri čemu se vrh manipulatora kreće po horizontalnoj osi 1,2 *m*. Početna konfiguracija je manipulator u zgrčenom položaju (vrh manipulatora u tački (0.3,0) , Sl. 5-4.).



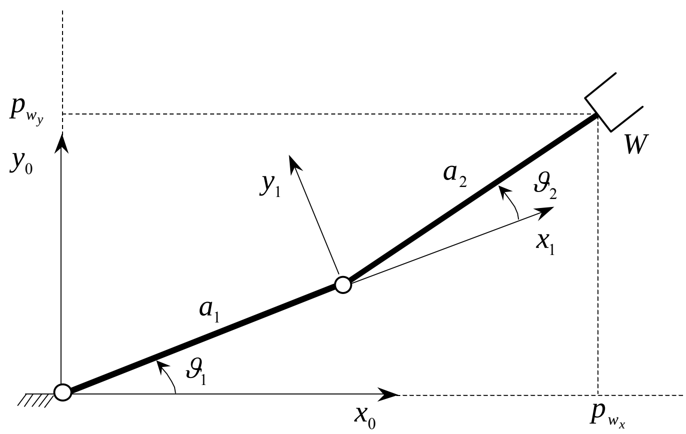
Slika 5.4. Početni i krajnji položaj vrha manipulatora.

Potrebno je odvojeno razmotriti dva slučaja :

1) brza trajektorija: vrijeme ubrzanja je 0,6 s, a maksimalna brzina 1m/s
2) spora trajektorija : vrijeme ubrzanja je 0,6 s, a maksimalna brzina 0,3m/s

Rješenje:

Željena putanja kretanja vrha manipulatora zadana je u operacijskom prostoru početnom i krajnjom tačkom. Ako se planiranje trajektorije želi provesti u zglobovskom prostoru, potrebno je pronaći vrijednosti zglobovskih varijabli upravljanja, primjenom algoritma inverzne kinematike. Problem inverzne kinematike se sastoji u određivanju zglobovskih varijabli koje odgovaraju danoj poziciji i orijentaciji vrha manipulatora. Rješavanje inverznog kinematičkog problema je važno jer se kretanjem robota najčešće upravlja tako da se zada željeni položaj i orijentacija vrha manipulatora.
Vektor pozicije vrha dvosegmentnog manipulatora (Sl. 5.5) u odnosu na bazni koordinatni sistem $\boldsymbol{p}_w$ sastoji se od dvije komponenti p_{wx}, p_{wy}, duž x i y osi.



Slika 5.5. Dvosegmentna planarna ruka.

Potrebno je problem iz operacijskog prevesti u zglobovski prostor i odrediti zakon promjene varijabli zglobova ϑ_1 i ϑ_2. Ako su date početna i krajnja tačka krivulje puta, planiranje trajektorije je od tačke do tačke (POINT-TO-POINT).
Matrica homogene transformacije dvosegmentne planarne strukture je slijedećeg oblik

$$\boldsymbol{T}_2^0(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{A}_1^0(\vartheta_1)\boldsymbol{A}_2^1(\vartheta_2) = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

gdje je $\boldsymbol{q} = [\vartheta_1 \quad \vartheta_2]^T$ vektor varijabli zglobova .
Vektor pozicije vrha manipulatora $\boldsymbol{p}_w$ predstavlja prva tri retka zadnjeg stupca matrice direktne kinematike:

$$\boldsymbol{T}_w^0(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_w & \boldsymbol{s}_w & \boldsymbol{a}_w & \boldsymbol{p}_w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p}_w = \begin{bmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix},$$

čije su komponente duž x i y osi jednake:

$$\begin{aligned} p_{wx} &= a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ p_{wy} &= a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} c_{12} &= \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ s_{12} &= \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned} .$$

Nakon kvadriranja i sumiranja dobiva se:

$$\begin{aligned} p_{wx}^2 + p_{wy}^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2 \\ c_2 &= \frac{p_{wx}^2 + p_{wy}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2} \end{aligned} .$$

Prihvatljiva rješenja su samo za $-1 \le c_2 \le 1$, dok su ostala van dostupnog radnog prostora. Ugao ϑ_2 može se izračunati na slijedeći način:

$$\vartheta_2 = A\tan 2(s_2, c_2), \tag{5.12}$$

gdje je $s_1 = \pm\sqrt{1 - c_2^2}$. Pozitivan predznak se odnosi na donji položaj lakta, a negativni na donji položaj lakta.
Početnoj tački trajektorije (0.3,0), odnosno $p_{wx} = 0.3$ i $p_{wy} = 0$, odgovara u zglobovskom prostoru slijedeća vrijednost ugla ϑ_2:

$$\begin{gathered} c_{20} = \frac{p_{wx0}^2 + p_{wy0}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2} = \frac{(0.3)^2 + 0 - 1 - 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = -0.955 \\ \vartheta_{20} = arc\cos(-0.955) \Rightarrow \vartheta_{20} = 2.84\, rad \end{gathered} \tag{5.13}$$

Analogno se dobiva vrijednost ugla ϑ_2 u krajnjoj tački (1.5,0):

$$\begin{gathered} c_{21} = \frac{(1.5)^2 - 1^2 - 1^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} \quad \Rightarrow \quad c_{21} = 0.125 \\ \vartheta_{21} = arc\cos(0.125) \Rightarrow \vartheta_{21} = 1.445\, rad \end{gathered} \tag{5-14}$$

Prema tome, može se zaključiti da se ϑ_2 mijenja od $2.84\, rad$ do $1.445\, rad$, tj. vrijednost varijable ϑ_2 pada.
U nastavku je potrebno izračunati iznose uglova zakreta prvog zgloga ϑ_1 u početnoj i krajnjoj tački putanje.
Iz početnih jednadžbi se dobiva:

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{wy} - a_2 s_2 p_{wx}}{p_{wx}{}^2 + p_{wy}{}^2} \quad , \quad c_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{wx} - a_2 s_2 p_{wy}}{p_{wx}{}^2 + p_{wy}{}^2} ,$$

$$\frac{s_1}{c_1} = tg\,\vartheta_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{wy} - a_2 s_2 p_{wx}}{(a_1 + a_2 c_2) p_{wx} - a_2 s_2 p_{wy}}$$

$$\vartheta_1 = A\tan 2(s_1, c_1), \tag{5.15}$$

Na osnovu jednadžbe (5.15) dobivaju se vrijednosti ugla zakreta prvog segmenta ϑ_1 u početnoj i krajnjoj tački kroz koje prolazi vrh manipulatora, na slijedeći način:

$$c_{20} = -0.955$$
$$s_{20} = \sqrt{1-c_{20}^2} = \sqrt{1-(-0.955)^2} = 0.297$$

$$tg\vartheta_{10} = -\frac{0.297}{1-0.955} = -6.6$$
$$\vartheta_{10} = -1.4204\, rad\ . \tag{5.16}$$

i

$$c_{21} = 0.125$$
$$s_{21} = \sqrt{1-c_{21}^2} = \sqrt{1-(0.125)^2} = 0.99216$$

$$tg\vartheta_{11} = -\frac{0.99216}{1+0.125} = -0.88192$$
$$\vartheta_{11} = -0.723\, rad \tag{5.17}$$

Vrijednost varijable (ugla) ϑ_1 raste od -1.4203 *rad* do -0.722736 *rad*.
Često se u planiranju trajektorije za zadatke kretanja od tačke do tačke koristi pristup sa nadovezanim vremenskim polinomima. Profil brzine koji se dobiva u tom slučaju ima formu trapezoida, što pretpostavlja konstantno ubrzanje u početnoj fazi, konstantnu putujuću brzinu i konstantno usporenje u fazi dolaska na cilj. Rezultujuća trajektorija se dobija spajanjem linearnog segmenta sa dva parabolička segmenta u početnoj i završnoj fazi.
U zadatku je dan profil trajektorije brzine trapezoidnog oblika na osnovu kojeg treba odrediti jednadžbe za promjenu varijabli zgobova ϑ_1 i ϑ_2 u vremenu.

1) Brza trajektorija

a) Prvi zglob ϑ_1:

Zadana trajektorija je simetrična u odnosu na srednju tačku $q_m = \frac{q_i + q_f}{2}$ u trenutku $t_m = \frac{t_f}{2}$.

U intervalu $0 \le t \le t_c$ profil brzine ima slijedeću jednadžbu:

$$\dot{q} = \frac{\dot{q}_c}{t_c} t\ , \tag{5.18}$$

gdje je $\dot{q}_c$ vrijednost brzine u trenutku t_c.
Integriranjem izraza (5.18) dobiva se izraz za varijablu zgloba u intervalu $0 \le t \le t_c$:

$$q = q_i + \frac{1}{2}\frac{\dot{q}_c}{t_c} t^2\ , \tag{5.19}$$

a njegovim deriviranjem dobiva se izraza za ubrzanje:

$$\ddot{q} = \frac{\dot{q}_c}{t_c}. \tag{5.20}$$

Budući da ubrzanje ima konstantnu vrijednost u promatranom intervalu, slijedi da je

$$\ddot{q} = \frac{\dot{q}_c}{t_c} = \ddot{q}_c ,$$

te na osnovu toga jednadžba (5.19) poprima slijedeći oblik:

$$q = q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t^2 . \tag{5.21}$$

Varijabla zgloba u intervalu $0 \le t \le t_f$ mijenja se po zakonu:

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t^2 & 0 \le t \le t_c \\ q_i + \ddot{q}_c t_c \left(t - \frac{t_c}{2} \right) & t_c \le t \le t_f - t_c \\ q_f - \frac{1}{2}\ddot{q}_c (t_f - t)^2 & t_f - t_c \le t \le t_f \end{cases} . \tag{5.22}$$

Na osnovu zadanih i izračunatih parametara dobiva se izraz za promjenu ugla (varijable) prvog zgloba, odnosno pozicije prvog zgloba:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{q}_c = 1 \quad m/s \\ t_c = 0.6 \quad s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \ddot{q}_c = \frac{1}{0.6} = \frac{5}{3} \\ q_i = \vartheta_{10} = -1.42 \end{array} \right\} \Rightarrow q = -1.42 + \frac{5}{3}\frac{1}{2}t^2 \;\Rightarrow q = -1.42 + \frac{5}{6}t^2 \quad (q = \vartheta_1)$$

$$\vartheta_1(t) = \begin{cases} -1.42 + \frac{5}{6}t^2 & 0 \le t \le t_c \\ -1.42 + (t - 0.3) & t_c \le t \le t_f - t_c \\ -0.723 - \frac{5}{6}(t_f - t)^2 & t_f - t_c \le t \le t_f \end{cases} . \tag{5.23}$$

Potrebno je izračunati ukupno vrijeme kretanja prvog zgloba t_f, kako bi se kompletirala funkcija (5.23). Ako se želi osigurati prijelaz iz q_i u q_f za vrijeme t_f, trajektorija mora zadovoljiti neka ograničenja, a to je da brzina iz pravca i brzina iz parabola u "tačkama našivanja" budu jednake, tj.:

$$\dot{q}_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c} \tag{5.24}$$

Uvrštavanjem slijedećih izraza:

$$q_c = q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t_c^{\,2} = q_i + \frac{1}{2}\dot{q}_c t_c ,\; q_m = \frac{q_i + q_f}{2} \text{ i } t_m = \frac{t_f}{2}$$

u izraz (5.24) dobiva se:

$$\dot{q}_c = \frac{\frac{q_i + q_f}{2} - q_i - \frac{1}{2}\dot{q}_c t_c}{\frac{t_f}{2} - t_c},$$

iz koga slijedi izraz za ukupno vrijeme kretanja prvog zgloba (segmenta) t_f :

$$t_f = \frac{\dot{q}_c t_c + q_f - q_i}{\dot{q}_c}. \qquad (5.25)$$

Iz (5.25) slijedi da je $t_f = 1.297\, s$.

Slijedi da (5.23) postaje

$$\vartheta_1(t) = \begin{cases} -1.42 + \frac{5}{6}t^2 & 0 \le t \le 0.6 \\ -1.42 + (t - 0.3) & 0.6 < t \le 0.697 \\ -0.723 - \frac{5}{6}(1.297 - t)^2 & 0.697 < t \le 1.297 \end{cases}. \qquad (5.26)$$

a) Drugi zglob ϑ_2 :

Zadana trajektorija je simetrična u odnosu na srednju tačku $q_m = \frac{q_i + q_f}{2}$ u trenutku $t_m = \frac{t_f}{2}$.

U intervalu $0 \le t \le t_c$ profil brzine ima slijedeću jednadžbu:

$$\dot{q} = -\frac{\dot{q}_c}{t_c} t, \qquad (5.27)$$

gdje je $\dot{q}_c$ vrijednost brzine u trenutku t_c.
Analognim postupkom kao za prvi zglob dobiva se intervalu $0 \le t \le t_c$:

$$q = q_i - \frac{1}{2}\frac{\dot{q}_c}{t_c}t^2,$$

$$\ddot{q} = -\frac{\dot{q}_c}{t_c}.$$

$$\ddot{q} = -\frac{\dot{q}_c}{t_c} = -\ddot{q}_c,$$

$$q = q_i - \frac{1}{2}\ddot{q}_c t^2.$$

Varijabla zgloba ϑ_2 u intervalu $0 \le t \le t_f$ mijenja se po zakonu:

$$q(t) = \begin{cases} q_i - \frac{1}{2}\ddot{q}_c t^2 & 0 \le t \le t_c \\ q_i - \ddot{q}_c t_c \left(t - \frac{t_c}{2} \right) & t_c \le t \le t_f - t_c \\ q_f + \frac{1}{2}\ddot{q}_c (t_f - t)^2 & t_f - t_c \le t \le t_f \end{cases} . \tag{5.28}$$

Na osnovu zadanih i izračunatih parametara dobiva se izraz za promjenu ugla (varijable) prvog zgloba, odnosno pozicije prvog zgloba:

$$\left. \begin{matrix} \dot{q}_c = 1 \quad m/s \\ t_c = 0.6 \quad s \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \ddot{q}_c = -\frac{1}{0.6} = -\frac{5}{3} \\ q_i = 2.84 \end{matrix} \right\} \Rightarrow q = 2.84 - \frac{5}{3}\frac{1}{2}t^2 \Rightarrow q = 2.84 - \frac{5}{6}t^2 \quad (q = \vartheta_2)$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u (5.28) dobiva se:

$$\vartheta_2(t) = \begin{cases} 2.84 - \frac{5}{6}t^2 & 0 \le t \le t_c \\ 2.84 - (t - 0.3) & t_c \le t \le t_f - t_c \\ 1.445 + \frac{5}{6}(t_f - t)^2 & t_f - t_c \le t \le t_f \end{cases} . \tag{5.29}$$

Dobivanje vremena t_f za drugi zglob je analogno postupku za prvi zglob. Dobivaju se slijedeći izrazi:

$$-\dot{q}_c = \frac{q_c - q_m}{t_c - t_m}$$

$$q_c = q_i - \frac{1}{2}\ddot{q}_c t_c^{\,2} = q_i - \frac{1}{2}\dot{q}_c t_c, \; q_m = \frac{q_i + q_f}{2} \text{ i } t_m = \frac{t_f}{2}$$

$$-\dot{q}_c = \frac{q_i - \frac{1}{2}\dot{q}_c t_c - \frac{q_i + q_f}{2}}{t_c - \frac{t_f}{2}},$$

iz koga slijedi izraz za ukupno vrijeme kretanja drugog zgloba (segmenta) t_f :

$$t_f = \frac{\dot{q}_c t_c - q_f + q_i}{\dot{q}_c} \tag{5.30}$$

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti dobiva se iznos vremena t_f, na slijedeći način:

$$\left.\begin{aligned} q_f &= \vartheta_{21} = 1.445\,rad \\ q_i &= \vartheta_{20} = 2.84\,rad \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow t_f = \frac{1\cdot 0.6 - 1.445 + 2.84}{1} \quad \Rightarrow t_f = 1.995\,s\,.$$

Uvrštavanjem iznosa t_f u (5.29) dobiva se izraz za trajektoriju drugog zgloba:

$$\vartheta_2(t) = \begin{cases} 2.84 - \dfrac{5}{6}t^2 & 0 \le t \le 0.6 \\ 3.14 - t & 0.6 < t \le 1.395 \\ 1.445 + \dfrac{5}{6}(1.995 - t)^2 & 1.395 < t \le 3.196 \end{cases}\,. \tag{5.31}$$

2. Spora trajektorija

Vremena trajanja kretanja zglobova i promjene uglova zglobova su:

a) prvi zglob

$$t_f = \frac{\dot{q}_c t_c + q_f - q_i}{\dot{q}_c} = \frac{0.3\cdot 0.6 + (-0.723) - (-1.42)}{0.3} = 2.925\,s\,, \tag{5.32}$$

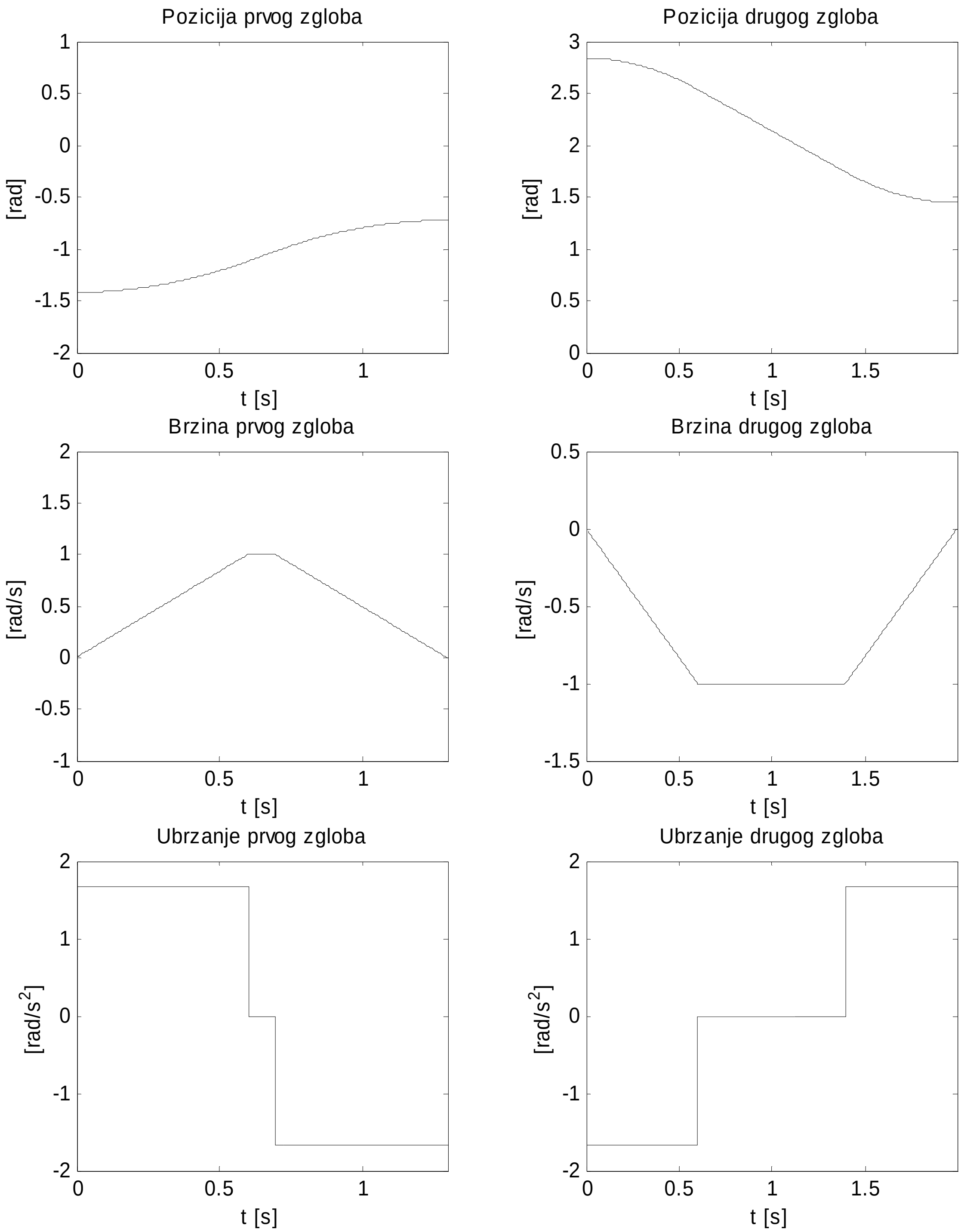
$$\vartheta_1(t) = \begin{cases} -1.42 + \dfrac{1}{4}t^2 & 0 \le t \le 0.6 \\ -1.51 + 0.3t & 0.6 < t \le 2.325 \\ -0.723 - \dfrac{1}{4}(2.925 - t)^2 & 2.325 < t \le 2.925 \end{cases}\,. \tag{5.33}$$

b) drugi zglob

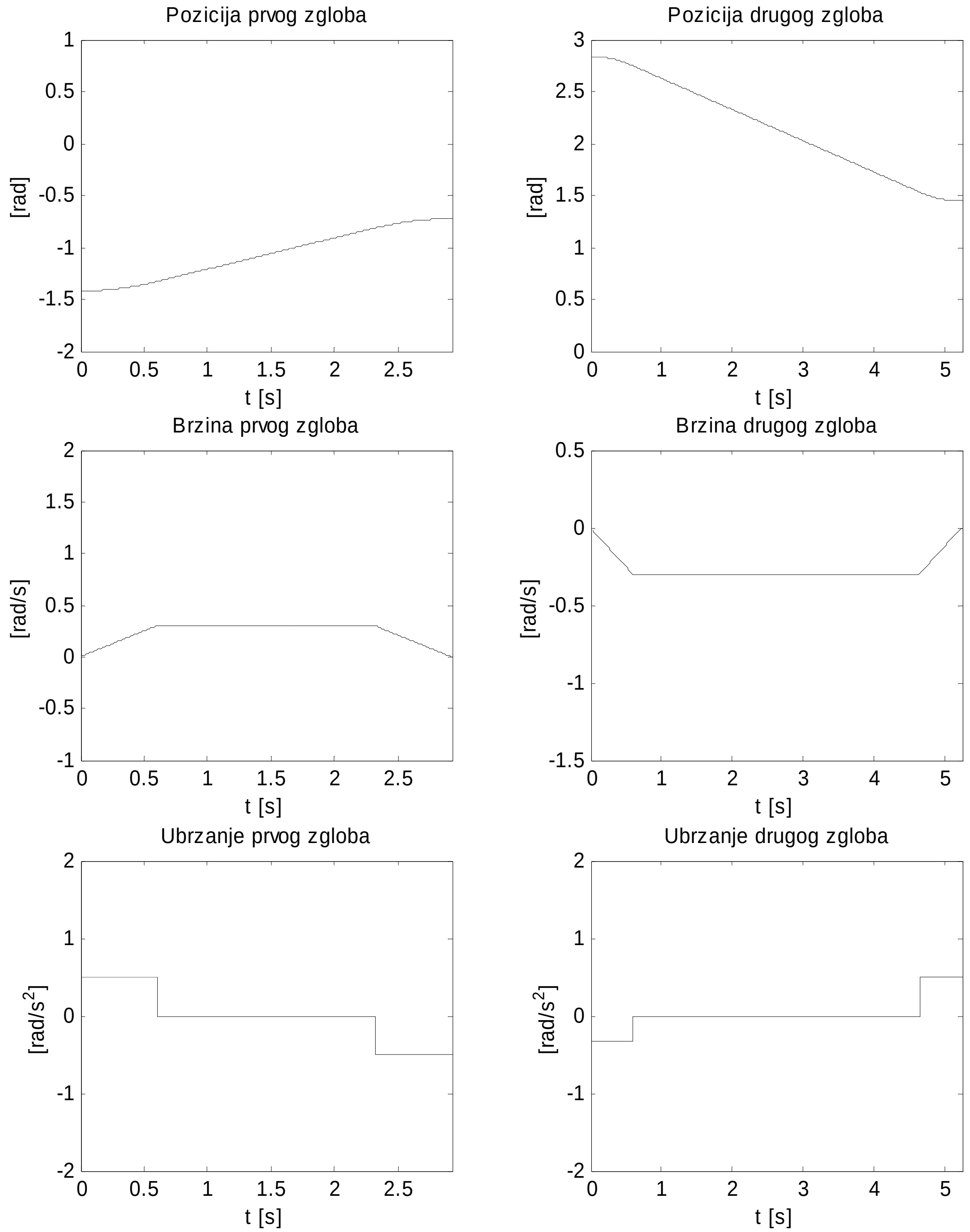
$$t_f = \frac{\dot{q}_c t_c - q_f + q_i}{\dot{q}_c} = \frac{0.3\cdot 0.6 - 1.445 + 2.84}{0.3} = 5.25\,s\,, \tag{5.34}$$

$$\vartheta_2(t) = \begin{cases} 2.84 - \dfrac{1}{4}t^2 & 0 \le t \le 0.6 \\ 2.93 - 0.3t & 0.6 \le t \le 4.65 \\ 1.445 + \dfrac{1}{4}(5.25 - t)^2 & 4.65 \le t \le 5.25 \end{cases}\,. \tag{5.35}$$

Grafički prikazi trajektorija za oba zgloba, skupa sa profilima brzina i ubrzanja, dani su za brzu trajektoriju na Sl. 5.6, a za sporu na Sl. 5.7.



Slika 5.6. Grafički prikazi pozicije, brzine i ubrzanja zglobova dvosegmentne planarne ruke za brzu trajektoriju.



Slika 5.7. Grafički prikazi pozicije, brzine i ubrzanja zglobova dvosegmentne planarne ruke za sporu trajektoriju.

Bitno je uočiti da su vremena kretanja segmenata različita. Nakon zaustavljanja prvog segmenta (zgloba), drugi segment se nastavlja kretati dok se ne dostigne ciljna tačka (1.8,0) u operacijskom prostoru. Vrijednost zakreta prvog segmenta se povećava od -1.42 do -0.723 *rad*, što znači da njegov profil brzine ima porast u početnom intervalu $0 \le t \le t_c$ (period maksimalnog ubrzanja), konstantan iznos u intervalu $t_c < t \le t_f - t_c$ i usporenje (pad vrijednosti) u intervalu $t_f - t_c < t \le t_f$. Za razliku od prvog zgloba, drugi zglob se u početnom intervalu ubrzava u suprotnom smjeru od prvog zgloba (usporenje), a u zadnjem intervalu dolazi do njegovog ubrzavanja.

5.3 PLANIRANJE TRAJEKTORIJE U OPERACIJSKOM PROSTORU

Željena putanja pri upravljanju kontinuiranim kretanjem vrha manipulatora može se definirati u operacijskom prostoru pomoću vektora konfiguracije vrha manipulatora w, koji ima slijedeći oblik:

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}^1(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{w}^2(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}) \\ \left[\exp(q_n / \pi)\boldsymbol{r}^3(\boldsymbol{q})\right] \end{bmatrix}, \tag{5.36}$$

gdje $\boldsymbol{p}$ označava položaj vrha manipulatora, $\boldsymbol{r}^3$ jedinični vektor koji određuje smjer vrha manipulatora i q_n ugao rotacije vrha manipulatora. Na takav način postiže se minimalan prikaz konfiguracije vrha manipulatora jer vektor w ima samo šest komponenata. Prve tri komponente predstavljaju položaj vrha manipulatora $\boldsymbol{w}^1 = \boldsymbol{p}$, dok preostale tri komponente određuju orijentaciju vrha manipulatora $\boldsymbol{w}^2 = \left[\exp(q_n/\pi)\boldsymbol{r}^3\right]$.

Na ovaj način se može putanja vrha manipulatora definirati kao krivulja u operacijskom prostoru. Ako se pri tome zadaju trenuci u kojima vrh manipulatora mora biti u odgovarajućim tačkama putanje, tada ta putanja postaje trajektorija.

Ukoliko je željena putanja vrha manipulatora nepravilnog oblika ili ako su zadane samo pojedine tačke krivulje, potrebno je izvršiti interpolaciju kretanja. Neka se pretpostavi da željena putanja vrha manipulatora nije u potpunosti definirana, nego su zadane samo spojne ili čvorne tačke na toj krivulji, kao što su početak i kralj krivulje te neke međutačke. Tada je potrebno provesti interpolaciju između spojnih tačaka kako bi se dobila glatka putanja koja treba imati barem dvije neprekidne derivacije zbog izbjegavanja beskonačnog ubrzanja.

Neka su zadane početna w^0 i krajnja w^1 tačka putanje. Za interpolaciju glatke krivulje između ovih dviju tačaka može se koristiti slijedeći polinom:

$$w(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D, \qquad 0 \le t \le T \tag{5.37}$$

gdje je T vrijeme potrebno za prijelaz putanje.

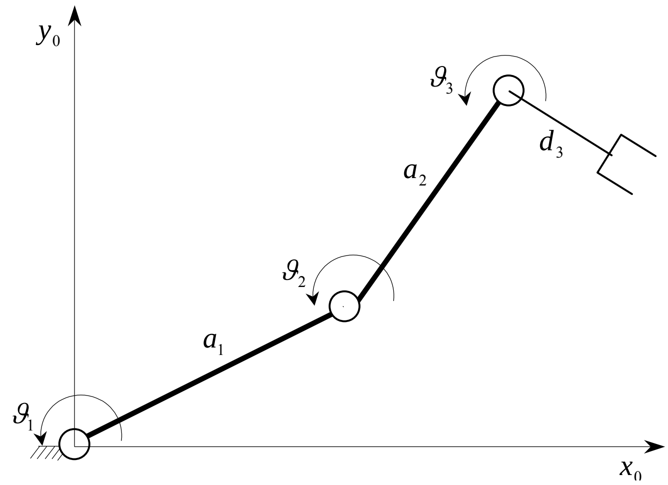
Pri tome trebaju biti zadovoljena dva rubna uvjeta za početnu i krajnju tačku trajektorije: $w(0) = w^0$ i $w(T) = w^1$. Koeficijenti kubnog polinoma su:

$$\begin{aligned} A &= \frac{T(v^1 + v^0) - 2(w^1 - w^0)}{T^3} \\ B &= -\frac{T(v^1 + 2v^0) - 3(w^1 - w^0)}{T^2} \\ C &= v^0 \\ D &= w^0 \end{aligned}, \tag{5.38}$$

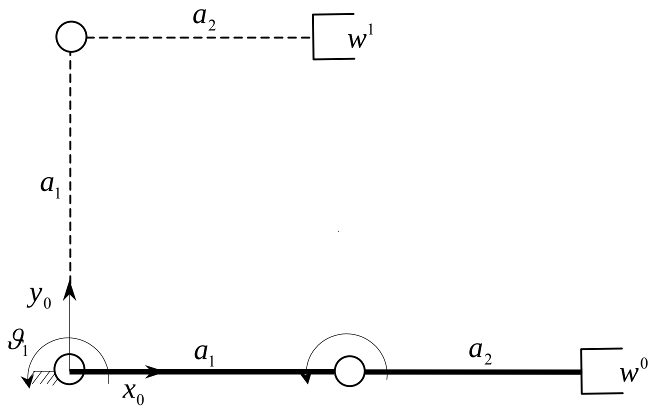
gdje su v^0 i v^1 početna i završna brzina vrha manipulatora.

Primjer 5.2 Troosni planarni manipulator

Troosni planarni manipulator, čiju je trajektoriju potrebno odrediti prikazan je na Sl. 5.8.
Neka se vrh manipulatora pravolinijski kreće od nultog položaja robota do tačke u kojoj prvi i drugi segment čine pravi ugao, uz ugao valjanja vrha manipulatora $\pi/2$ (Sl. 5.9).



Slika 5.8. Troosni planarni manipulator.



Slika 5.9. Početna i završna konfiguracija vrha manipulatora.

Vektor konfiguracije vrha manipulatora za danu strukturu ima oblik:

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{w}_2(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{w}_3(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{w}_4(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{w}_5(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{w}_6(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ d_3 \\ 0 \\ 0 \\ \exp(\vartheta_3/\pi)\boldsymbol{r}^3 \end{bmatrix}. \tag{5.39}$$

Tada je početna tačka putanje vrha manipulatora u operacijskom prostoru jednaka:

$$w^0 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 & d_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \ , \vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = 0\, ,\ q_3 = \vartheta_3\, ,$$

i krajnja tačka putanje:

$$w^1 = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & d_3 & 0 & 0 & 1.648721 \end{bmatrix}^T \ \ , \ \vartheta_1 = \pi/2\, , \vartheta_2 = -\pi/2\, , \vartheta_3 = \pi/2\, .$$

Računanje interpolacijskih polinoma:

$w_1(t)$: $\quad w_1(t) = A_1 t^3 + B_1 t^2 + C_1 t + D_1$

$$A_1 = \frac{T(v_1^1 + v_1^0) - 2(w_1^1 - w_1^0)}{T^3} = \frac{-2(w_1^1 - w_1^0)}{T^3} = \frac{-2\left[a_2 - (a_1 + a_2)\right]}{T^3} = 2a_1/T^3$$

$$B_1 = -\frac{T(v_1^1 + 2v_1^0) - 3(w_1^1 - w_1^0)}{T^2} = \frac{-3(w_1^1 - w_1^0)}{T^2} = -3a_1/T^2$$

$$C_1 = v_1^0 = 0$$

$$D = w_1^0 = a_1 + a_2$$

$$w_1(t) = (2a_1/T^3)t^3 - (3a_1/T^2)t^2 + a_1 + a_2\, . \tag{5.40}$$

$w_2(t)$: $\quad w_2(t) = A_2 t^3 + B_2 t^2 + C_2 t + D_2$

$$A_2 = \frac{T(v_2^1 + v_2^0) - 2(w_2^1 - w_2^0)}{T^3} = \frac{-2(w_2^1 - w_2^0)}{T^3} = -2a_1/T^3$$

$$B_2 = -\frac{T(v_2^1 + 2v_2^0) - 3(w_2^1 - w_2^0)}{T^2} = \frac{-3(w_2^1 - w_2^0)}{T^2} = 3a_1/T^2$$

$$C_2 = v_2^0 = 0$$

$$D_2 = w_2^0 = 0$$

$$w_2(t) = -(2a_1/T^3)t^3 + (3a_1/T^2)t^2\, . \tag{5.41}$$

$w_3(t)$: $$w_3(t) = d_3\, . \tag{5.42}$$

$w_4(t)$: $$w_4(t) = 0\, . \tag{5.43}$$

$w_5(t)$: $$w_5(t) = 0\,. \tag{5.44}$$

$w_6(t)$: $$w_6(t) = A_6 t^3 + B_6 t^2 + C_6 t + D_6$$

$$A_6 = \frac{T(v_6^1 + v_6^0) - 2(w_6^1 - w_6^0)}{T^3} = \frac{-2(w_6^1 - w_6^0)}{T^3} = -1.297443/T^3$$
$$B_6 = -\frac{T(v_6^1 + 2v_6^0) - 3(w_6^1 - w_6^0)}{T^2} = \frac{-3(w_6^1 - w_6^0)}{T^2} = 1.946164/T^2$$
$$C_6 = v_6^0 = 0$$
$$D_6 = w_6^0 = 1$$

$$w_6(t) = -(1.297443/T^3)t^3 + (1.946164/T^2)t^2 + 1\,. \tag{5.45}$$

Prema tome, zadana putanja može se interpolirati slijedećim kubnim polinomima:

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= (2a_1/T^3)t^3 - (3a_1/T^2)t^2 + a_1 + a_2\\
w_2(t) &= -(2a_1/T^3)t^3 + (3a_1/T^2)t^2\\
w_3(t) &= d_3\\
w_4(t) &= 0\\
w_5(t) &= 0\\
w_6(t) &= -(1.297443/T^3)t^3 + (1.946164/T^2)t^2 + 1\,.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Za slijedeće vrijednosti parametara $T = 1\,s, a_1 = 0.3\,m, a_2 = 0.2\,m$ i $d_3 = 0.1\,m$ dobiva se:

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= 0.6t^3 - 0.9t^2 + 0.5\\
w_2(t) &= -0.6t^3 + 0.9t^2\\
w_3(t) &= 0.1\\
w_4(t) &= 0\\
w_5(t) &= 0\\
w_6(t) &= -1.297443t^3 + 1.946164t^2 + 1\,.
\end{aligned} \tag{5.47}$$