

Identifikacija – UVOD

- Cilj:
 - Matematski opis vremenskog ponašanja bilo kojeg sistema:
- Kako?
 - Sistemska analiza (analiza procesa i analiza signala)
 - tehnički, biološki i ekonomski
 - D1: Sistem je ograničeni skup procesa, koji utiču jedan na drugoga
 - D2: Proces označava pretvorbu i/ili transport (prenos) materije, energije i/ili informacije

Analiza procesa

- Teoretska (modeliranje)
 - Jednačine ravnoteže
 - mase, energije
 - Fizikalno-kemijske jednačine stanja
 - Uspostava jednačina za pojave, koje opisuju nepovratne (ireverzibilne) procese (napr. Prenos toplote).
 - Eventualna uspostava jednačina entropijske ravnoteže, kod reverzibilnih ili nepovratnih (ireverzibilnih) procesa.

Rezultat:

- Sistem običnih i/ili parcijalnih diferencijalnih jednačina

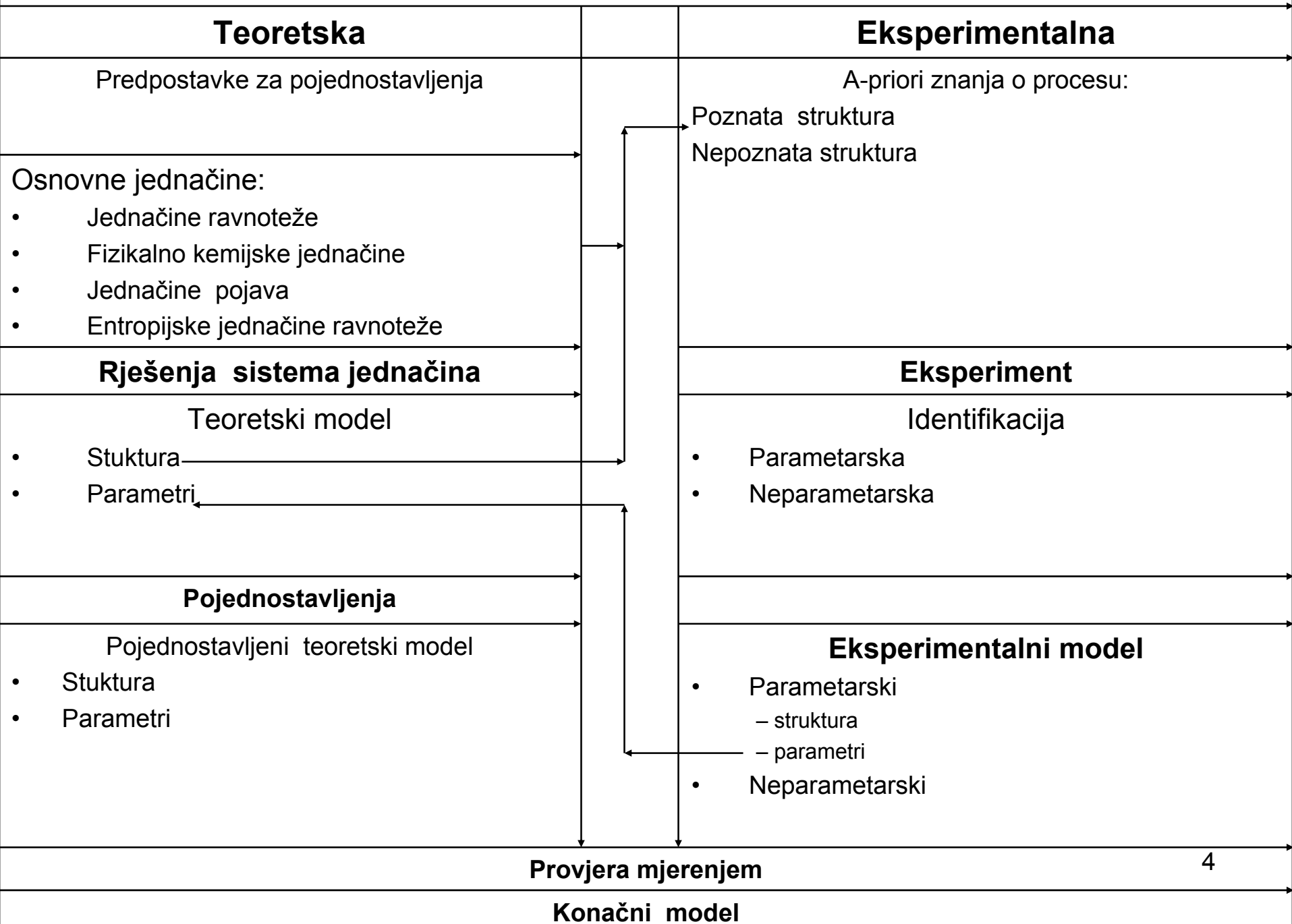
Analiza procesa

- Eksperimentalna (identifikacija)
 - Matematski model dobijamo uz upotrebu mjerenih ulaznih i izlaznih signala
 - Za ulazne signale upotrebljavamo vještački proizvedene ispitne signale (nije uvijek pravilo)
- Koristimo identifikacijske postupke za parametarske ili neparametarske modele

Rezultat:

- Eksperimentalni model

Analiza procesa



Karakteristike teoretskog modeliranja i identifikacije

Teoretsko modeliranje

- Struktura modela je posljedica prirodnih zakonomjernosti .
- Opis ponašanja unutarnjih akumulatora stanja i ulazno-izlaznog ponašanja.
- Parametri modela su dati kao funkcije procesnih veličina.
- Model je validan za cijelu familiju tipova procesa pri različitim pogonskim stanjima. Mnoge procesne veličine so vrlo malo ili nedovoljno poznate.
- Bitna unutarnja stanja procesa moramo saznati iz matematskog opisa.
- Većinom zahtjeva dosta vremena za razvoj.

Identifikacija

- Strukturu modela moramo pretpostaviti
- Identificiramo je iz ulazno-izlaznog ponašanja
- Parametri modela so čiste numeričke vrijednosti kod kojih ne vidimo povezanost sa fizikalnim procesnim veličinama..
- Model je validan i za razvojni proces kao i za dobijene rezultate iz eksperimenta. Zato ta ponašanja opisujemo relativno dosta tačno.

Karakteristike teoretskog modeliranja i identifikacije

Teoretsko modeliranje

- Struktura modela je posljedica prirodnih zakonomjernosti .
- Opis ponašanja unutarnjih akumulatora stanja i ulazno-izlaznog ponašanja.
- Parametri modela su dati kao funkcije procesnih veličina.
- Model je validan za cijelu familiju tipova procesa pri različitim pogonskim stanjima. Mnoge procesne veličine so vrlo malo ili nedovoljno poznate.
- Bitna unutarnja stanja procesa moramo saznati iz matematskog opisa.
- Većinom zahtjeva dosta vremena za razvoj.

Identifikacija

- Model identificiramo samo za neke postojeće procese.
- Nije potrebno poznavati unutarnje tokove procesa.
- Pošto su postupci identifikacije neovisni od konkretnih procesa , možemo jednostavno upotrebiti jednom razvijenu programsku opremu pri razvoju modela mnogih različitih procesa..
- Većinom zahtjeva relativno malo vremena.

Podjela po tipu identifikacionih metoda

- **Po tipu sistema koji se identifikuje:**
 - ❖ Identifikacija linearnih sistema
 - ❖ Identifikacija nelinearnih sistema
- **Po vremenskoj prirodi sistema**
 - ❖ Identifikacija stacionarnih sistema
 - ❖ Identifikacija nestacionarnih sistema
- **Po vremenskom opisu sistema**
 - ❖ Identifikacija kontinualnih sistema
 - ❖ Identifikacija diskretnih sistema

Podjela po tipu identifikacionih metoda

- **Po složenosti sistema koji se identifikuje:**
 - ❖ Identifikacija sistema sa jednim ulazom i izlazom (SISO)
 - ❖ Identifikacija sistema sa više ulaza i jednim izlazom (MISO)
 - ❖ Identifikacija sistema sa više ulaza i izlaza (MIMO)
- **Po statističkoj prirodi sistema**
 - ❖ Identifikacija determinističkih sistema
 - ❖ Identifikacija stohastičkih sistema
- **Po stepenu apriori znanja o sistemu**
 - ❖ Identifikacija sistema sa više apriori znanja o sistemu (lakše)
 - ❖ Identifikacija sistema sa manje apriori znanja o sistemu (teže)

Rezultat primjene po tipu identifikacionih metoda

- **Model dobijen identifikacijom uz pretpostavke o:**
 - ❖ Linearnosti, determinističkom ponašanju, SISO,
 - ❖ Stacionarni, sa više apriori znanja o ponašanju
- ***Je mnogo jednostavniji od modela dobijenog uz pretpostavke o :***
- ❖ Nelinearnosti, nestacionarnosti, stohastičkoj prirodi i višedimenzionalnom MIMO sistemu, sa manje apriori znanja
- ***Koji može biti izuzetno složen i komplikovan za gradnju i izvodenje***

OSNOVNE DEFINICIJE I KLASIFIKACIJE

Problem identifikacije karakteristika sistema može se posmatrati kao dual problema upravljanja sistemom. Sistemom se ne može upravljati sve dok nije izvršena njegova identifikacija, bilo apriori ili u trenutku početka upravljanja.

Ukoliko želimo da pokrenemo neki sistem od tačke A do tačke B, možemo se osloniti na čistu sreću ili da naučimo odziv sistema na jedno ili više upravljačkih dejstava. Ako znamo da ulaz u_j dovodi sistem bliže tački B tada možemo primjeniti taj ulaz. Bez tog prethodnog znanja u pogledu u_j , možemo da primjenjujemo i mjerimo odzive (u smislu udaljenosti od B), za više ulaznih dejstava, i tako stvarno vršimo identifikaciju. Neko znanje o identifikaciji je uvijek neophodno prije nego što se izvede upravljanje.

Pomenuli smo da je poznavanje diferencijalnih jednačina procesa jedna moguća identifikacija, ali ne i jedina. Na primjer, možemo da napravimo tabelu mogućih upravljanja i njihovih odgovarajućih odziva za koje smo zainteresovani _{t_0}

OSNOVNE DEFINICIJE I KLASIFIKACIJE

Iz te tabele možemo onda za naše svrhe odabrati najbolje upravljanje. Više drugih formulacija procesa mogu na sličan način dati modele identifikacije.

Ni jedna od razmatranih različitih tehnika identifikacije ne može se upotrebiti za identifikaciju sistema svih vrsta.

Svaka od prikazanih tehnika ima jedno ili više vlastitih područja primjenljivosti. Ovim se ne podrazumjeva da, prema sadašnjem stanju nauke, identifikaciju treba smatrati kao skup recepata za različite tipove sistema. Moguće je da se teorija identifikacije definiše kao nauka koja se bavi procjenjivanjem parametara iz ulaznih i izlaznih podataka, tj. Iz historije mjerenja, a procjena se poboljšava sa povećanjem broja mjerenja. Greške u procjeni dovode do grešaka u upravljanju ili u izlazu sistema. Zatim se te greške koriste da bi se popravile dalje procjene. Zbog toga je teorija identifikacije slična , ili je ustvari dual teoriji upravljanja, gdje se greške u upravljanju (predpostavljajući da je sistem već identifikovan) koriste za poboljšanje daljeg upravljanja. I ovdje, kao i u teoriji upravljanja, postoji više¹¹

OSNOVNE DEFINICIJE I KLASIFIKACIJE

postoji više prilaza u okviru iste teorije od kojih se svaki može primjeniti na određene situacije i slučajeve.

Teorija identifikacije, prema razmatranjima koja slijede, može se proširiti i na procjenjivanje parametara prediktora i filtera. Ovo proširenje proizlazi iz bliske veze između predskazivanja i identifikacije, što se objašnjava činjenicom da je svrha identifikacije da se omogući predskazivanje budućeg ponašanja identifikovanog sistema. Problem predskazivanja se razlikuje, međutim, od problema identifikacije u tome da se kod identifikacije uzimaju veze ulaz/izlaz za predskazivanje budućeg ponašanja, pod uslovom da su dati parametri sistema i njegovi ulazi. Predskazivanje vremenskog niza se zasniva na izmjerenoj historiji vremenskog niza, njegovi ulazi ili često nisu mjerljivi ili nisu uopšte poznati. Odatle se identifikacija parametara prediktora zasniva isključivo na prošlim mjerenjima poruke koja treba da se predkaže (koja se uzima kao izlaz sistema čiji ulaz nije mjerljiv), a ne mogu se upotrebiti podatci ulaz/izlaz.

OSNOVNE DEFINICIJE I KLASIFIKACIJE

Uopšteno govoreći postoji razlika između različitih situacija identifikacije koje traže različite obrade i to:

Prvo, razlikuju se linearni i nelinearni sistemi.

Linearni sistemi se mnogo lakše identifikuju zahvaljujući osobini superpozicije.

Drugo, postoji razlika između stacionarnih i nestacionarnih sistema.

Nestacionarni sistemi imaju parametre koji se menjaju sa vremenom. Sistemi se mogu smatrati stacionarnim ako se njihovi parametri menjaju vrlo sporo u poredjenju sa vremenom koje je potrebno za odgovarajuću identifikaciju.

Treće, često se uzima klasifikacija na diskretne i kontinualne sisteme, iako je transformacija iz kontinualne u diskretnu formulaciju prilično jednostavna.

Četvrto, postoji tehnika identifikacije sistema sa jednim ulazom i izlazom i sa više ulaza.

Tehnika identifikacije je znatno jednostavnija ako na stanje

OSNOVNE DEFINICIJE I KLASIFIKACIJE

sistema utiče samo jedan ulaz nego kada na stanje utiče kombinacija više istovremenih poremećaja ili ulaza.

Peta, klasifikacija uzima u obzir razliku u identifikaciji determinističkih i stohastičkih procesa. Kod stohastičkih procesa, postoji samo, ili uglavnom, probabilističko poznavanje tačnog stanja sistema. U praksi sva mjerenja sadrže šum, a za odgovarajuću identifikaciju je potrebno filtriranje ili usrednjavanje. Kod determinističkih postupaka identifikacije prepostavlja se da je ovo filtriranje već izvršeno.

Šesta, možda najvažnija ali i najteža za definisanje, je klasifikacija metoda identifikacije prema stepenu apriori znanja sa kojim raspolažemo u pogledu sistema. Klasifikacija nekog sistema kao linearnog podrazumjeva prethodno znanje, kao i kod klasifikacije sistema kao stacionarnog. Ove klasifikacije (linearnost, stacionarnost) mogu se naravno utvrditi iz analize podataka mjerenja, ukoliko nisu apriori zadate.

OSNOVNE DEFINICIJE I KLASIFIKACIJE

Poznavanje dimenzija vektora stanja je veoma važno kod svakog postupka identifikacije, a također i poznavanje prirode interakcija ili nelinearnosti.

Ove klasifikacije su, u određenom smislu, klasifikacije po stepenu poteškoće u identifikaciji. Očigledno, je da je identifikacija determinističkog, linearnog, stacionarnog, procesa, sa jednim ulazom i sa poznatim redom lakša od identifikacije stohastičkog procesa, za kojeg nam je nepoznat red i koji može da bude nelinearan i nestacionaran.

Sigurno je da su tehnike identifikacije koje predpostavljaju manje apriori znanja manje tačne i mnogo složenije u smislu matematičkih poteškoća, brzine konvergencije i vremena za računanje, nego tehnike sa više prethodnog znanja.

S druge strane, tehnike koje se mogu primjeniti za nelinearne ili nestacionarne procese su mnogo složenije od tehnika čija se primjena ograničava na linearne stacionarne

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

procesu. Sigurno je da postupci koji pretpostavljaju veoma malo apriori znanja u većem stepenu imaju opštu namjenu.

1. METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Najranije metode identifikacije sistema zasnivaju se na frekventnim, odskočnim (step) i impulsnim odzivima. Najveći dio ovih metoda primjenjuje se na linearne procese. One se također mogu primjeniti i na linearizovane oblike nelinearnih procesa, ukoliko su nivoi ulaznih signala dovoljno mali. Po definiciji, te metode zahtjevaju upotrebu posebnih ulaznih signala, tj. step ulaza za identifikaciju pomoću odziva na step (odskočnog odziva), impulsnog ulaza za identifikaciju pomoću impulsnog odziva i sinusoidalnih ulaza, koji imaju promjenjive učestanosti, za identifikaciju pomoću frekventnih odziva.

Pošto se umjesto normalnih ulaza koriste specijalni ulazi, očigledno je da ove tehnike predstavljaju tzv. "offline" identifikaciju. One se zbog toga mogu primjenjivati samo na

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

linearne stacionarne sisteme, gdje odnos ulaza i izlaza, koji je dobijen za jedan skup ulaza, vrijedi za sve ulaze.

Izmedju prethodna tri tipa ulaznih signala, najjednostavnija je primjena odziva na step, koja se ostvaruje trenutačnim otvaranjem ili zatvarenjem ulaznog ventila, ili trenutačnim uključenjem ili isključenjem ulaznog napona, dok je za sinusoidalni ulaz potrebna oprema za generiranje sinusoidalnog ulaza i za promjenu učestanosti tog ulaza u području koje je od interesa. Postupak sa impulsnim odzivom često stvara poteškoće u realizaciji zbog generiranja i pobudjivanja sistema impulsnim funkcijama. Medjutim ovaj postupak se može primjeniti i na linearizovane oblike nelinearnih sistema, jer je po definiciji amplituda impulsa vrlo velika.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Metode identifikacije pomoću Fourierove transformacije

Mi ćemo za identifikaciju primjenom off-line sinusoidalnog ulaza, step ili impulsnog ulaza upotrebljavati Fourierovu transformaciju.

Uzmimo neku aperiodičnu vremensku funkciju $x(t)$. Fourierova transformacija $X(j\omega)$ od $x(t)$ je data pomoću:

$$F[x(t)] \equiv X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.1)$$

Fourierova transformacija se može primjeniti na $x(t)$ ako je ona apsolutno integrabilna, to jest ako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (1.2)$$

Ovaj posljednji uslov isključuje primjenu Fourierove transformacije za analizu ulaznih funkcija kao što je sinusna funkcija ili step funkcija.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Ova poteškoća u primjeni Fourierove transformacije na sinusne ili step funkcije može se prevazići ako ie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

za neko , čak vrlo malo pozitivno s , tako da se umjesto $x(t)$ uzima $x(t)e^{-st}$, što daje Laplaceovu transformaciju :

$$X(s) = L[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-st} dt \quad ; \quad s \equiv \sigma + j\omega \quad (1.3)$$

Zbog toga se smatra da step odziv predstavlja vrlo lagano asimptotsko smanjivanje stepa, a za sinusoidalni ulaz se smatra da se vrlo lagano prigušuje.

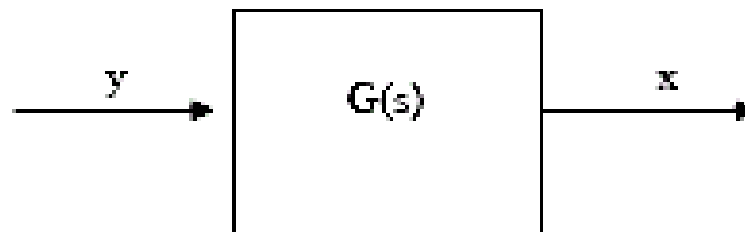
Sada izvodimo Fourierove i Laplaceove transformacije linearnih stacionarnih relacija ulaz/izlaz na slijedeći način:

Uzmimo linearni sistem $G(s)$, kao na narednoj slici , čiji se izlaz $x(t)$ za ulaz $y(t)$, daje pomoću slijedećeg konvolucionog integrala :

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

$$X(t) = \int_0^t y(\tau)g(t - \tau)d\tau; \quad g(t) = L^{-1}[G(s)] \quad (1.4)$$

$L^{-1} []$ je inverzna Laplaceova transformacija.



Slika br. 1.1

Jednačina (1.4) postaje u transformisanom Fourierovom obliku:

$$X(j\omega) = G(j\omega) Y(j\omega) \quad (1.5)$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Dok Laplaceova transformacija jednačine 1.4 zadovoljava:

$$X(s) = G(s)Y(s) \quad (1.6)$$

Gdje su $G(j\omega)$ i $G(s)$ funkcija sistema odnosno prenosna funkcija. Član $G(j\omega)$ jednačine 1.5 se može pisati kao $\alpha_\omega + j\beta_\omega = G(j\omega)$ i predstavlja kompleksno pojačanje sistema za ulaz sa frekvencijom ω . Dakle:

$$\sqrt{\alpha_\omega^2 + \beta_\omega^2} = |G(j\omega)|$$

predstavlja apsolutno pojačanje, a $\text{arc tg } \beta/\alpha$ predstavlja fazni pomak između izlaza i ulaza, gdje promjena $G(j\omega)$ u funkciji ω predstavlja frekventni odziv sistema.

Dobijanje $G(j\omega)$ pomoću Fourierove transformacije kod upotrebe step ili impulsnog odziva je prilično jednostavno, jer je

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Fourierova transformacija impulsnog odziva jednaka $G(j\omega)$, dok se Fourierova transformacija step odziva može dati sa $G(j\omega)/j\omega$, uzimajući u obzir napomene iz jednačine (1.2).

Zbog toga, ako se primjenjuje numerička Fourierova transformacija, na step ili impulsni odziv, $G(j\omega)$ se može lako numerički odrediti. Osim toga , pri razmatranju jednačine 1.5 , primjećujemo da se $G(j\omega)$ može dobiti numerički, ako se numerička Fourierova transformacija primjeni na bilo koji konvergentni ulaz i i na odgovarajući izlaz o i to na slijedeći način:

$$G(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} = \frac{\text{izlaz}(j\omega)}{\text{ulaz}(j\omega)} \quad (1.7)$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Medjutim, ovaj postupak zahtjeva numeričku transformaciju kako ulaza tako i izlaza, i dijeljenje dvije dobijene kompleksne veličine $X(j\omega)$ i $Y(j\omega)$ za veliki broj različitih frekvencija. Zbog toga je ovaj postupak prilično dug, čak i ako se upotrijebi i brza Fourierova transformacija (FFT). Izuzetak su slučajevi step i impulsnih ulaza koji su već spomenuti, i slučajevi ulaznih šumova.

Očigledno je da ulazi koji se uzimaju u obzir za identifikaciju pomoću FFT trebaju da sadrže sve frekvencije koje su interesantne za sistem. Ako se step ulaz realizuje pomoću eksponencijalno rastuće funkcije, koja ima oblik vremenske funkcije

$$1 - e^{-t/T}$$

tada najveća frekvencija koja se može adekvatno identifikovati pomoću Fourierove transformacije je reda $\omega = 2\pi/T$.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Numerička Fourierova transformacija

Numerička Fourierova transformacija traži aproksimaciju integrala iz jednačine 1.1 pomoću konačne sume , i to:

$$X(n) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi(nk/N)} \quad (1.8)$$

gdje su :

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

$$X(n) \equiv X(jn\Delta\omega) ; n= 0,1,2,\dots$$

$$t_k \equiv k\Delta t ; k = 0,1,2,\dots,(N-1)$$

$$\Delta t \equiv T/N$$

$$\Omega = 2\pi f = 2\pi n/T ; \Delta\omega = 2\pi/T$$

$$\omega t = \frac{2\pi nk\Delta t}{T} = \frac{2\pi nk}{N}$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Očigledno je da su u bilo kojoj diskretnoj aproksimaciji granice sume u jednačini (1.8) konačne. Tačnost će biti zadovoljavajuća ako su granice N sume, koja označava vremenski raspon kojeg treba razmatrati, približava beskonačnosti. Zbog toga, vremenski interval T , za slučaj step ili impusnog ulaza, mora biti veći od vremena odziva. Ovdje se pod vremenom odziva podrazumjeva vrijeme poslije kojeg se mjerenjem raspoloživim instrumentom ne primjećuje da ima promjena izlaza. Vremenski interval uzimanja uzoraka Δt je naravno vezan na najveću frekvenciju koja se može uzeti u dobijenom frekventnom odzivu, pošto frekvencija preko $1/2\Delta t$ Hz nema nikakvog smisla. U praksi je najbolje da se upotrebi FFT za računanje Fourierovih transformacija i njihovih inverzija.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

U praksi je najbolje da se upotrebi FFT za računanje Fourierovih transformacija i njihovih inverzija. Računanje je brže za faktor $N/\log_2 N$, nego kada se neposredno računa jednačina (1.8).

Kao rezultat toga, dolazi do reduciranja greške zaokruživanja, jer je broj računarskih operacija manji.

FFT se zasniva na matričnoj formulaciji jednačine (1.6) na slijedeći način:

$$\mathbf{F} = \mathbf{W} \mathbf{X} \quad (1.9)$$

gdje su:

$$\mathbf{F} = [X(0), \dots X(n)]^T \quad (1.10)$$

$$\mathbf{X} = [x(0), \dots x(n)]^T \quad (1.11)$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

$$\mathbf{W} = \begin{matrix} W_0 & W_0 & \dots & W_0 \\ W_0 & W_1 & \dots & W_{s-1} \\ \\ W_0 & W_{N-1} & & W_{(N-1)(N-1)} \end{matrix} \quad (1.12)$$

gdje je W_μ dato pomoću :

$$W_\mu = e^{-j2\pi\mu/N}$$

a μ označava proizvod nk iz jednačine (1.8). Brzo računanje FFT je posljedica izvjesnih simetričnih osobina W i jednačine (1.9) . To dovodi do značajnog smanjenja broja potrebnih aritmetičkih operacija.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Identifikacija pomoću odskočnog odziva

Najjednostavniji ulaz koji se može primjeniti za identifikaciju je step (odskočna) funkcija. Primjena step ulaza na neki proces može se provesti na primjer pomoću trenutnog otvaranja ili zatvaranja nekog ulaznog ventila, trenutnog uključivanja ili isključivanja ulaznog napona ili struje, itd. .. što je gotovo uvijek moguće izvesti u praksi bez posebnih instrumenata. Idealni step podrazumjeva konačno povećanje vrijednosti ulaza, čije je trajanje skoka jednako nuli, što je praktično nemoguće ostvariti jer podrazumjeva beskonačnu početnu brzinu. Zbog toga su svi praktični step ulazi samo aproksimacija idealnog stepa. Medjutim, ako početno vrijeme porasta ima trajanje koje je mnogo kraće od perioda najveće frekvencije interesantne za identifikaciju, dobijena greška u identifikaciji je zanemarljiva.²⁸

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Kod procesa sa šumom, ili gdje je šum sadržan u mjerenjima (što je često slučaj), neophodno je odgovarajuće filtriranje šuma.

Kako je već rečeno, identifikacija pomoću odziva na step je “off-line” tehnika, pa se može primjeniti samo na stacionarne procese. Medjutim, pošto se step poremećaji primjenjuju na mnoge (ako ne i na većinu) procesa u toku normalnog rada ili na startu, step odzivi se mogu registrovati bez remećenja normalnog rada, što povećava privlačnost ove tehnike. Očigledno je da rezultati identifikacije i u ovom slučaju predpostavljaju stacionarnost procesa, jer se takodjer predpostavlja da identifikacija vrijedi i nakon primjene stepa. Rezultati metode nadalje predpostavljaju linearnost unutar amplitude skoka.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Analiza odziva na step

Vremenska veza izmedju ulaza, karakteristika procesa i izlaza sadrži konvoluciju kao i u jednačini (1.4). Medjutim, kod Laplaceove transformacije, navedena veza jedino sadrži množenje, kako se to vidi iz jednačine (1.6). Dakle, Laplaceova transformacija se može upotrebiti na slijedeći način:

Razmotrimo sistem čija je prenosna funkcija Laplaceova transformacija $G(s)$, gdje:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} \quad (1. 13)$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

s - predstavlja promjenjivu Laplaceove transformacije, a X , Y označavaju izlaz odnosno ulaz sistema.

Laplaceova transformacija step funkcije koja počinje u $t = 0$, je:

$$L[\text{jedinični step u } t=0] = \frac{1}{s} \quad (1.14)$$

Dakle, step odziv $X(s)$ bilo kojeg linearnog sistema $G(s)$ postaje:

$$X(s) = \frac{G(s)}{s} \quad (1.15)$$

koji , prema teoriji Laplaceove transformacije predstavlja Laplaceovu transformaciju vremenskog integrala :

$$\int g(t) dt$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

gdje $g(t)$ označava inverznu Laplaceovu prenosne funkcije $G(s)$ na slijedeći način:

$$g(t) = L^{-1} [G(s)] \quad (1.16)$$

$$sX(s) = G(s)$$

$$L^{-1} [sX(s)] = \frac{dx(t)}{dt} = g(t) \quad (1.17)$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Fourierova transformacija step odziva

Rezultati jednačina (1.14) ili (1.17) mogu se neposredno primjeniti za identifikaciju pomoću step odziva. Napomenimo da je identifikacija potrebna za svrhe upravljanja ona koja pruža dovoljnu informaciju, omogućavajući odgovarajuće predviđanje stanja sistema u nekom budućem vremenu ($t + \tau$), uz pretpostavku da su poznati sadašnje stanje i ulaz. Odavde, uz poznavanje potrebnog stanja u $t + \tau$ možemo proračunati iz prethodne identifikacione informacije potrebno upravljanje, da bi dostigli potrebno buduće stanje. Osim toga, da bi identifikacija bila efikasna, tražimo da τ bude tako da u $t + \tau$ možemo ponovo ažurirati identifikaciju i proračunati novo upravljanje za odgovarajuću performansu u drugom intervalu unaprijed. Očigledno je da bi bila najbolja identifikacija, ona koja bi olakšala tačno predskazivanje za bilo koje vrijeme prednjačenja τ ($@ t \rightarrow \infty$), ali je to praktično nemoguće.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Kod stacionarnih procesa poznavanje prenosne funkcije $G(s)$ ili matrice prelaza i upravljanja A, B , teoretski olakšava identifikaciju do nekog vremena prednjačenja.

Razmatrajući jednačine (1.14) i (1.17) primjećujemo da se iz $x(t)$ ili $dx(t)/dt$ može dobiti prenosna funkcija $G(s)$ ako se primjeni Fourierova transformacija (odnosno FFT) na $x(t)$ ili $dx(t)/dt$.

Kada se iz $dx(t)/dt$ dobije $F[g(t)] = G(j\omega)$, gdje je F operator Fourierove transformacije, možemo napraviti grafik $G(j\omega)$ u funkciji od ω . Napomenimo da je $G(j\omega)$ kompleksna pa se moraju razmatrati i modul i argument. Iz ponašanja $G(j\omega)$ možemo potpuno na isti način kako je već poznato iz identifikacije pomoću frekventnog odziva dobiti $G(s)$, a zatim možemo odrediti model u prostoru stanja sistema.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Primjetimo da se Fourierova transformacija može primjeniti kako na $dx(t)/dt$ što daje $G(j\omega)$ ili na $x(t)$ što daje $X(j\omega)$, iz čega se može zatim odrediti $G(j\omega)$. Osim toga Fourierova transformacija je teoretski ograničena na apsolutno integrabilne vremenske funkcije, tj. na konvergentne vremenske funkcije, kako je to već ranije bilo razmatrano.

Slijedeći primjer pruža dalji uvid u upotrebu Fourierove transformacije kod identifikacije pomoću step odziva.

Primjer:

Razmotrimo sistem $G(s)$, gdje je :

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Jedinični odziv $X(s)$ od $G(s)$ daje se sa:

$$X(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)}$$

I poznata inverzna Laplaceova transformacija posljednjeg izraza daje :

$$x(t) = L^{-1} [X(s)] = 1 - e^{-t/T}$$

Da bi odredili prenosnu funkciju sistema $G(s)$ možemo pisati :

$$sX(s) = \frac{1}{Ts + 1} = G(s)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Pošto je $e^{-t/T}$ konvergentno, na njega se može primjeniti Fourierova transformacija, na slijedeći način:

$$F[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt = G(j\omega)$$

Napomenimo da je $g(t)$ u stvari jednako 0 za $t \leq 0$ a jednako $\frac{1}{T}e^{-t/T}$ za $t > 0$. Zbog toga se integral u posljednjoj Fourierovoj transformaciji može ponovo pisati kao :

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^0 0e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} \frac{1}{T}e^{-t/T} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} e^{-(j\omega T + 1)t/T} dt = -\frac{1}{j\omega T + 1} e^{-(j\omega T + 1)t/T} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

što daje za $j\omega = s$

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

što je i traženo.

Ako se problemu iz gornjeg primjera pristupi preko transformacije $x(t)$ umjesto $dx(t)/dt$, izvodimo:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^0 0 e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} (1 - e^{-t/T}) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(j\omega T + 1)t/T} dt =$$

$$\left. \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right|_0^{\infty} + \left. \frac{T}{j\omega T + 1} e^{-(j\omega T + 1)t/T} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{j\omega} - \frac{T}{j\omega T + 1} = \frac{j\omega T + 1 - j\omega T}{j\omega(j\omega T + 1)} = \frac{1}{j\omega(j\omega T + 1)}$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Medjutim Fourierova transformacija step funkcije je približno jednaka $1/j\omega$. Ako se ovaj skok aproksimira sa $e^{-\sigma t}$ za svako $t > 0$, gdje je σ realna pozitivna vrijednost koja je vrlo bliska 0, izvešćemo:

$$F [\text{jedinični step}] \equiv \int_{-\infty}^0 0 e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \frac{1}{\sigma + j\omega} e^{-(\sigma+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma + j\omega} = \frac{1}{j\omega} \quad \text{za svako malo pozitivno } \sigma \quad (1.18)$$

Koristeći se teoremom o transformisanju konvolucije , dobijamo:

$$X(j\omega) = G(j\omega) Y(j\omega)$$

$$G(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)}$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Gdje $X(j\omega)$ i $Y(j\omega)$ predstavljaju izlaz odnosno ulaz,
Uzimajući u obzir da je

$$Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

dobijamo:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega(j\omega T + 1)} = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

što se slaže sa rezultatom koji se dobio u prethodnom primjeru.

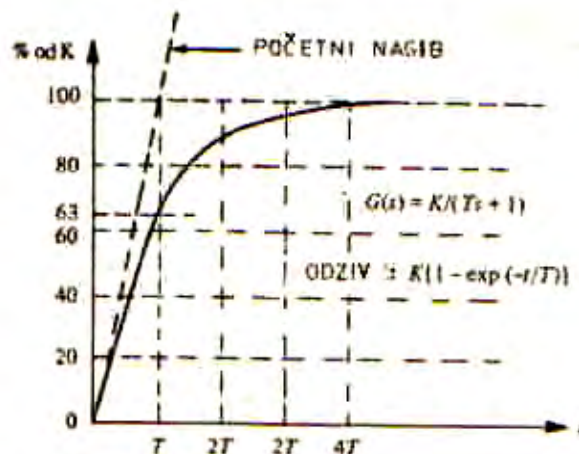
METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Grafička identifikacija parametara iz odziva na step

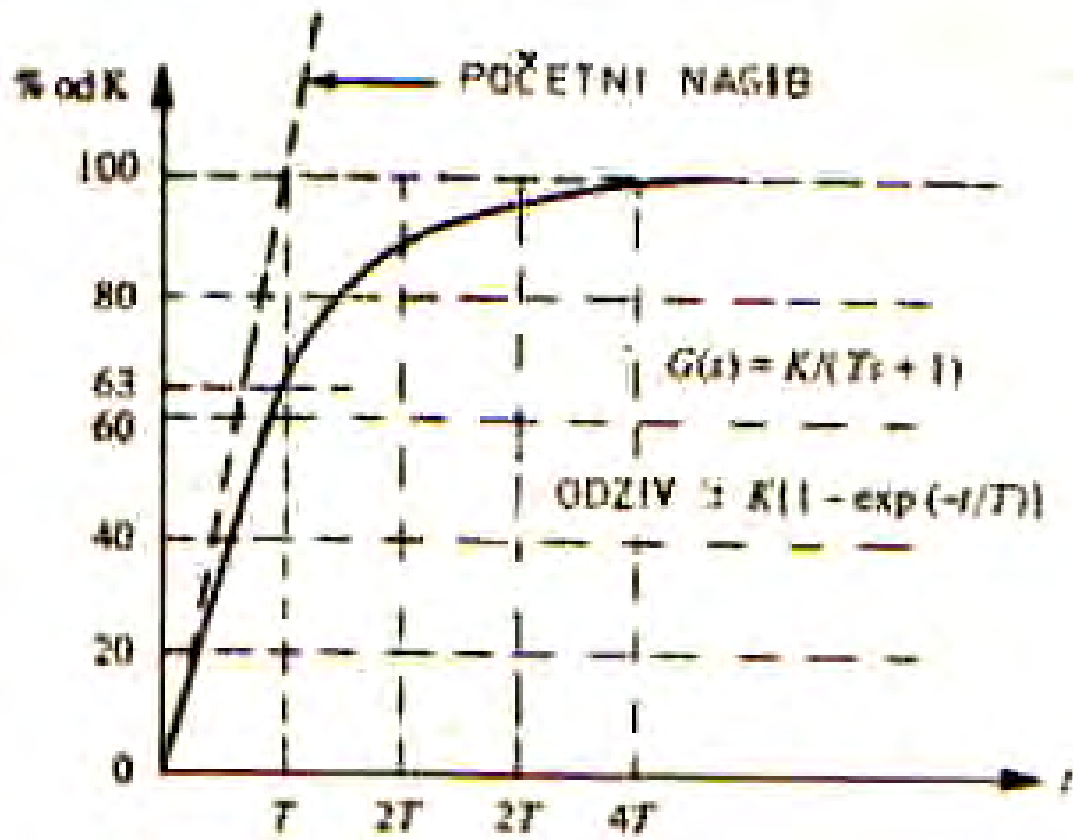
Često je moguće da se prenosna funkcija sistema izvede iz zapisa njenog odziva na step. Ova mogućnost je razmotrena za najčešće tipove linearnih sistema, to jest za sisteme prvog i drugog reda i za aperiodske sisteme visokog reda.

Sistemi prvog reda

Osnova grafičke tehnike step odziva zasniva se na procesima prvog reda , kao na narednoj slici:



METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE



METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Step odziv sistema prvog reda daje se pomoću:

$$x(t) = K(1 - e^{-t/T}) \quad (1.19)$$

ili u obliku Laplaceove transformacije :

$$X(s) = L[x(t)] = G(s)Y(s) = G(s)/s = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad (1.20)$$

gdje:

$$G(s) = \frac{K}{(Ts + 1)} \quad (1.20a)$$

je prenosna funkcija sistema prvog reda , a

$$Y(s) = 1/s = L [\text{jedinični step}] \quad (1.21)$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

je jedinični ulaz. Primjetimo da za $t = T$, $x(t)$ će biti :

$$x(t) = K(1 - e^{-1}) = K(1 - 0.37) = 0.63 K \quad (1.22)$$

Dakle konstantan parametar T sistema prvog reda je vrijeme u kojem step odziv postiže 63% vrijednosti njegovog stacionarnog stanja. Pojačanje K očigledno je (u odgovarajućim jedinicama) odnos između vrijednosti stacionarnog stanja izlaza i amplitude stepa.

Vremenska konstanta T može se i drugačije odrediti kada se produži početni nagib (tangenta u $t=0$) step odziva, dok se ne dostigne vrijednost amplitude stacionarnog stanja kao na prethodnoj slici. Razmak na vremenskoj osi između početka i tačke presjeka je T , jer se nagib x u $t=0$ daje sa:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \frac{K}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = \frac{K}{T} \quad (1.23)$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Ponašanje linije nagiba u funkciji vremena, zbog toga, slijedi relaciju:

$$\text{početni nagib} \equiv \phi(t) = \frac{Kt}{T} \quad (1.24)$$

koja dostiže vrijednost K za $t=T$.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Čisto vremensko kašnjenje

Ako neki step odziv kasni za vrijeme T tako da je jednak nuli dok ne protekne vrijeme τ od primjene skoka, kao na narednoj slici, mi ćemo pretpostaviti da sistem sadrži član čistog kašnjenja čija je prenosna funkcija $e^{-\tau s}$. Zbog toga, ako se jedinični odziv sistema daje kao:

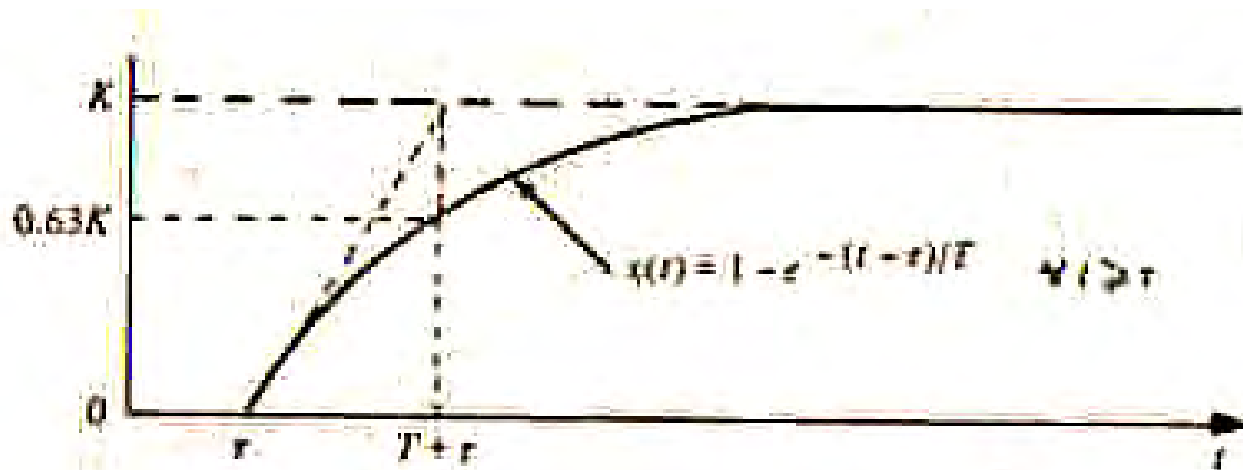
$$x(t) = \begin{cases} K(1 - e^{-(t-\tau)/T} : \forall t > \tau \\ 0 : \forall t \leq \tau \end{cases} \quad (1.25)$$

njegova prenosna funkcija postaje :

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts + 1} \quad (1.27)$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

kao rezultat primjene Laplaceove transformacije na jednačinu (1.25)



Slika br. 1.3 Odziv sistema sa čistim kašnjenjem i aperiodskim blokom prvog reda na jedinični step ulaz

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Aperiodski sistem drugog reda

Razmotrimo sistem $G(s)$, gdje je :

$$G(s) = \frac{1.25}{(s + 2.5)(s + 0.5)}$$

i čiji je step odziv u vremenskom domenu dat sa :

$$x(t) = 1 - 1.25 e^{-0.5t} + 0.25 e^{-2.5t}$$

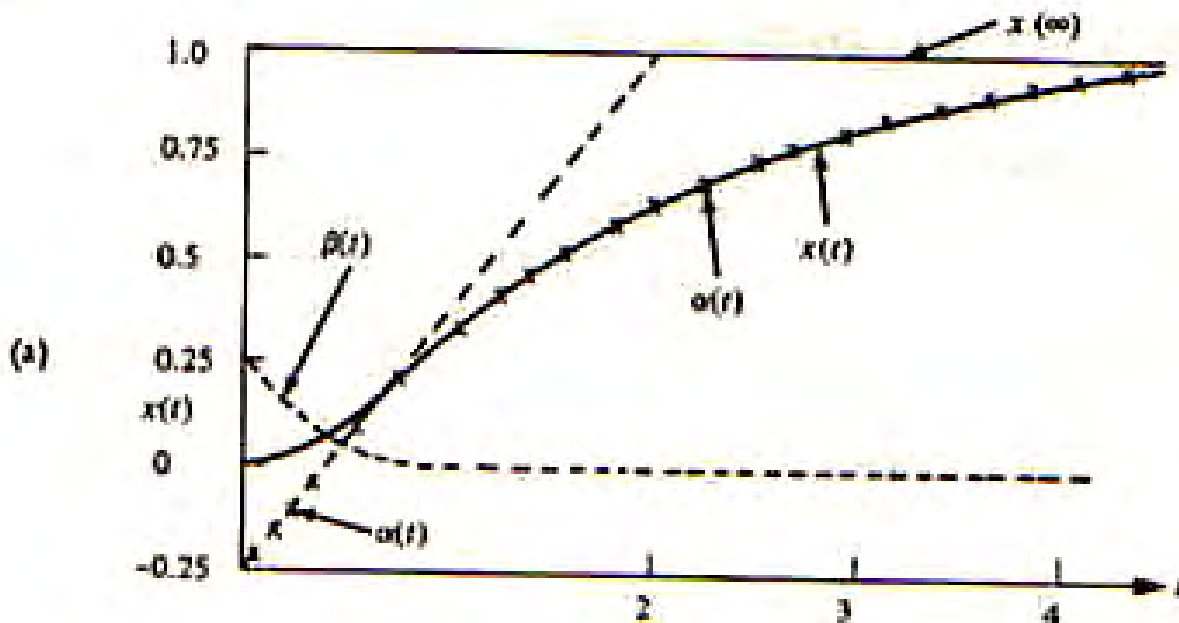
kako je to grafički prikazano na narednoj slici 1.4a.
Funkcija $x(\infty) - x(t)$ nanosi se zatim kao na slici 1.4b.
Primjećujemo da je :

$$x(\infty) - x(t) = 1 - x(t) = 1.25 e^{-0.5t} + 0.25 e^{-2.5t}$$

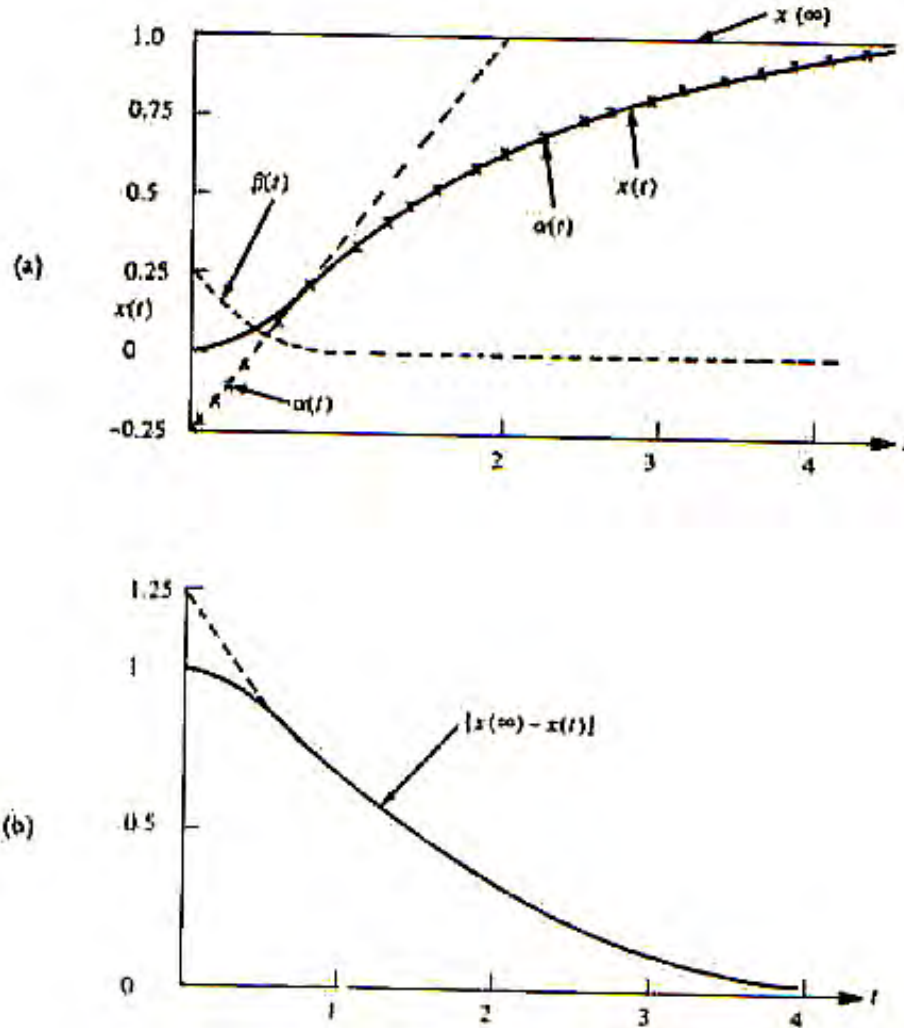
METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Kada je t veliko, član $e^{-2.5t} \rightarrow 0$, član $x(\infty) - x(t)$ se aproksimira sa $1.25 e^{-0.5t}$ kao na slici 1.4a, a nagib $\log_{10} [x(\infty) - x(t)]$ se približno određuje sa (vidjeti sliku 1.4),

$$\frac{d[\log_{10}(1.25e^{-0.5t})]}{dt} = \frac{d[\log_{10}(1.25 - 0.5t \log_{10} e)]}{dt} = -0.5 \log_{10} e = -0.21$$

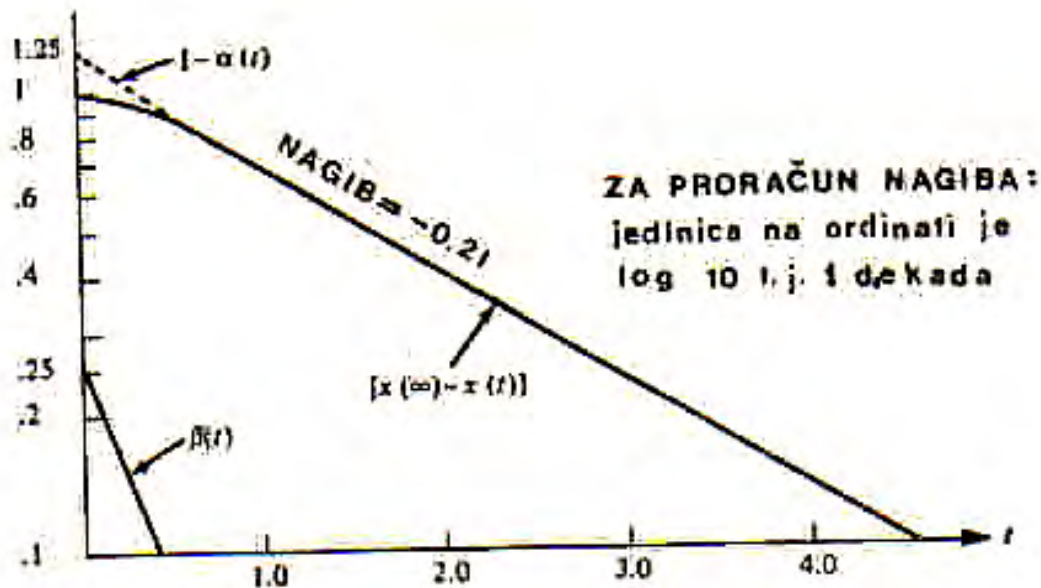


METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE



Slika 1.4 Odziv na step aperiodskog bloka drugog reda ⁵⁰

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE



Slika 1.5 Logaritamska skala step odziva aperiodskog bloka drugog reda

Iz gornjeg razmatranja slijedi da je aproksimacija $x(t)$, za veliko t , jednaka : $\alpha(t) = (1 - 1.25e^{-0.5t})$

, dok je za malo t , potreban i drugi član $\beta(t)$, koji za $t=0$ će biti $\beta(0)=0.25$. Ovaj drugi član ima oblik :

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

$$\beta(t) \equiv 0.25e^{-rt}.$$

Vraćajući se na sliku 1.4a, nanosimo $\alpha(t) = (1 - 1.25e^{-0.5t})$, obilježavajući $\alpha(0) = -0.25$. Iz $\alpha(0)$ nastavljamo početni nagib $\frac{d\alpha(0)}{dt} = 0.625$ i blago se spojimo sa krivom $x(t)$. Razlika između $x(t)$ i $\alpha(t)$ sada približno daje $\beta(t)$, koja se također nanosi u grafik na slici 1.4a, a $\log \beta(t)$ zatim nanosimo na skalu 1.5.

Nagib $\log \beta(t)$ u slici 1.5 određuje se pomoću:

$$\frac{d \log \beta(t)}{dt} = \frac{d \log 0.25e^{-rt}}{dt} = \frac{d \log 0.25 - rt \log e}{dt} = r \log e = -0.42r$$

iz čega se može odrediti da je $r = 2.5$. Dosljedno tome, $x(t)$ aproksimiramo sa :

$$1 - 1.25e^{-0.5t} + 0.25e^{-rt}$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

i $G(s)$ postaje:

$$G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+r)} = \frac{K}{(s+0.5)(s+r)}$$

K se određuje tako da se zadovolji vrijednost stacionarnog stanja odziva $x(t)$, gdje je:

$$X(s) G(s)/s = \text{odziv na step} \quad (1.28)$$

i pomoću teoreme o konačnoj vrijednosti:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{s} = \frac{K}{ar} \quad (1.29)$$

Pošto je iz mjerenja, $x(0)=1$, dobijamo da je $K=0.5r$, gdje je r već ranije određeno.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

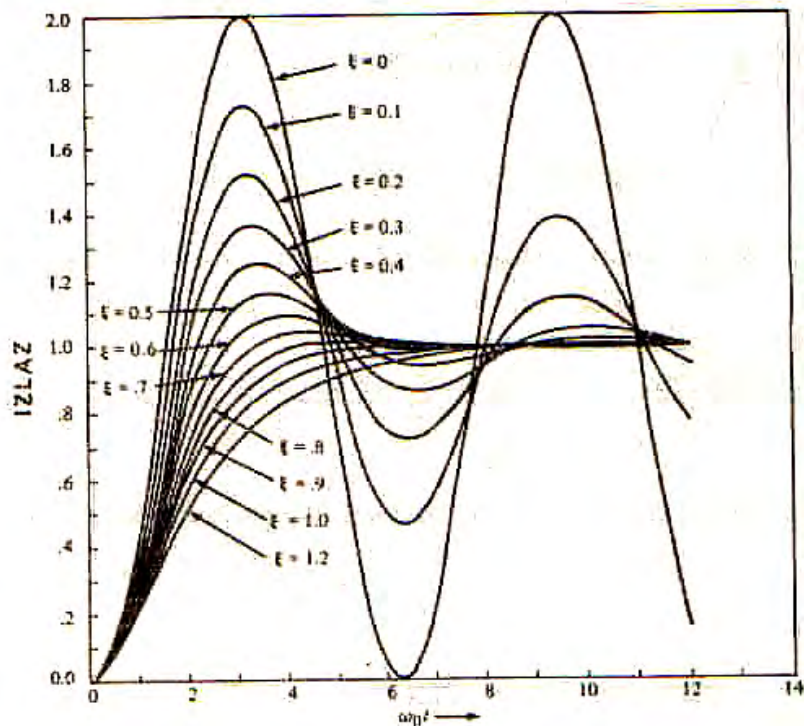
Periodični sistemi drugog reda

Periodični sistem drugog reda se uvijek može opisati sa :

$$G(s) = \frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\xi s / \omega_0 + 1} = \frac{K}{(Ts)^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (1.30)$$

gdje je $0 < \xi < 1$ i $T = 1/\omega_0$. Zbog toga je za identifikovanje periodičnih sistema drugog reda potrebno da se odrede samo ω_0 , ξ i K , gdje K predstavlja odnos izlaza i ulaza u stacionarnom stanju. Koeficijent prigušenja ξ neposredno je vezan za preskok koji je uvijek prisutan kod oscilatornih sistema drugog reda, kako se to vidi iz naredne slike 1.6.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE



Slika 1.6 Odziv na step periodičnog sistema drugog reda
Na slici 1.7 data je relacija između ξ i preskoka (kao
procenat od vrijednosti stacionarnog stanja step odziva).
Kada se ξ grafički odredi prema slici 1.7, prirodna
učestanost ω_0 se može odrediti na slijedeći način :

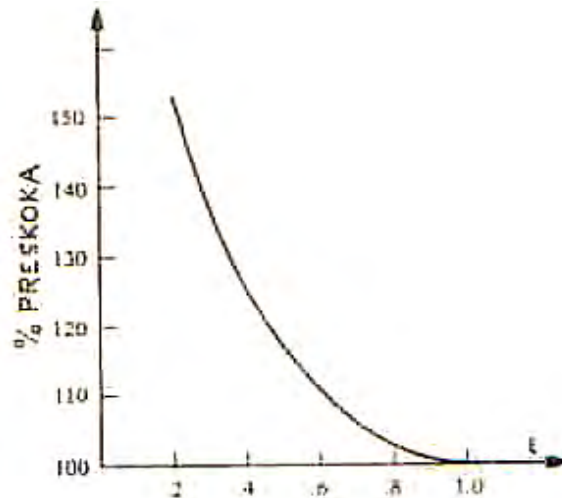
METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (1.31)$$

gdje je:

$$\omega = \frac{2\pi}{\theta} \quad (1.32)$$

a ν period prigušenih oscilacija u odzivu na step (vidjeti sliku 1.6).



Slika 1.7 Preskok u funkciji prigušenja

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Aperiodični sistemi visokog reda

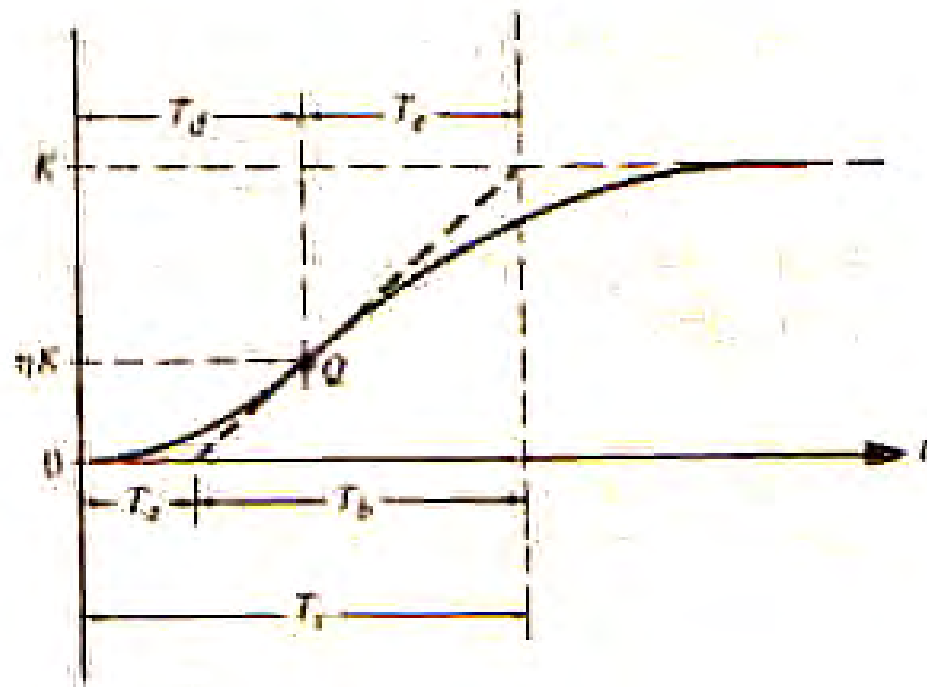
Strejc je dao jednu prostu grafičku tehniku identifikacije za aperiodske sisteme višeg reda. Strejcova metoda se zasniva na označavanju , kao na narednoj slici 1.8, gdje se ilustruje uopšteni aperiodični odziv na jedinični step aperiodskog bloka visokog reda.

Prema Strejcu se neki aperiodični sistem sa n različitih vremenskih konstanti može odgovarajuće aproksimirati pomoću prenosne funkcije koja ima n identičnih vremenskih konstanti:

$$G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)\dots(T_ns + 1)} \cong \frac{K}{(\tau s + 1)^n} \quad (1.33)$$

gdje K predstavlja pojačanje stacionarnog stanja.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE



Slika 1.8 Step odziv aperiodskog procesa visokog reda

Problem identifikacije se na ovaj način ograničava na identifikovanje τ i n . Za tu namjenu, Strejc je dao odnose n i T_a/T_b .. T_a/T_e prikazane na narednoj tabeli T1.1.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Tačka infleksije Q na slici 1.8 koja je potrebna da se odredi $T_a \dots T_e$ je tamo gdje je d^2x/dt^2 jednako nuli. Kada se iz T_a/T_b dobije n (i verificira pomoću T_e/T_b), tada se τ iz jednačine (1.33) može odrediti iz T_a/τ (i verificirati pomoću T_b/τ : T_d/τ : T_e/τ) prema narednoj tabeli T1.2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_a/T_b	0	0.104	0.218	0.319	0.410	0.493	0.570	0.642	0.709	0.773
T_e/T_b	1	0.736	0.677	0.647	0.629	0.616	0.606	0.599	0.593	0.587
η	0	0.264	0.323	0.353	0.371	0.384	0.394	0.401	0.407	0.413

Tabela T 1.1

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T_{n/\tau}$	0	0.282	0.805	1.425	2.1	2.811	3.549	4.307	5.081	5.869
$T_{n/\tau}$	1	2.718	3.695	4.463	5.119	5.699	6.226	6.711	7.164	7.59
$T_{n/\tau}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T_{n/\tau}$	1	2	2.5	2.888	3.219	3.51	3.775	4.018	4.245	4.458

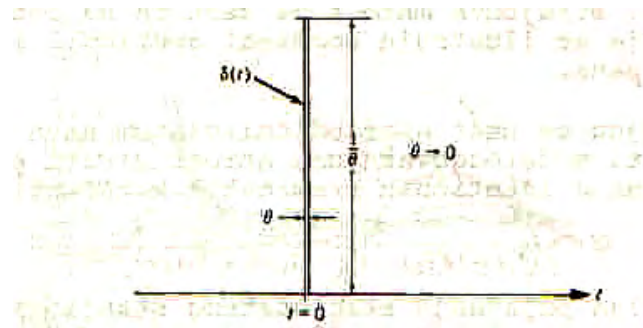
Tabela T 1.2

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Identifikacija pomoću impulsnog odziva

Identifikacija linearnog procesa pomoću njihovih odziva na impuls se realizuje na sličan način kao i identifikacija pomoću odziva na step. Identifikacija pomoću impulsnog odziva zahtjeva primjenu impulsnog ulaza (delta funkcije) na sistem koji se treba identificirati, pa je zbog toga i to tehnika " off-line" identifikacije. Po definiciji delta funkcija je impuls sa širinom koja je jednaka nuli (vidjeti narednu sliku 1.9) i zbog toga sa beskonačnom amplitudom. Očigledno je da se delta funkcija ne može realizovati zbog beskonačne amplitude. Medjutim, ona se može aproksimirati pomoću impulsa konačne širine $\vartheta \rightarrow 0$, i sa jediničnom površinom, što daje amplitudu $1/\vartheta \rightarrow \infty$. Ovo daje netačnosti u dobijenom odzivu, kako je prikazano na slici 1.10.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE



Slika 1.9 Impulsna funkcija



Slika 1.10 Odziv na idealni i približni impuls

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Analiza impulsnog odziva

Razmotrimo sistem $G(s)$, kao na slici 1.1, gdje:

$$X(s) = G(s) Y(s) \quad (1.34)$$

x i y su izlaz i ulaz u sistem , a ulaz y je jedinični impuls čija je Laplaceova transformacija data sa :

$$Y(s) = L[\delta(t)] = 1 \quad (1.35)$$

Prema tome , Laplaceova transformacija izlaza postaje:

$$X(s) = G(s) L[\delta(t)] = G(s) 1 = G(s) \quad (1.36)$$

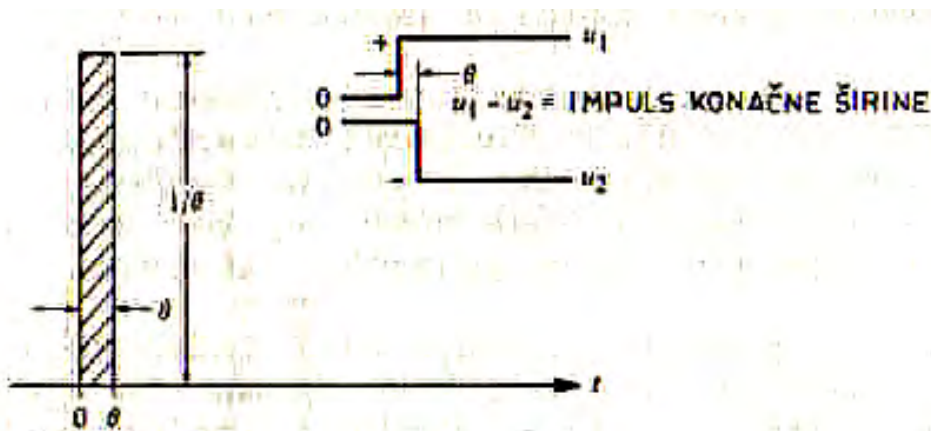
i

$$x(t) = L^{-1} [X(s)] = L^{-1} [G(s)] = g(t) \quad (1.37)$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Jednačine (1.36) i (1.37) podrazumjevaju da je impulsni odziv linearnog sistema identičan inverznoj Laplaceovoj transformaciji njegove prenosne funkcije $G(s)$. Posljednji rezultat je očigledno od velike važnosti za identifikaciju.

Ako je međutim ulaz $y(t)$ u odnosu na proces neki impuls konačne širine, čija je širina ϑ dovoljno mala, možemo ovaj impuls opisati kao sumu pozitivnog stepa u $t=0$ i negativnog stepa u $t=\vartheta$, kako se to vidi na narednoj slici 1.11, što daje :



Slika 1.11 Impuls konačne širine

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

$$L [y(t)] = Y(s) = \frac{1 - e^{-s\vartheta}}{s} \quad (1.38)$$

gdje je $1/s$ Laplaceova transformacija step odziva u $t=0$ a $e^{-s\vartheta}/s$ predstavlja negativan step u $t=\vartheta$.

Upotrebljavajući Taylor-ov razvoj redova, jednačina (1.38) postaje

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left(1 - s\vartheta + \frac{s^2\vartheta^2}{2!} - \frac{s^3\vartheta^3}{3!} + \dots \right) \quad (1.39)$$

što za $\vartheta \rightarrow 0$ daje :

$$Y(s) \equiv \frac{1}{s} - \frac{1}{s} (1 - s\vartheta) = \vartheta \quad (1.40)$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Ako je amplituda impulsa $1/\vartheta$, tada jednačina (1.40) postaje

$$Y(s) = \frac{1}{\vartheta} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} (1 - s\vartheta) \right] = 1 \quad (1.41)$$

kao i u slučaju prave δ funkcije.

Pri poredjenju prethodne impulsne funkcije i odskočne funkcije, opažamo da je δ funkcija ustvari izvod po vremenu neke idealne funkcije odziva na step, (gdje je ovaj izvod beskonačan za vrijeme porasta, a jednak 0 za svako drugo vrijeme). U domenu Laplaceove transformacije ponovo opažamo ovu povezanost (imajući na umu da promjenljiva Laplaceove transformacije s predstavlja d/dt) i to:

$$s L[\text{step}] = s \cdot 1/s = 1 \quad (1.42)$$

Dosljedno tome, ako je $x(t)$ predstavlja odziv na step sistema, dobijamo da se dx/dt daje sa:

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

$$s X(s) = s \frac{G(s)}{s} = G(s) \quad (1.43)$$

gdje je $G(s)/s$ odziv na step kao u jednačini (1.15). Upoređujući jednačine (1.36) i (1.43) opažamo da je izvod po vremenu step odziva identičan odzivu na impuls. Sa druge strane, integral impulsnog odziva jednak je $1/s G(s)$ i identičan je odzivu na step. Time zaključujemo da se tehnika identifikacije pomoću impulsnog odziva može primjeniti na odziv na step, ako se odziv na step diferencira. Osim toga, tehnika identifikacije pomoću step odziva je primjenljiva na impusne odzive ako se razmatra ponašanje integrala po vremenu od impusnog odziva.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Fourierova transformacija impulsnog odziva

Kao i u slučaju identifikacije pomoću step funkcije, uz primjenu Fourierove transformacije na impulsni odziv $g(t)$, može se odrediti prenosna funkcija $G(s)$. Kada se odredi prenosna funkcija $G(s)$, može se dobiti formulacija diferencijalne jednačine sistema.

Pošto je impulsna funkcija $\delta(t)$ integrabilna ($\int_{-\infty}^{\infty} |\delta(t)| dt = 1 < \infty$) teorijski je moguća Fourierova transformacija njenog konvergentnog odziva. Fourierova transformacija $\delta(t)$ daje se pomoću:

$$\begin{aligned} F[\delta(t)] = Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{\theta} \frac{1}{\theta} e^{-j\omega t} dt + \int_{\theta}^{\infty} 0 dt \right] \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[0 + \int_0^{\theta} \frac{1}{\theta} e^{-j\omega t} dt + 0 \right] = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{j\omega \theta} \left[1 - j\omega \theta + \frac{(j\omega \theta)^2}{2!} + \dots \right] = 1 \quad (1.44) \end{aligned}$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Imajući na umu jednačinu (1.44) Fourierova transformacija impusnog odziva $x(t)$ daje se pomoću:

$$X(j\omega) = G(j\omega)Y(j\omega) = G(j\omega)1 \quad (1.45)$$

Prema tome, ako se nanese $X(j\omega)$ u funkciji od ω , dobiće se frekventni odziv $G(j\omega)$ sistema. Sada se $G(s)$ može odrediti iz $G(j\omega)$ pomoću potpuno iste analize frekventnog odziva koristeći tehniku Bodeovog dijagrama.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Grafička identifikacija iz impulsnih odziva

Neposredna identifikacija iz ponašanja impulsnog odziva po vremenu može se vršiti u potpunoj analogiji sa identifikacijom iz ponašanja jediničnog odziva na step po vremenu, kako je to ranije opisano. Za tu svrhu može se integrirati impulsni odziv da bi se odredilo ponašanje jediničnog odziva po vremenu.

Procesi prvog reda

Proces prvog reda se u opštem obliku daje pomoću slijedeće prenosne funkcije:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (1.46)$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Prema tome, njegov impulsni odziv je :

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = \frac{K}{T} e^{-t/T} \quad (1.47)$$

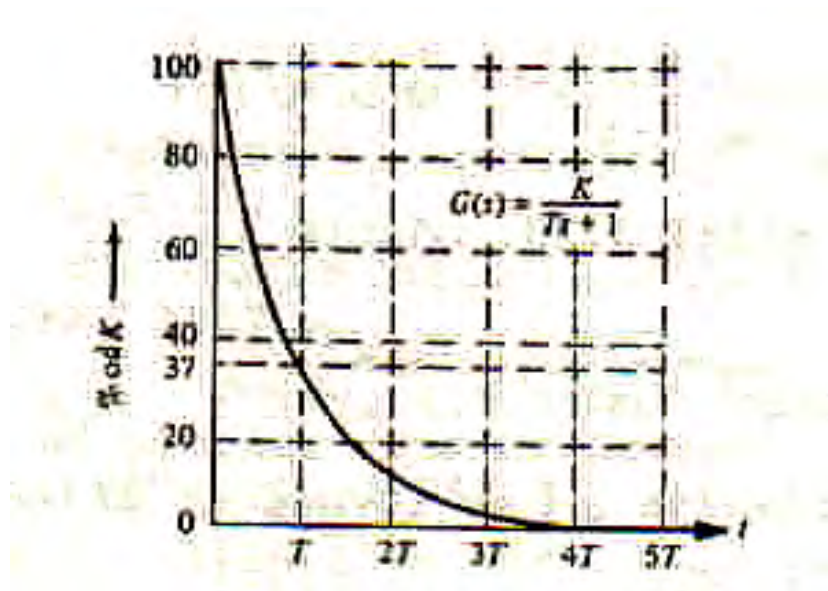
a grafički je predstavljen na narednoj slici 1.12. Iz grafičkog odziva se određuju T i K tako da je početna amplituda :

$$\frac{K}{T} = \frac{K}{T} e^{-0/T}$$

a vrijeme u kojem $g(t)$ dostiže $0.37 K/T$ je

$$\frac{K}{T} e^{-T/T} = \frac{K}{T} e^{-1} = 0.37 \frac{K}{T}$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE



Slika 1.12 Impulsni odziv sistema prvog reda

Takodjer se T može dobiti iz produženja početnog nagiba $g(t)$ dok ne dostigne nultu amplitudu, pošto, prema jednačini (1.47) je :

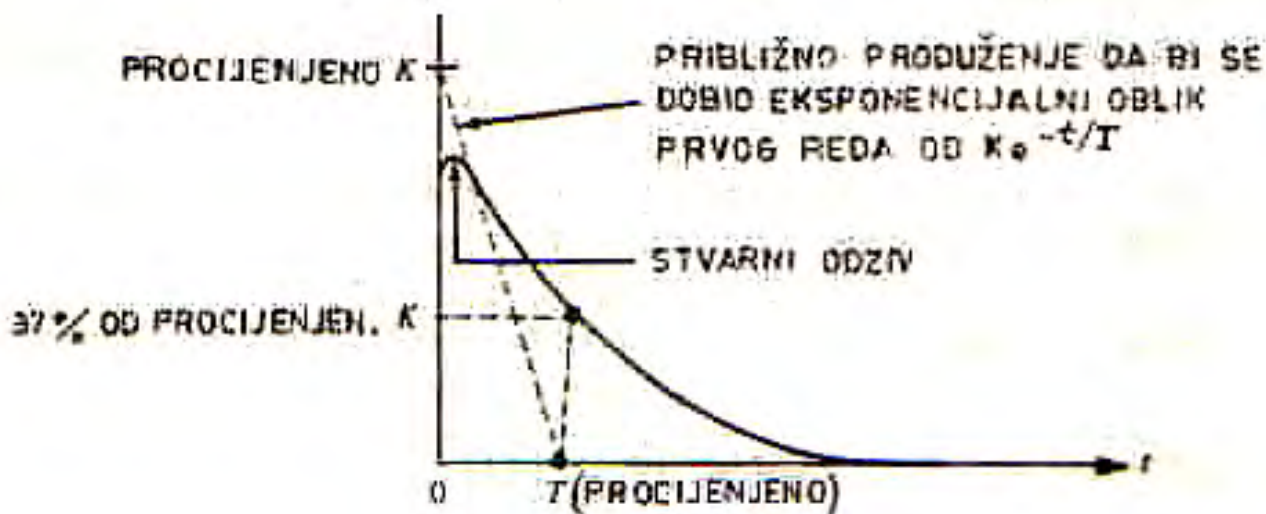
$$\frac{dg(0)}{dt} = -\frac{K}{T^2} \quad (1.48)$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

i

$$\frac{K}{T} - \frac{K}{T^2}t = 0 \quad \text{pri } t = T \quad (1.49)$$

U praksi je ulaz u sistem samo približni impuls. Zbog toga $g(t)$ nikada ne počinje u K/T . Stvarno određivanje K, T se vrši kao na slici 1.13. gdje se najveći nagib blizu (ali ne u $t=0$), ekstrapolira unazad do $t=0$ da bi se dobilo K/T .



Slika 1.13 Praktična identifikacija za impulsni odziv prvog reda

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Impulsni odziv periodičnog sistema drugog reda

Impulsni odziv periodičnog sistema drugog reda određuje se na slijedeći način:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(s/\omega_0)^2 + 2\xi s/\omega_0 + 1} \quad \forall 0 < \xi < 1 \quad (1.50)$$

što daje:

$$g(t) = \frac{K}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2} \quad (1.51)$$

i predstavljeni su na narednoj slici 1.14. Odatle je:

$$\omega_0 \equiv \frac{\omega}{\sqrt{1 - \xi^2}} : \omega \equiv \frac{2\pi}{\theta} \quad (1.52)$$

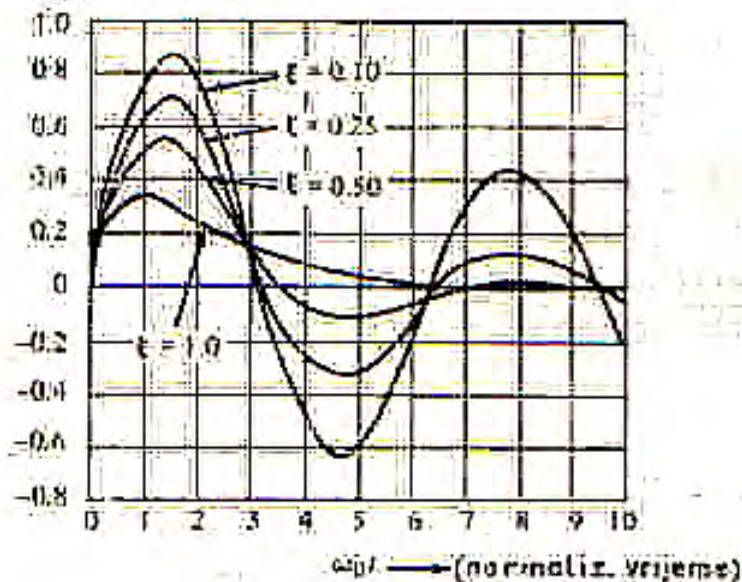
θ je period jedne oscilacije, a ξ se izvodi iz slijedeće relacije:

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

$$\frac{A(+)}{A(-)} = e^{\pi\xi\sqrt{1-\xi^2}} \equiv R \quad (1.53)$$

što daje:

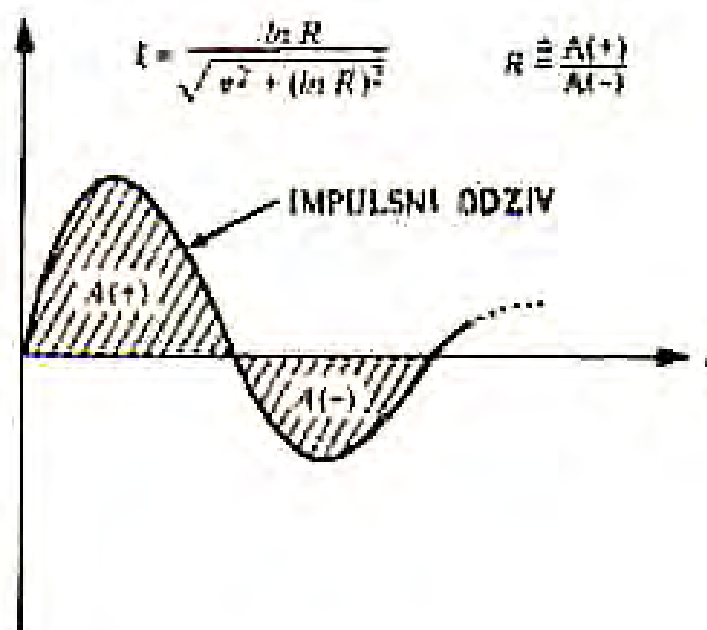
$$\xi = \frac{\ln R}{\sqrt{\pi^2 + (\ln R)^2}} \quad R \equiv \frac{A(+)}{A(-)}$$



Slika 1.14 Impulsni odzivi periodičnog sistema drugog reda

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

gdje su $A(+)$ i $A(-)$ uzastopne pozitivne i negativne površine ovog impulsnog odziva, kao na slici 1.15. Kada su poznati ξ i ω_0 iz jednačine (1.51) se može odrediti K .



Slika 1.15 Odredjivanje ξ iz odnosa površina

METODE IDENTIFIKACIJE POMOĆU KORELACIONE FUNKCIJE

2. METODE IDENTIFIKACIJE POMOĆU KORELACIONE FUNKCIJE

Identifikovanje linearnih procesa pomoću korelacione funkcije omogućava kako “on-line” tako i “off-line” identifikaciju. Postupak se zasniva na primjeni bijelog šuma na ulaz u proces (tj. nekog nekoreliranog slučajnog ulaza koji ima beskonačno ravan spektar do beskonačne frekvencije i srednju vrijednost nula).

Iako takav signal ne postoji u praksi , on se može aproksimirati kako bi se dobio šum čije osobine zadovoljavaju zahtjeve identifikacije pomoću korelacione funkcije. Ako ovaj šum ima dovoljno nisku amplitudu, možemo ga superponirati na normalni radni ulaz sistema bez uticaja na performansu , i zbog toga se može primjeniti “on-line”. Osim toga, u daljem tekstu će se pokazati da normalni radni ulaz ne utiče na postupak identifikacije.

METODE IDENTIFIKACIJE POMOĆU KORELACIONE FUNKCIJE

Postupak identifikacije traži obradu ulaza i izlaza za dugi, praktično beskonačan, vremenski interval, prije nego što se izvrši identifikacija. Zbog toga pristup identifikaciji pomoću korelacione funkcije pretpostavlja stacionarnost procesa (tj. da su parametri procesa, koji su koeficijenti njegove prenosne funkcije ili njegovih jednačina stanja, invarijantni po vremenu).

Konvolucioni i korelacioni integrali

Izlaz $x(t)$ nekog linearnog procesa, koji ima ulaz $y(t)$ izražava se pomoću konvolucionog integrala na slijedeći način:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau)y(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau)y(t - \tau)d\tau \quad (2.1)$$

METODE IDENTIFIKACIJE POMOĆU KORELACIONE FUNKCIJE

gdje je $g(t)$ impulsni odziv $L^{-1}[G(s)]$ sistema. Ako je $y(t) = 0$ za svako $t < 0$, jednačina (2.1) postaje:

$$x(t) = \int_0^t g(t - \tau)y(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)y(t - \tau)d\tau \quad (2.2)$$

Fizikalna interpretacija jednačina (2.1) i (2.2) može se dobiti ako smatramo da $y(t)$ čini niz impulsa sa širinom $\vartheta \rightarrow 0$ i sa amplitudom $y(t)$, tako da je njihova površina $\vartheta y(t)$, a impulsi se javljaju u $t = 0, \vartheta, 2 \vartheta, \dots$. Dalje, uvodimo $x_i(t)$ da bi označili odziv sistema u vremenu t , samo do i -tog impulsa (naime na impuls koji se javlja u $t = (i-1) \vartheta$. U skladu sa tim $x_1(t_1)$ označava odziv u $t=t_1$, na prvi impuls koji se javlja u $t=0$, i čija je površina $\vartheta y(0)$, tako da je :

$$x_1(t_1) = g(t_1) \vartheta y(0) \quad (2.3)$$

METODE IDENTIFIKACIJE POMOĆU KORELACIONE FUNKCIJE

gdje je $g(t_1)$ vrijednost koju ima impulsni odziv po isteku vremena t_1 od nastupanja odgovarajućeg impulsa. Slično tome, $x_2(t_1)$ označava odziv u $t=t_1$ na slijedeći impuls (kojeg smo primjenili u $t = \vartheta$ i čija je površina $\vartheta y(\vartheta)$), tako da je :

$$x_2(t_1) = g(t_1 - \vartheta) \vartheta y(\vartheta) \quad (2.4)$$

Slično tome, odziv x_i na i -ti impuls, koji se javlja u vrijeme $t = (i-1) \vartheta$ je :

$$x_i(t_1) = g [t_1 - (i-1)\vartheta] \vartheta y [(i-1)\vartheta] \quad (2.5)$$

gdje $g [t_1 - (i-1)\vartheta]$ predstavlja impulsni odziv u $t_1 - (i-1)\vartheta$ jedinica vremena poslije pojave odgovarajućeg impulsa. Pošto se niz od n impulsa javio od $t=0$ do $t=t_1$, gdje je $n = t_1/\vartheta$, možemo uzeti $x(t_1)$ kao sumu od n odziva $x_1(t_1)$, $x_2(t_1)$, $x_n(t_1)$, što daje :

METODE IDENTIFIKACIJE POMOĆU KORELACIONE FUNKCIJE

$$x(t_1) = \sum_{i=1}^n x_i(t_1) = \sum_{i=1}^n g(t_1 - (i-1)\vartheta] \mathcal{G} y[(i-1)\vartheta] \quad (2.6)$$

U graničnom slučaju, kada $\vartheta \rightarrow d \tau \rightarrow 0$, i gdje je $i\vartheta = \tau$, $x(t_1)$ se izražava preko konvolucionog integrala iz jednačine (2.2), čija je Laplaceova transformacija:

$$X(s) = G(s) Y(s) \quad (2.7)$$

Sada definišemo unakrsnu (kros) korelacionu funkciju $\Phi_{xy}(\vartheta)$, koja je definisana kao integral proizvoda između vrijednosti signala $x(t)$ i svake vrijednosti drugog signala $y(t - \vartheta)$ u drugom vremenu ($t - \vartheta$), gdje t može da varira od $-T$ do T , na slijedeći način:

$$\Phi_{xy}(\vartheta) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t - \vartheta) dt \quad (2.8)$$

METODE IDENTIFIKACIJE POMOĆU KORELACIONE FUNKCIJE

Na sličan način definišemo autokorelacionu funkciju $\Phi_{yy}(\mathcal{V})$ kao integral proizvoda između svake vrijednosti signala $y(t)$ i svake vrijednosti istog signala u drugom vremenu ($t - \mathcal{V}$), gdje t može da varira od $-T$ do T , na slijedeći način:

$$\Phi_{yy}(\mathcal{V}) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)y(t - \mathcal{V})dt \quad (2.9)$$

Kros korelacija i impulsni odzivi

Zamjenom $x(t)$ iz jednačine [\(2.1\)](#) u jednačinu (2.8) , izvodimo:

$$\Phi_{xy}(\mathcal{V}) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [y(t - \mathcal{V}) \int_0^{\infty} g(t)y(t - \tau)d\tau]dt \quad (2.10)$$

Promjenom reda integriranja , što je moguće jer su t i \mathcal{V} nezavisni od τ , jednačina (2.10) postaje:

METODE IDENTIFIKACIJE POMOĆU KORELACIONE FUNKCIJE

$$\Phi_{xy}(\mathcal{V}) \equiv \int_0^{\infty} g(\tau) \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t - \mathcal{G}) y(t - \tau) dt \right] d\tau \quad (2.11)$$

Medjutim, izraz u uglastim zagradama u jednačini (2.11) može se pisati kao :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t - \mathcal{G}) y(t - \tau) dt =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t') y(t' - \mathcal{G}') dt' = \phi_{yy}(\mathcal{G}') = \phi_{yy}(\mathcal{G} - \tau) \quad (2.12)$$

gdje je :

$$t' \equiv t - \tau \quad (2.13-1)$$

$$\mathcal{G}' \equiv \mathcal{G} - \tau \quad (2.13-2)$$

gdje je $\Phi_{yy}(\mathcal{V}-t)$ autokorelaciona funkcija ulaza y. Odatle jednačina (2.11) postaje:

METODE IDENTIFIKACIJE POMOĆU KORELACIONE FUNKCIJE

$$\Phi_{xy}(\vartheta) = \int_0^{\infty} g(\tau) \phi_{yy}(\vartheta - \tau) d\tau \quad (2.14)$$

Izraz za kros korelacionu funkciju dat jednačinom (2.14) ima isti oblik kao jednačina (2.1), pa se može interpretirati kao odziv sistema čiji je impulsni odziv $g(t)$, ali čiji je ulaz $\Phi_{yy}(t)$ umjesto $y(t)$. Sada možemo uzeti da je ulaz $y(t)$ bijeli šum, čija je autokorelaciona funkcija (pošto je potuno slučajna funkcija) delta funkcija, to jest:

$$\Phi_{yy}(\vartheta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)y(t - \vartheta) dt = \delta(\vartheta) \quad (2.15)$$

Kros korelaciona funkcija $\Phi_{xy}(\vartheta)$ sistema sa ulazom koji je bijeli šum postaje tako, u potpunoj analogiji sa jednačinom (2.1):

$$\Phi_{xy}(\vartheta) = \int_0^{\infty} g(\tau) \delta(\vartheta - \tau) d\tau = g(\vartheta) \quad (2.16)$$

METODE IDENTIFIKACIJE POMOĆU KORELACIONE FUNKCIJE

gdje je $g(\vartheta)$ impulsni odziv tog sistema. Osim toga, pošto je $y(\vartheta)=0$ za svaki $\vartheta < 0$, drugi integral u jednačini (2.10) može da bude u granicama od 0 do ϑ . Zbog toga, jednačina (2.16) postaje:

$$\Phi_{xy}(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} g(\tau) \delta(\vartheta - \tau) d\tau = g(\vartheta) \quad (2.17)$$

$\Phi_{xy}(\vartheta)$ opisuje odziv $g(t)$ sistema na impuls u $t= \vartheta$.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

U praksi se ne može ostvariti ulaz $y(t)$ kao idealni bijeli šum, jer idealni bijeli šum predstavlja čisto slučajni proces sa ravnim spektrom učestanosti koji se proteže do beskonačnosti. Međutim, autokrelacioni integral nekog slučajnog procesa $y(t)$ može da bude približno jednak delta funkciji ako je $y(t)$ slučajni šum koji ima ravan spektar frekvencija ne do beskonačnosti, nego do neke konačne frekvencije, koja je mnogo veća od propusnog opsega sistema, ili, ako predstavlja pseudo-slučajni binarni niz periodične prirode.

Da bi se omogućila “on-line” identifikacija, slučajni ili pseudoslučajni ulaz (čiji autokorelacioni integral aproksimira delta funkciju), mora se superponirati na normalni radni ulaz sistema. Odatle, ulaz sistema postaje $Y(t) = R(t) + y(t)$, a stvarni izlaz $x(t)$ je odziv na $Y(t)$ a ne na $y(t)$.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

Kros korelacija za svrhe identifikacije, međutim se vrši između izlaza $x(t)$ i slučajnog ili pseudoslučajnog dijela $y(t)$ ukupnog ulaza, kako je prikazano na slijedećoj slici. 2.1. Pošto se ograničavamo na linearne sisteme, možemo definisati da je :

$$x(t) \equiv x_R(t) + x_y(t) \quad (2.18)$$

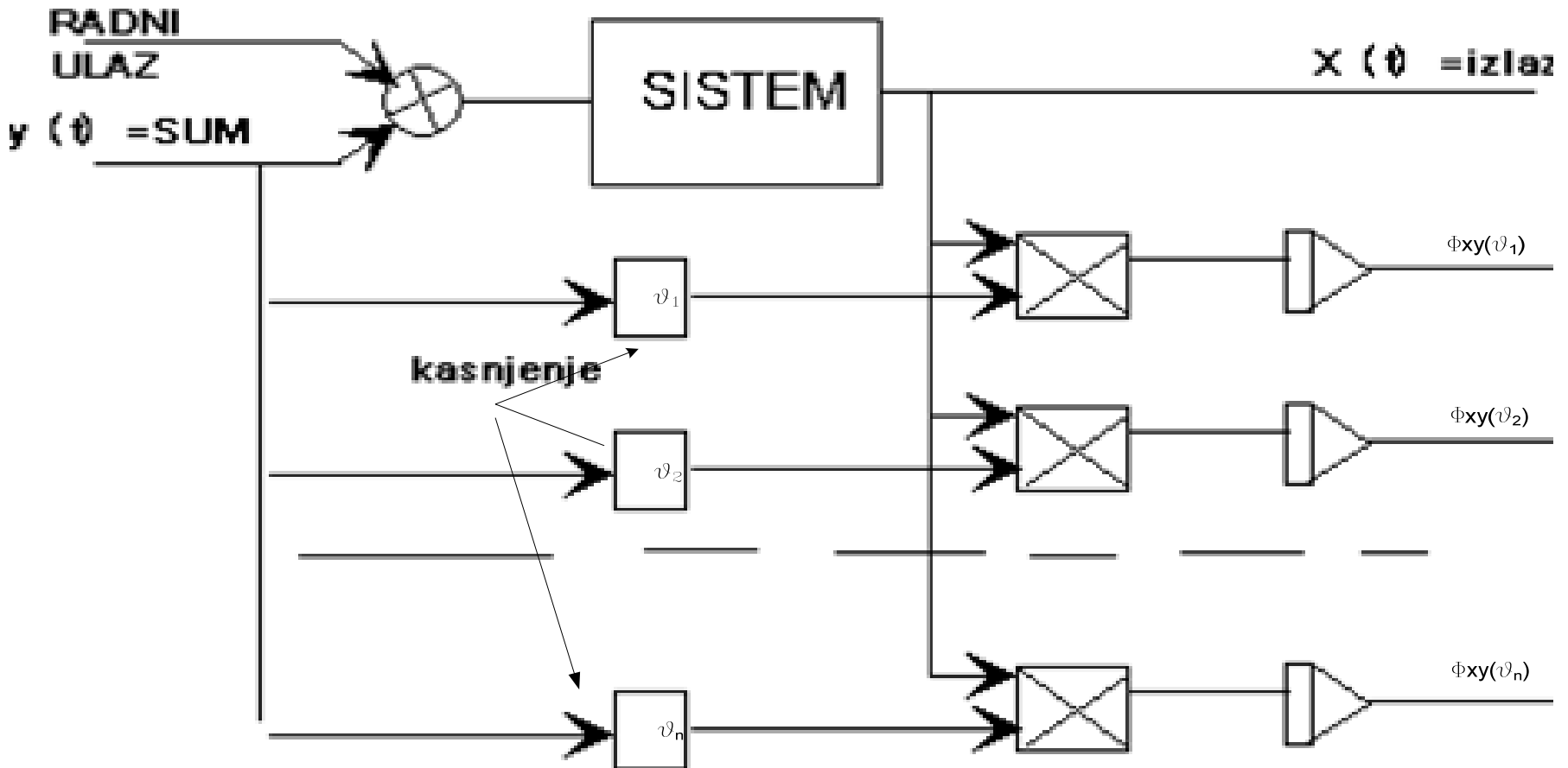
gdje su $x_R(t)$ i $x_y(t)$ odzivi na radni dio ulaza $R(t)$, odnosno na slučajni dio ulaza $y(t)$.

Zamjenom sa $x(t)$ iz jednačine (2.18) u jednačinu [\(2.8\)](#) odredjujemo:

$$\Phi_{xy}(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^T x_R(t) y(t - \nu) dt + \int_{-T}^T x_y(t) y(t - \nu) dt \right] \quad (2.19)$$

gdje je, prema izvodjenju jednačina (2.9) do (2.16), samo drugi član u uglastim zagradama jednačine (2.19) je jednak $g(\nu)$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA



Medjutim, radni ulaz $R(t)$ obično nije slučajan i ima spektar u uskom području frekvencija, dok je naprotiv $y(t)$ slučajan i ima široki i ravan spektar frekvencija.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

Prema tome $R(t)$ i $y(t)$ su malo korelirani a to vrijedi i za $x_R(t)$ i $y(t)$. Prvi član u uglastim zagradama u jednačini (2.19) je zanemarljiv, i kroskorelacioni integral $\Phi_{xy}(\nu)$ između y i x daje $g(\nu)$, čak ako se $y(t)$ superponira na $R(t)$. Posljednji rezultat dozvoljava “on-line” identifikaciju kada je amplituda $y(t)$ dovoljno niska u odnosu na $R(t)$, tako da zbog velikih promjena $y(t)$ ne dolazi do promjene performansi sistema (tj. sistem ne dolazi u nelinearni režim).

IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

Generiranje slučajnih i pseudoslučajnih nizova

Generiranje slučajnih brojeva

Generiranje bijelog šuma može se vršiti uz upotrebu nekog izvora šuma kao što je radioaktivni uzorak kojeg pobudjuje Gajgerov brojač. Binarni bijeli šum može se dobiti ako se izlaz Gajgerovog brojača vodi da okida “flip-flop” kola, a zatim na kolo koje odsjeca gornje i donje napone da bi se dobio izlaz koji ima vrijednosti V_{\max} i V_{\min} kao na slici 2.2.

Generiranje slučajnog niza pomoću digitalnog računara se zasniva na slijedećoj relaciji, modulo N :

$$y_{i+1} \equiv a y_i \pmod{N} ; \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

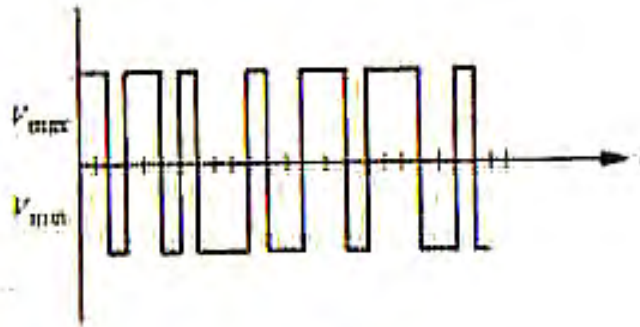
IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

gdje su y , a i N cijeli brojevi, a

$$y_0 \neq 0 \pmod{N} \quad (2.21)$$

Podsjetimo se da $A=B \pmod{N}$ znači da su A i B kongruentni sa modulom N , to jest, da A i B imaju isti ostatak kada se podjele sa N . Zbog toga, za neki početni izbor y , slučajni brojevi y su rezultat množenja prema jednačini (2.20), gdje je svaki proizvod reduciran modulo N (tj. predstavlja njegov ostatak nakon djeljenja sa N). Jednačina (2.20) podrazumjeva da su dobijeni slučajni brojevi raspodijeljeni između 0 i N . Obično se N bira kao b^k gdje je b baza mašinske riječi (2 kod binarnih mašina), a k je cijeli broj: za y_0 pogodno je da se odabere 1 , dok a treba da je uvijek veliko. Niz koji se generiše prema jednačini (2.20) je ustvari periodičan. Medjutim, kod pogodnog izbora a , N i k , period može da bude veoma dug (od 5×10^7 brojeva za $a=7_9^9$ i $N=10^{10}$).

IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA



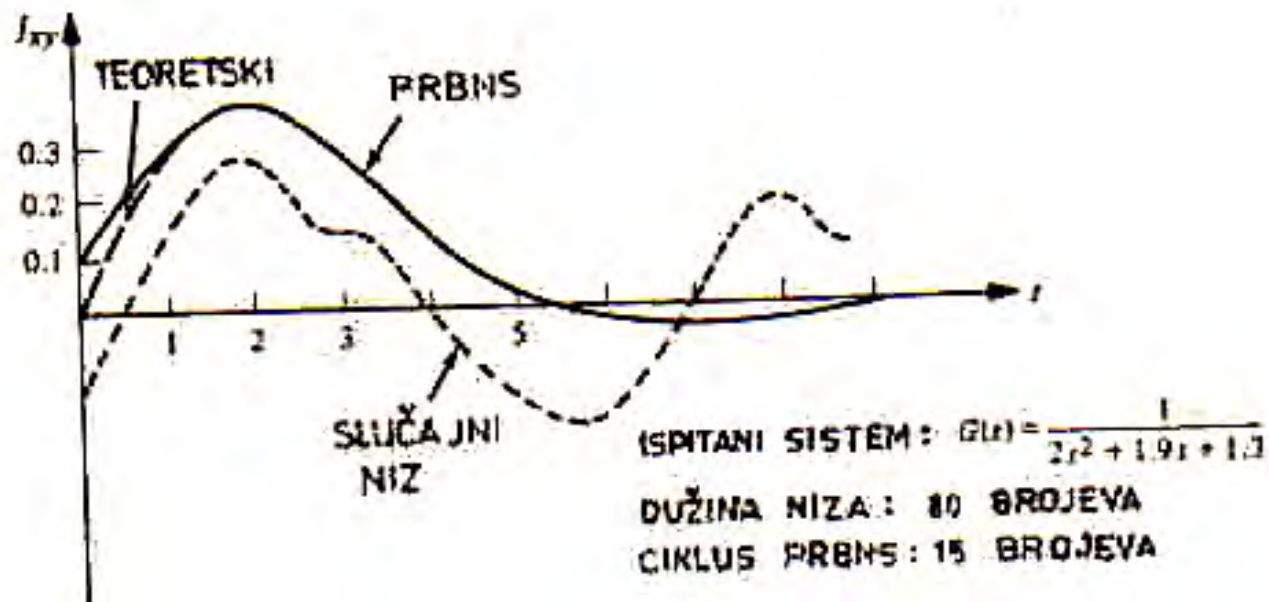
Slika 2.2 Signal binarnog šuma

Pseudo slučajni binarni nizovi- PSBN (ili PRBS . pseudo random binary sequence), vjerovatno su najpogodniji ulazi za svrhe identifikacije pomoću tehnike korelacionog integrala. Ti su nizovi po prirodi periodični, njihove periode su relativno kratke, ipak, njihov autokorelacioni integral daje zadovoljavajuću aproksimaciju delta funkcije. Zbog svoje osobine periodičnosti traže vrlo malu memoriju računara. Osim toga, njihov autokorelacioni integral bolje aproksimira delta funkciju nego drugi slučajni nizovi slične dužine (naprimjer, ako se uzme niz od 150 elemenata koji je

IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

je proizveden pomoću pseudoslučajnog koda koji ima ciklus od 15 elemenata, i uporedi sa slučajnim nizom sa beskonačnom dužinom ciklusa).

Zbog toga je identifikacija obavljena uz upotrebu PSBN tačnija (vidjeti narednu sliku 2.3).



IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

Pseudo slučajni niz maksimalne dužine

Nulti nizovi maksimalne dužine su binarni nizovi sa pseudoslučajnim osobinama koje imaju autokorelacionu funkciju približno jednaku impulsnoj funkciji i zbog toga se mogu upotrijebiti kao šum u postupku identifikacije pomoću korelacionog integrala. Ti se nizovi mogu lako generirati pomoću šift registara ili uz upotrebu jednostavnog digitalnog algoritma. Nulti niz maksimalne dužine zadovoljava linearnu diferentnu jednačinu (modulo 2) na slijedeći način:

$$D^m x \oplus D^{m-1} x \oplus \dots \oplus Dx \oplus x = y \quad (2.22)$$

gdje D^m označava kašnjenje od m intervala, tako da je $D^m x_i = x_{i-m}$, i je trenutak nastajanja uzorka: $a \oplus$ označava sabiranje modulo 2, tako da je

IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

$$0 \oplus 0 = 0 ; 0 \oplus 1 = 1 ; 1 \oplus 0 = 1 ; 1 \oplus 1 = 0 \text{ pa je } (D \oplus D) x = 0 \quad \forall x$$

Jednačina (2.22) može se pisati kao :

$$(D^m \oplus D^{m-1} \oplus \dots \oplus D \oplus I) x = Y \quad (2.23)$$

gdje je I operator identiteta. Niz $\{x_i\}$ koji zadovoljava jednačinu (2.22) stepena m sa $Y=0$, naziva se nulti niz. Nulti nizovi su periodičnog karaktera. Maksimalni broj elemenata u nekom nultom nizu stepena m je $2^m - 1$, a dobijeni niz se naziva nulti niz maksimalne dužine (NNMD).

Polinomijalna jednačina oblika:

$$(D^m \oplus D^{m-1} \oplus \dots \oplus D \oplus I) x = 0 \quad (2.24)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

$$(D^m \oplus D^{m-1} \oplus \dots \oplus D \oplus I) x = 0 \quad (2.24)$$

koja daje NNMD, mora biti nereducibilna (tj. ne smije da bude proizvod dva ili više polinoma, nižeg stepena). Osim toga, ne treba da bude faktor modulo 2 od $D^n \oplus 1$ @ $n < 2^m - 1$, tj. ne smije da dijeli modulo 2 izraz $D^m \oplus 1$. Iz toga slijedi da se za $m=5$, NNMD daje sa :

$$(D^5 \oplus D^3 \oplus I) x = 0 \quad (2.25)$$

što predstavlja niz od $2^5 - 1 = 31$ elemenat. Medjutim, polinom petog reda , kao što je :

$$(D^5 \oplus D^4 \oplus D^3 \oplus D^2 \oplus I) x = \frac{D^6 \oplus I}{D \oplus I} \quad (2.26)$$

ne daje NNMD nizove jer se dijeli sa $D^6 \oplus I$.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

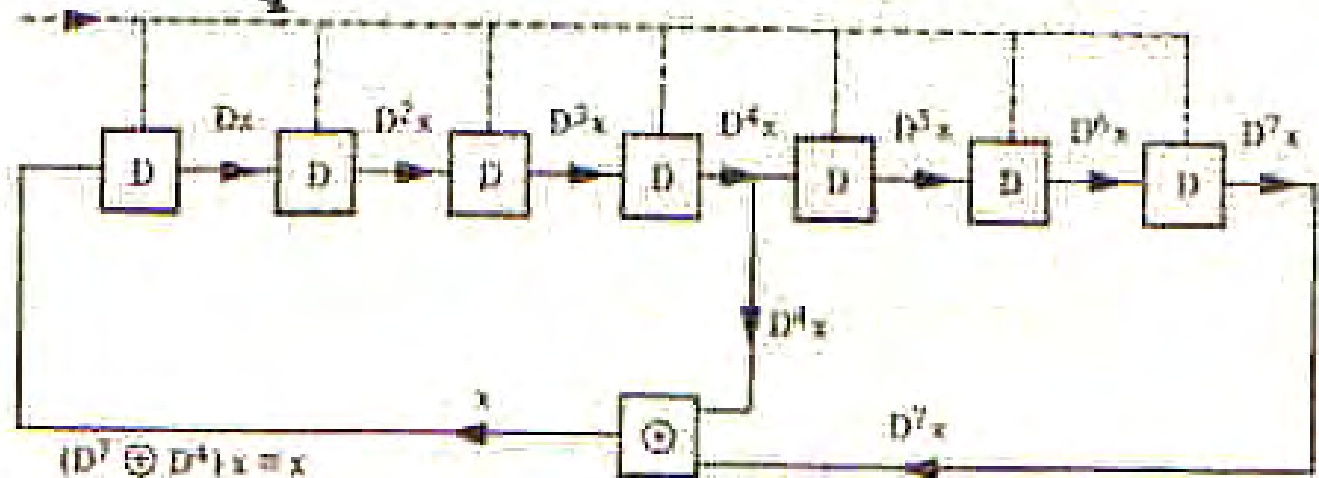
U narednoj tabeli T 2.1 , dati su NNMD polinomi do 11-og reda. Napomenimo da se jednačina (2.25) može pisati i kao

$$(D^5 \oplus D^3) x = x$$

jer se izražavamo sa modulo 2. Na narednoj slici 2.4 prikazan je šift registar za generiranje NNMD za $m=7$, gdje se prema tabeli T2.1 sabiraju (modulo 2) izlazi četvrtog i sedmog elementa kašnjenja da bi dobili x . Iz tabele se vidi da pomenuti izlazi treba da se vrate u prvi element šift registara. Početne vrijednosti logičkih promjenljivih u m stepena kašnjenja ne smiju sve da budu nule, jer bi se moglo desiti da šift registar svo vrijeme daje izlaz nula.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

sinhroni impulsi



Slika br 2.4 Šift registar sa sedam elemenata za generiranje NNMD

NNMD kod je niz od nula i jedinica, čija je srednja vrijednost za $N=2^m-1$ približne jednaka $N/2$.

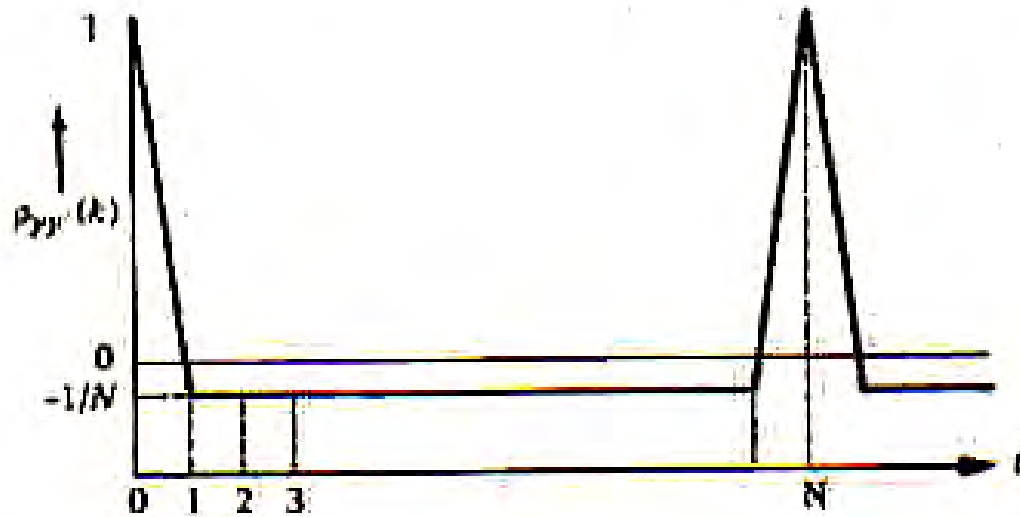
IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

n	NNMD <i>polimim</i>
2	$(D^1 \oplus D)x \equiv x$
3	$(D^2 \oplus D)x \equiv x$
4	$(D^4 \oplus D^2)x \equiv x$
5	$(D^4 \oplus D^1)x \equiv x$
6	$(D^4 \oplus D^2)x \equiv x$
7	$(D^7 \oplus D^4)x \equiv x$
8	$(D^8 \oplus D^4 \oplus D^2 \oplus D^1)x \equiv x$
9	$(D^8 \oplus D^2)x \equiv x$
10	$(D^{10} \oplus D^7)x \equiv x$
11	$(D^{11} \oplus D^8)x \equiv x$

Ova srednja vrijednost daje autokorelacioni integral koji se razlikuje od idealne delta funkcije po srednjoj vrijednosti (napr. , uzmimo NNMD za period 15 ; odnos je 1: 111100010011010).

IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

Zbog toga, prednost imaju NNMD čiji su elementi 1,-1 umjesto 1,0. Oni imaju autokorelacioni integral kao na narednoj slici 2.5. Takav se niz naziva NNMDN (NNMD – negativni) niz.



Slika 2.5 Autokorelaciona funkcija NNMD

IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

Primjer

Da bi prikazali generiranje nekog NNMD niza razmotrimo troetajni šift registar. U početku su sve njegove etape u logičkom stanju 1. Da bi se dobio NNMD niz, uzima se povratna sprega iz prvog i trećeg registra elementima do logičkog modulo 2 sumatora, prema tabeli T 2.1. Kao rezultat toga će u početku izlaz sumatora biti $x(1) = 1 \oplus 1 = 0$. Niz koji se generira na izlazu iz sumatora i u raznim elementima može se tabelarno prikazati, kao što se vidi iz naredne tabele T2.2.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

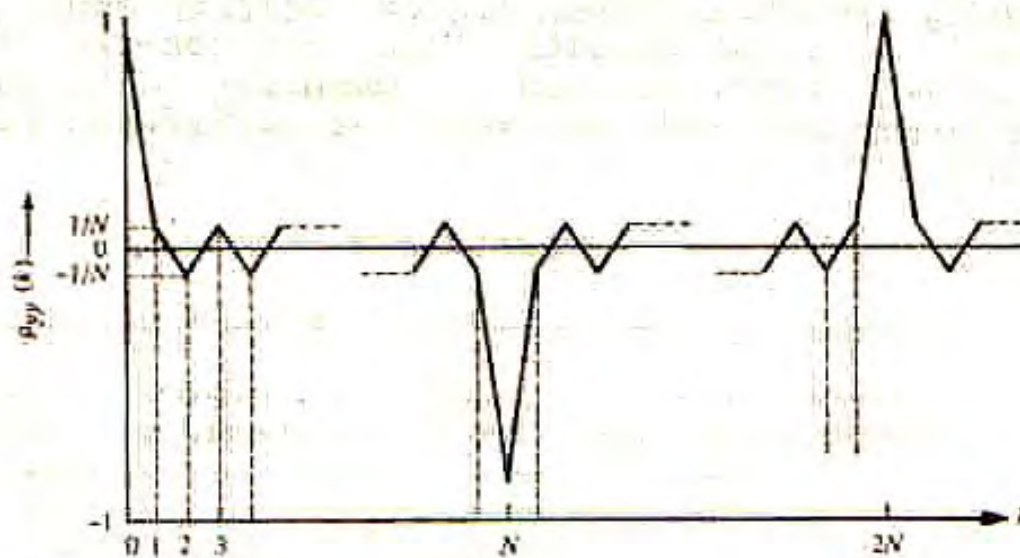
$i =$ vremenski interval	izlaz sumatora $X \equiv Y_1 + Y_2$	1. element $Y_1 \equiv DX$	2. element $Y_2 \equiv DY_1$	3. element $Y_3 \equiv DY_2$
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	0	1	0
5	1	0	0	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0
8	0	1	1	1

Tabela T2.2

U toj tabeli Y_i u intervalu $i+1$ je u stanju X_i u intervalu i , tj. $Y_i = D x_i$. Isto tako, Y_2 u intervalu $i+1$ je Y_1 u intervalu i , a Y_3 u $i+1$ je Y_2 u i . Opažamo da su sva stanja u osmom intervalu ($8 = 2^3$, gdje je eksponent 3 jednak broju elemenata šiftnog registra), identična prvom (početnom) intervalu ($i=1$). Dakle, ovaj šiftni registar će generirati niz od $7 = 2^3 - 1$ elemenata koji su dati sa; 0,1,0,0,1,1,1.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU BIJELOG ŠUMA

Postoji još jedan pseudoslučajni niz sa srednjom vrijednosti koja je čak bliža nuli nego kod NNMDN. To je NNMDN sa aperiodičnim promjenama znaka. On se dobije kada se mjenja znak svakog drugog elementa nekog NNMDN niza. Pošto je period NNMDN neparan, NNMDN sa periodičnim promjenama znaka ima period od $2N$ (tj. dva puta veći od NNMD). Dobijena autokorelaciona funkcija je prikazana na narednoj slici br. 2.6.



DOBIJANJE FREKVENTNOG ODZIVA IZ KORELACIONIH FUNKCIJA

Dobijanje frekventnog odziva iz korelacionih funkcija

Tehnika identifikacije pomoću korelacionog integrala koja se razmatra, daje impulsni odziv $g(t)$ sistema koji se identifikuje, što omogućava identifikaciju preko impulsnog odziva. Da bi se dobila prenosna funkcija $G(s)$ sistema ili koeficijenti jednačina stanja, moraju se koristiti metode koje omogućavaju određivanje $G(s)$ iz zapisa $g(t)$.

Napomenimo da se grafičko opisivanje $g(t)$ može dobiti ako se za neki pogodan broj vrijednosti ϑ proračuna $g(\vartheta)$ iz jednačine (2.15).

Posmatranjem kroz korelacionog integrala iz jednačine (2.14), ponovo ćemo razmotriti ovaj integral kao konvolucioni integral gdje je :

DOBIJANJE FREKVENTNOG ODZIVA IZ KORELACIONIH FUNKCIJA

$$\phi_{xy}(\mathcal{G}) \equiv \xi(\mathcal{G}) \quad (2.28a)$$

I

$$\phi_{yy}(\mathcal{G}) \equiv \eta(\mathcal{G}) \quad (2.28b)$$

dobijajući :

$$\xi(\mathcal{G}) = \int_0^{\infty} g(\tau) \eta(\mathcal{G} - \tau) d\tau \quad (2.29)$$

Poznato je da se Laplaceova i Fourierova transformacija konvolucionog integrala daju pomoću :

$$\xi(\mathbf{s}) = \mathbf{G}(\mathbf{s}) \eta(\mathbf{s}) \quad (2.30a)$$

$$\xi(j\omega) = \mathbf{G}(j\omega) \eta(j\omega) \quad (2.30b)$$

Iz toga se dobija:

$$\mathbf{G}(j\omega) = \xi(j\omega) / \eta(j\omega) \quad (2.31)$$

DOBIJANJE FREKVENTNOG ODZIVA IZ KORELACIONIH FUNKCIJA

gdje su:

$$\xi(j\omega) \equiv F[\phi_{xy}(\mathcal{G})] = \phi_{xy}(j\omega) \quad (2.32)$$

$$\eta(j\omega) \equiv F[\phi_{yx}(\mathcal{G})] = \phi_{yx}(j\omega) \quad (2.33)$$

Ove dvije posljednje Fourierove transformacije mogu se proračunati pomoću FFT algoritma. Pošto bijeli šum $y(t)$ ili pseudoslučajni ulaz, zadovoljavaju:

$$\phi_{yy}(\mathcal{G}) \approx \delta(\tau) \quad (2.34)$$

dobijamo:

$$\phi_{yy}(j\omega) \equiv 1 \quad (2.35)$$

što daje:

$$\mathbf{G}(j\omega) = \xi(j\omega)/1 = \xi(j\omega) \quad (2.36)$$

DOBIJANJE FREKVENTNOG ODZIVA IZ KORELACIONIH FUNKCIJA

Računarski aspekt

Da bi se proračunao $g(\nu)$ moramo proračunati kroskorelacionu funkciju jednačine (2.8), koja u diskretnom obliku postaje:

$$\phi_{xy}(k) = \frac{1}{(2M+1)} \sum_{i=-M}^M x_i y_{i-k} \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, (M-1) \quad (2.37)$$

$k\Delta t \equiv \mathcal{G}$
 $M\Delta t \equiv T$

Međutim, pošto je $x(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$, ϕ_{xy} postaje

$$\phi_{xy}(k) = \frac{1}{(M-k)} \sum_{i=1}^{M-k} x_{i+k} y_i \quad (2.38)$$

Ako se $G(j\omega)$ određuje iz jednačine (2.29), također moramo proračunati $\Phi_{yy}(k)$ iz

DOBIJANJE FREKVENTNOG ODZIVA IZ KORELACIONIH FUNKCIJA

$$\phi_{yy}(k) = \frac{1}{(M-k)} \sum_{i=1}^{M-k} y_i y_{i+k} \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, (M-1) \quad (2.39)$$

i iz toga izvesti Fourierovu transformaciju $\Phi_{xy}(j\omega)$ od $\Phi_{xy}(k)$ i $\Phi_{yy}(j\omega)$ od $\Phi_{yy}(k)$. Moguće je mnogo brže odredjivanje $\Phi_{xy}(j\omega)$ i $\Phi_{yy}(j\omega)$ kao i $G(j\omega)$, kada se prvo proračunaju Fourierove transformacije $X(j\omega)$ od $x(t)$ i $Y(j\omega)$ od $y(t)$ i gdje uopšte nije potrebno proračunavati $\Phi_{xy}(k)$ i $\Phi_{yy}(k)$. Ovo posljednje izvodjenje kojim se takodjer umanjuju greške zaokruženja zasniva se na :

$$\Phi_{xy}(j\omega) = X(j\omega) Y^*(j\omega) \quad Y^* = \text{konjugovano od } Y \quad (2.40)$$

$$\Phi_{yy}(j\omega) = Y(j\omega) Y^*(j\omega) \quad (2.41)$$

gdje se $X(j\omega)$ i $Y(j\omega)$ odredjuju primjenom postupka Fourierove transformacije na $x(t)$ i $y(t)$

DOBIJANJE FREKVENTNOG ODZIVA IZ KORELACIONIH FUNKCIJA

Čak i kada su $\Phi_{xy}(k)$ i $\Phi_{yy}(k)$ potrebni sami po sebi, oni se mogu proračunati na taj način da se prvo nadje FFT jednačina (2.40) i (2.41) , a zatim se na njih primjeni inverzna brza Fourierova transformacija. Ovaj posljednji postupak opet će dati smanjenje greške zaokruženja i ubrzavanje proračuna u poredjenju sa odredjivanjem $\Phi_{xy}(k)$ i $\Phi_{yy}(k)$ prema jednačinama (2.38) i (2.39), ako se obradjuje dugi niz podataka $x(t)$ i $y(t)$.

Jednačine (2.40) i (2.41) izvode se iz primjene Fourierove transformacije na $\Phi_{xy}(\mathcal{V})$ na slijedeći način:

$$\begin{aligned}\Phi_{xy}(j\omega) &= F[\Phi_{xy}(\mathcal{V})] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xz}(\mathcal{G}) e^{-j\omega\mathcal{G}} d\mathcal{G} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\mathcal{G}) \right] e^{-j\omega\mathcal{G}} d\mathcal{G} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\mathcal{G}) e^{-j\omega\mathcal{G}} d\mathcal{G} \right] dt\end{aligned}\quad (2.42)$$

DOBIJANJE FREKVENTNOG ODZIVA IZ KORELACIONIH FUNKCIJA

Zamjenom

$$t' \equiv t - \vartheta \quad (2.43)$$

dobijamo nakon promjene granica i predznaka unutrašnjeg integrala:

$$\Phi_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t') e^{-j\omega(t-t')} dt' \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t') e^{j\omega t'} dt' \right] dt \quad (2.44)$$

Opažamo da je član u uglastim zagradama posljednjeg dijela jednačine (2.44) jednak $Y^*(j\omega)$. Prema tome, jednačina (2.40) je zadovoljena.

Zamjena $\Phi_{xy}(j\omega)$ i $\Phi_{yy}(j\omega)$ iz jednačina (2.40) i (2.41) u jednačinu (2.31) daje:

$$\mathbf{G}(j\omega) = \frac{X(j\omega)Y^*(j\omega)}{Y(j\omega)Y^*(j\omega)} = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} \quad (2.45)$$

DOBIJANJE FREKVENTNOG ODZIVA IZ KORELACIONIH FUNKCIJA

Odavde se $G(j\omega)$ može odrediti ako se proračunaju samo $X(j\omega)$ i $Y(j\omega)$ i podjele prema jednačini (2.45). Medjutim, ovo dijeljenje je prilično neugodno u odnosu na proračunavanje $\Phi_{xy}(j\omega)$, Zbog toga, a imajući na umu da je $\Phi_{yy}(j\omega)=1$ za bijeli šum, kao u jednačini (2.35), znatno je brže da se $G(j\omega)$ izvodi iz jednačine (2.36), gdje se izbjegava dijeljenje.

Uporedjenjem jednačina (2.41) sa jednačinom (2.35), dalje opažamo da je :

$$|Y(j\omega)| = \sqrt{\phi_{yy}(j\omega)} = 1 \quad (2.46)$$

Zamjenom ovog rezultata u jednačinu (2.45), podrazumjeva se da se dijeljenjem $X(j\omega)/Y(j\omega)$ gubi informacija o fazi.

DOBIJANJE FREKVENTNOG ODZIVA IZ KORELACIONIH FUNKCIJA

Granice i i k sume u jednačinama (2.38) i (2.39) daju da dužina N ulaznog niza treba da bude najmanje $2M$, gdje je M opseg od interesa u zapisivanju $g(t)$. U slučaju NNMD kodova sa ponavljanom izmjenom, čiji je period $2N$ elemenata, potrebno je da je $N \geq 2M$, gdje je N polovina perioda $2N$, kako bi se izbjegli ostali vrhovi u autokorelacionim funkcijama šuma, kao na slikama 2.5 i 2.6.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

3. IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Regresiona analiza je odavno postala klasično statističko sredstvo. Zbog širokog područja primjenljivosti tehnike regresije na proces identifikacije, prirodno je da je ona prihvaćena u tehnici sistema, iako njena primjena na “on-line” identifikaciju sa više promjenljivih postaje prihvaćena tek kada su se pojavili brzi računari.

Tehnike identifikacije koje se zasnivaju na regresiji na osnovu najmanje sume kvadrata mogu se primjeniti kako na linearne tako i na nelinearne procese, i omogućuju identifikaciju sistema sa više simultanih ulaza. Osim toga, tehnike regresije se zasnivaju na mjerenjima ulaz/izlaz koja se mogu vršiti u toku normalnog rada procesa, omogućavajući na taj način “on-line” identifikaciju sve dotle dok se ne pojavi neki prelazni proces.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

U periodu u kojem se vrše mjerenja u cilju identifikacije pomoću regresije, predpostavlja se da postoji stacionarnost ili kvazistacionarnost identifikovanih parametara procesa. Ovaj period treba da bude veći od mT , gdje je T interval uzimanja uzoraka, a m je broj parametara koji se identifikuju.

Ako je potrebna identifikacija m koeficijenata u svakoj od n simultanih jednačina oblika:

$$x_j = a_{0j} + a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{mj}u_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

i ako se u svih n jednačina javlja isto u_i ($i=1, 2, \dots, m$), svi $a_{ij} \forall i, j$ mogu se identifikovati mjerenjem kroz $m+1$ trenutaka. Prema tome, mogu se simultano identifikovati koeficijenti gornjih n jednačina, kako će se vidjeti iz narednog opisa.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Prethodno smo napomenuli da tehnike regresije traže akumuliranje podataka ulaz/izlaz u nestacionarnom stanju, kroz najmanje $m+1$ interval uzimanja uzoraka, prije nego što se može izvršiti regresija. Odatle proizlazi da se u i -tom intervalu regresiona identifikacija zasniva na podacima od $(i-m-p)$ -tog intervala ($p \geq 0$), do i -tog intervala. Slično tome, u $(i+1)$ -om intervalu ova identifikacija se zasniva na podacima od $(i-m-p+1)$ -og intervala do $(i+1)$ -og intervala, čime se omogućava otkrivanje nestacionarnosti.

Iz daljeg teksta se vidi da određivanje parametara regresije, ako je potrebno identifikovati više od jednog parametra, traži matičnu inverziju. Sekvencijalna formulacija tehnike regresije kojom se izbjegava inverzija matrice će se razmatrati u posebnom poglavlju.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

IDENTIFIKACIJA STATIČKOG SISTEMA SA JEDNIM ULAZOM

Razmotrimo linearni statički sistem sa naredne slike 3.1 , koji ima m ulaza $u_1 \dots u_m$ i jedan izlaz x . Ovaj se sistem može opisati pomoću linearne jednačine:

$$x = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m \quad (3.2)$$

Uzimajući r skupova mjerenja x, u_j ($j=0, 1, \dots, m$), možemo odrediti a_i na slijedeći način:

Prvo se stave u memoriju r skupova mjerenja x i u_j . Zatim se iz ovih r skupova mjerenja računaju \bar{x} i \bar{U} , gdje je \bar{x} srednja vrijednost od x , a \bar{U} je srednja vrijednost od u , za navedenih r skupova mjerenja. Definišuću da je :

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

$$x \equiv X - \bar{X} \quad (3.3)$$

$$u \equiv U - \bar{U} \quad (3.4)$$



Slika 3.1 Proces sa jednim izazom
jednačina (3.1) postaje:

$$x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots \dots \dots a_m u_m \quad (3.5)$$

ili u vektorskom obliku:

$$x = u^T a \quad (3.6)$$

gdje su u i a vektori kolone sa elementima u_j odnosno a_j .
Prema tome, r skupova mjerenja zadovoljavaju:

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

$$\begin{aligned}x_{(1)} &= \mathbf{u}_{(1)}^T \mathbf{a} \\ &\dots \\ &\dots \\ x_{(\mu)} &= \mathbf{u}_{(\mu)}^T \mathbf{a} \\ &\dots \\ x_{(r)} &= \mathbf{u}_{(r)}^T \mathbf{a}\end{aligned}\tag{3.7}$$

gdje μ pokazuje μ - ti skup mjerenja, x , u^T ; ($\mu = 1, 2, \dots, r$). Dalje definišemo vektor χ i matricu \mathbf{U} na slijedeći način:

$$\chi = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\mu, \dots, \mathbf{x}_r] \tag{3.8}$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(1)}^T \\ \mathbf{u}_{(\mu)}^T \\ \mathbf{u}_{(r)}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1(1)} & \cdot & u_{j(1)} & \cdot & u_{m(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{1(\mu)} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{m(\mu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{1(r)} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{m(r)} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Iz ovoga, jednačina (3.7) može se pisati u vektorskom obliku:

$$\chi = \mathbf{U} \mathbf{a} \quad (3.10a)$$

Predpostavljajući da su elementi od \mathbf{a} jednačina [\(3.10a\)](#) procjene $\hat{\mathbf{a}}$ stvarnih vrijednosti \mathbf{a} , jednačina (3.10a) daje procjene $\hat{\chi}$ od χ , tako da :

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{U} \hat{\mathbf{a}} \quad (3.10b)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Možemo definirati skalarnu sumu S kvadrata grešaka procjene na slijedeći način:

$$S \equiv (\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T (\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}) = \text{tr} [(\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}) (\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T] \quad (3.11)$$

gdje $\text{tr}[\dots]$ pokazuje trag matrice $[\dots]$. Najbolja procjena \mathbf{a} u smislu minimalne sume kvadrata grešaka, mora zbog toga da zadovolji izraz:

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{a}_i} = 0 \quad \forall i \in (1, m) \quad (3.12)$$

ili u vektorskom obliku :

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = \frac{\partial \text{tr} \left[(\mathbf{X} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})(\mathbf{X} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T \right]}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T + \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{U}^T - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{X}^T - \mathbf{X}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{U}^T)}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = 0 \quad (3.13)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Prema matričnom računu funkcija traga je jednaka:

$$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T + \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{X}^T - \mathbf{X}\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T)}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = 0 + 2\mathbf{U}^T\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{U}^T\mathbf{X} - \mathbf{U}^T\mathbf{X} \quad (3.14)$$

$$= 2(\mathbf{U}^T\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{U}^T\mathbf{X}) = 0$$

Dosljedno tome, najbolja procjena $\hat{\mathbf{a}}^*$ za \mathbf{a} u smislu minimalne sume kvadrata grešaka zadovoljava:

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}^* = \mathbf{U}^T\mathbf{X} \quad (3.15)$$

tako da je:

$$\hat{\mathbf{a}}^* = (\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1^* \\ \hat{a}_2^* \\ \dots \\ \hat{a}_m^* \end{bmatrix}^T \quad (3.16)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

što daje linearnu identifikaciju a pomoću regresije najmanjih kvadrata. Primećujemo da $(U^T U)^{-1}$ postoji samo onda ako ni jedna kolona od U nije linearna kombinacija drugih kolona. Osim toga, tražimo da je $r \geq m$, da bi se izbalansirale sve vrste u jednačini (3.16), gdje r označava broj mjerenja x i u . Medjutim, ako je $r=m$, procjenjeno \hat{x} neće uopšte filtrirati šum koji se javlja u toku mjerenja, pa tražimo da je $r \geq m$ umjesto $r=m$. Ovaj posljednji zahtjev podrazumjeva da se za odgovarajucu identifikaciju mora uzeti najmanje $(m+1)$ trenutaka mjerenja (intervala mjerenja), a predpostavlja se da u ovom periodu postoji stacionarnost.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

IDENTIFIKACIJA STATIČKOG SISTEMA SA VIŠE ULAZA I IZLAZA

Proces koji ima m ulaza i n izlaza, kao na narednoj slici 3.2 , može se analogno procesu sa jednim izlazom, opisati pomoću slijedećeg skupa jednačina:



Slika 3.2 Proces sa više ulaza i više izlaza

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

$$x_1 = a_{11}u_1 + \dots + a_{1j}u_j \dots + a_{1m}u_m$$

.....

$$x_i = a_{i1}u_1 + \dots + a_{ij}u_j \dots + a_{im}u_m \quad (3.17)$$

.....

$$x_n = a_{n1}u_1 + \dots + a_{nj}u_j \dots + a_{nm}u_m$$

ili u vektorskom obliku:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (3.18)$$

gdje su:

$$\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)^T \quad (3.19)$$

$$\mathbf{u} \equiv (u_1, \dots, u_i, \dots, u_m)^T \quad (3.20)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

i

$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Svaki red jednačina (3.17) ili (3.18) potpuno je istog oblika kao i jednačina (3.5) ili (3.6), za problem sa jednim izlazom. Prema tome, možemo pisati i-ti red jednačine (3.17) na slijedeći način:

$$x_i = \mathbf{u}^T \mathbf{a}_i \quad (3.22)$$

gdje je:

$$\mathbf{a}_i \equiv [a_{i1} a_{i2} \dots a_{ij} \dots a_{im}]^T \quad (3.23)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Opet, analogno procesu sa jednim izlazom, za r skupova mjerjenja x_i ($r \geq m+1$ i u_j ($i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, m$), dobijemo da je:

$$\mathbf{X}_i \equiv \begin{bmatrix} x_{i(1)} \\ x_{i(\mu)} \\ x_{i(r)} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} u_{1(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{m(1)} \\ u_{1(\mu)} & & & & u_{m(\mu)} \\ u_{1(r)} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{m(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(1)}^T \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{(r)}^T \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

gdje indeks u zagradi μ označava μ – ti skup mjerenja $\mu = (1, 2, \dots, r)$ a \mathbf{U} je kao u jednačini (3.9). Prema tome, r skupova mjerenja zadovoljava za i-ti izlaz:

$$\begin{aligned} X_{i(1)} &= \mathbf{u}_{(1)}^T \mathbf{a}_i \\ &\dots \dots \\ X_{i(\mu)} &= \mathbf{u}_{(\mu)}^T \mathbf{a}_i && (3.26a) \\ &\dots \dots \\ X_{i(r)} &= \mathbf{u}_{(r)}^T \mathbf{a}_i \end{aligned}$$

ili u matričnom obliku:

$$\chi_i = \mathbf{U} \mathbf{a}_i \tag{3.26b}$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Pošto je jednačina (3.26) potpuno analogna jednačinama (3.7) i (3.8) za slučaj jednog izlaza, najbolja procjena $\hat{\mathbf{a}}^*$ za \mathbf{a}_i za svako i , regresije, u smislu najmanje sume kvadrata, zadovoljava:

$$\hat{\mathbf{a}}_i^* = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \chi_i = \begin{pmatrix} \hat{a}_{i1}^* & \dots & \hat{a}_{mi}^* \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Izvodjenje jednačine (3.27) je zbog toga identično izvodjenju jednačine (3.16) kada se svi \mathbf{a} , χ iz jednačine (3.6) do (3.16) zamjene sa \mathbf{a}_i , χ_i koji su definisani sa jednačinama (3.23) i (3.24).

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Identifikacija $\hat{\mathbf{a}}$ prema jednačini (3.27) podrazumjeva da je $r \geq m+1$, kao i u slučaju jednog izlaza. Pošto se razmatra ista matrica mjerenja \mathbf{U} za sve i (gdje i označava i -ti red jednačine (3.18), možemo potpuno identifikovati sve elemente od \mathbf{A} , u $(m+1)$ trenutaka mjerenja, gdje se \mathbf{a}_i simultano identifikuje za sve i .

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

IDENTIFIKACIJA LINEARNIH DINAMIČKIH SISTEMA POMOĆU REGRESIJE

Linearni dinamički sistem može se opisati pomoću slijedeće jednačine stanja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (3.29)$$

gdje su \mathbf{x} i u n -dimenzionalni vektor stanja odnosno m -dimenzionalni vektor upravljanja (ulaza). U diskretnom obliku jednačina (3.28) može se pisati kao:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} u_k \quad (3.29)$$

gdje je $t = k \Delta t$, a

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{I} + \Delta t \boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1m} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ b_{n1} & & & & b_{nm} \end{bmatrix} \equiv \Delta t \boldsymbol{\beta}$$

Sada uvodimo definicije:

$$\mathbf{w}_k \equiv (x_{1k} \dots x_{nk}; u_{1k} \dots u_{mk})^T \equiv (w_{1,k} \dots w_{n+m,k})^T = (n+m) \text{ - cni vektor} \quad (3.30)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

$$\phi \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} & b_{11} & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nm} & b_{n1} & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_1)^T \\ \vdots \\ (\phi_n)^T \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Prema tome jednačina (3.29) postaje:

$$x_{k+1} = \Phi w_k \quad (3.32)$$

koja je istog oblika kao jednačina (3.18). Ako memoriramo r skupova mjerenja ($r \geq n+m+1$), tada x_{k+1} , w_k (tj. x_{k+1} , x_k , u_k), elementi od Φ mogu se identifikovati pomoću postupka linearne regresije najmanje sume kvadrata. Iz toga se i -ti red procjene Φ_i od Φ u smislu najmanje sume kvadrata daje sa:

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

$$(\hat{\Phi}_i^*)^T = [(\mathbf{W}_k)^T W_k]^{-1} (\mathbf{W}_k)^T \mathbf{X}_{i,k+1} = [a_{1i} \dots a_{ni}; b_{1i} \dots b_{mi}] \quad (3.33)$$

gdje, analogno jednačini (3.25):

$$\mathbf{W}_k \equiv \begin{bmatrix} W_{1(1)k} & \cdot & \cdot & \cdot & W_{m+n(1)k} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ W_{1(r)k} & \cdot & \cdot & \cdot & W_{m+n(r)k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1(1)k} & \cdot & X_{n(1)k} & U_{1(1)k} & \cdot & U_{m(1)k} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ X_{1(r)k} & \cdot & X_{n(r)k} & U_{1(r)k} & \cdot & U_{m(r)k} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$\chi_{i,k+1} = [X_{i(1)k+1}, \dots, X_{i(\mu)k+1}, \dots, X_{i(r)k+1}]^T \quad (3.35)$$

gdje $\chi_{i(\mu)k+1}$ označava μ -to mjerjenje i -tog stanja χ_{k+1} ($\mu = 1, 2, \dots, r$), a r je broj skupova mjerenja W_k , \mathbf{x}_{k+1} . Opažamo da za identifikovanje Φ moramo da memoriramo r skupova χ_{k+1} i skupova mjerenja vektora χ_k , u_k koji pripadaju jednom integracionom intervalu Δt ranije (označenom kao w_k).

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Može biti moguće da se izmjeri i memorira više skupova \mathbf{x} i \mathbf{u} u toku nekog intervala Δt , tako da je interval uzimanja uzoraka (ili mjerenja) $\tau = \nu \Delta t$ (gdje je $1/\nu =$ cijeli broj), sve dok je u svakom intervalu uzimanja uzoraka ovo \mathbf{x}_k dovedeno u vezu sa \mathbf{w}_k koje pripada ν intervala ranije, da bi dalo \mathbf{x}_{k+1} i \mathbf{x}_k , \mathbf{u}_k što je potrebno za identifikovanje Φ . Odatle, $\mathbf{u}_{j(\mu)k}$ pripada skupu mjerenja koja su uzeta ($r-\mu$) intervala prije $\mathbf{u}_{j(r)k}$, i ($\nu+r-\mu$) intervala prije $\mathbf{x}_{i(r)k+1}$. U cjelini, za identifikovanje \mathbf{A} i \mathbf{B} , prema jednačini (3.33) potrebno je memoriranje $2r$ skupova mjerenja \mathbf{u} .

Pri ovom izvodjenju predpostavlja se da se mogu provesti mjerenja vektora stanja \mathbf{x} . U opštem slučaju su moguća samo mjerenja izlaznog vektora \mathbf{y} , gdje je:

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{n} : \mathbf{n} = \text{vektor šuma} \quad (3.36)$$

Može se desiti da nije moguće neposredno identifikovati **A** i **B** iz **y** jer sistem nije observabilan. Međutim, pošto su za sistem koji se identifikuje pretpostavlja da je observabilan, **A** i **B** se mogu identificirati iz odnosa ulaz/izlaz kao u narednom tekstu, a zatim se može provesti transformacija u natrag u **A** i **B**. Osim toga, ako je dimenzija **n** vektora stanja **x** apriori nepoznata, postupak koji je opisan u nastavku teksta sa prenosnom funkcijom može dati **n**.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

DOBIJANJE MODELA SISTEMA SA VIŠE ULAZA I JEDNIM IZLAZOM U OBLIKU PRENOSNIH FUNKCIJA

Model ulaz/izlaz

Identifikacija pomoću regresije iz prethodnog teksta odnosi se na formulaciju modela u prostoru stanja sistema, što je vidljivo i iz jednačina (3.28) i (3.29). Ako je potrebna identifikacija modela u obliku prenosne funkcije, može se zatim izvršiti transformacija iz prostora stanja u model u obliku prenosne funkcije. Takodjer je moguća i neposredna identifikacija prenosnih funkcija. Predpostavlja se da se proces opisuje preko prenosnih funkcija slijedećeg oblika:

$$G_i(s) = \frac{e^{\tau_i s} (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0)_i}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + 1)_i} = \frac{x}{u_i} \quad (3.37)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

gdje su u_i ulazi , a x je mjerljivi izlaz.

Iako se ovdje razmatraju deterministički ulazi i izlazi formulacija sistema preko prenosnih funkcija iz jednačine (3.37), također vrijedi i za stohastičke sisteme , gdje je u nemjerljivi šum y na ulazu. U tom slučaju, diskretna verzija jednačine (3.37) daje model koji je iz literature poznat kao mješani autoregresivni model pokretne srednje vrijednosti, koji se kasnije koristi za identifikaciju sa šumom na ulazu i izlazu.

U ovom dijelu će se modeli prenosnih funkcija uzimati u diskretnom obliku što je pogodnije za proračun na digitalnom računaru. Radi toga se prvo na jednačinu (3.37) primjenjuju metode diskretizacije koje se zasnivaju na z-transformaciji. Tako se dobija diskretni model prenosne funkcije, koji će se kasnije identifikovati.

Uzmimo sistem dat jednačinom (3.37) formuliran u vremenskom domenu , gdje je:

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = b_m \frac{d^m u(t-\tau)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t-\tau)}{dt} + b_0 u(t-\tau) \quad (3.38)$$

Jednačina (3.38) može se aproksimirati preko konačnih razlika tako da se dx/dt predstavlja sa $[x(t)-x(t-T)]/T$. Imajući na umu da je z^{-1} operator pomaka unazad, možemo pisati da je :

$$\frac{x(t) - x(t-T)}{T} = \frac{(1 - z^{-1})x(t)}{T} \quad (3.39)$$

Primjenjujući obilježavanje operatora pomaka unazad koje su uveli Box , Jenkins i Bacon, gdje je:

$$B \equiv z^{-1} \quad (3.40)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Jednačina (3.39) postaje :

$$\frac{x(t) - x(t - T)}{T} = \frac{(1 - B)x(t)}{T} \quad (3.41)$$

Prema tome, sa zamjenom:

$$\tau \equiv pT \quad (3.42)$$

jednačina (3.38) se može aproksimirati sa:

$$(\alpha_n B^n + \alpha_{n-1} B^{n-1} + \dots + \alpha_1 B + 1)x(t) = B^p (\beta_m B^m + \beta_{m-1} B^{m-1} + \dots + \beta_1 B + \beta_0)u(t) \quad (3.43)$$

Sada se lako izvode relacije izmedju α_i (za svako $i=1, \dots, n$) ; β_j ($j=0, \dots, m$). i a_i (za svako $i=1, \dots, n$) i b_j (za svako $j=0, \dots, m$).

U slučajevima gdje postoji više ulaza mogu se za svaki ulaz ustanoviti modeli oblika jednačine (3.43) , tako da se u toj jednačini uzima $u_i(t)$ umjesto $u(t)$.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Kad se proces sastoji od više neinteraktivnih ulaza, model oblika (3.43) vrijedi za svaki izlaz. Sada ćemo dokazati da ovaj model također odgovara za slučajeve više interaktivnih izlaza.

Uzimamo sistem koji ima dva interaktivna izlaza $x_1(t)$ i $x_2(t)$. Diskretni model prenosne funkcije za taj sistem daie se sa:

$$x_1(t) = \alpha_1 x_1(t-1) + \beta_1 x_2(t-1) + \gamma_1 u(t-1) + \alpha_2 x_1(t-2) + \beta_2 x_2(t-2) + \gamma_2 u(t-2) + \alpha_3 x_1(t-3) + \dots$$

$$x_2(t) = \delta_1 x_1(t-1) + \varepsilon_1 x_2(t-1) + \eta_1 u(t-1) + \delta_2 x_1(t-2) + \varepsilon_2 x_2(t-2) + \eta_2 u(t-2) + \delta_3 x_1(t-3) + \dots \quad (3.44b) \quad 44a)$$

Zamjenom x_2 iz jednačine (3.44b) u jednačinu (3.44a) dobijamo da je :

$$(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots) x_1 =$$

$$\frac{(\delta_1 B + \dots)(\beta_1 B + \dots)x_1}{1 - \varepsilon_1 B - \varepsilon_2 B^2 - \dots} + (\gamma_1 B + \gamma_2 B^2 + \dots + \frac{(\eta_1 B + \dots)(\beta_1 B \dots)}{1 - \varepsilon_1 B - \varepsilon_1 B - \dots})u \quad (3.45)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

što daje :

$$(1 + \xi_1 B + \xi_2 B^2 + \dots)x_1 = (\omega_1 B + \omega_2 B^2 + \dots) u \quad (3.46)$$

gdje se x predstavlja samo pomoću njegove vlastite historije i historije ulaza, kao i u slučaju jednog izlaza.

Važno je uočiti da n , m i p treba da budu unaprijed zadati. Međutim, u opštem slučaju može se uzeti da je najveća vrijednost $m+p$ jednaka M . Proračun se izvodi tako da se u svakom koraku računaju regresioni koeficijenti jednačine

$$(\alpha_n B^n + \alpha_{n-1} B^{n-1} + \dots + \alpha_1 B + 1)x(t) = (\gamma_{m+p} B^{m+p} + \gamma_{m+p-1} B^{m+p-1} + \dots + \gamma_1 B + \gamma_0)u(t) \quad (3.47)$$

i odredjuju parametri α_i ; γ_j . U početku se pretpostave neke vrijednosti $n_0=N$; $m_0+p_0=M$ i za njih se odrede α_i ; γ_j , kao i vrijednost greške za te vrijednosti α_i ; γ_j .

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Zatim se u svakoj iteraciji pretpostavljaju druge vrijednosti za n ili za $m+p$ i za svaku od njih se računaju α_i ; Υ_j i odgovarajuća greška. Na kraju se usvajaju one vrijednosti m i $n+p$ koje daju približni minimum greške uz najnižu vrijednost $m+n+p$. Konačno, nakon dijeljenja lijeve i desne strane polinoma iz jednačine (3.47) dobijaju se n , m i p tako da:

$$\Upsilon_j = 0 \text{ za svako } j = 0, 1, \dots, q \quad (3.48a)$$

je zadovoljeno, stepen p se daje sa:

$$p = q + 1 \quad (3.48b)$$

a β_m iz jednačine (3.43) određuje se iz :

$$\beta_u = \Upsilon_{q+1+\mu} \quad \forall \mu = 0, 1, \dots, m \quad (3.48c)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Za prve pretpostavke najvišeg stepena n_0 i m_0+p_0 , najveći broj potrebnih iteracija biće $1+\log_2(m_0 + n_0 +p_0)$, kada se raspon n_0 ili m_0+p_0 prepolovljava pri svakoj iteraciji.

Primjećujemo da se terminologija mješanih autoregresionih modela pokretne srednje vrijednosti neposredno primjenjuje na jednačinu (3.47), gdje se, za $\Upsilon_1 = \Upsilon_{m+p} = 0$, preostali dio jednačine može shvatiti kao jednačina regresije \mathbf{x} i sa njegovim minulim vrijednostima tako da su α_i koeficijenti autoregresije. Medjutim, za $\alpha_i = 0$ za svaki i i $j \neq 0$, ova jednačina postaje jednačina pokretne srednje vrijednosti, gdje su Υ_j koeficijenti pokretne srednje vrijednosti kada je $u(t)$ nedeterminističko.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

IDENTIFIKACIJA SA NAJMANJOM VARIJANSOM I FUNKCIJOM VJERODOSTOJNOSTI

Razmotrimo sistem koji je zadan sa:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (3.49a)$$

gdje su \mathbf{z} i \mathbf{n} vektori k -dimenzionalnog mjerenja i mjernog šuma, a k označava redni broj mjerenja, i

$$\mathbf{x} = \mathbf{U} \mathbf{a} \quad (3.49b)$$

gdje su \mathbf{U} i \mathbf{x} matrica ulaza odnosno vektori izlaza i parametara, kao u jednačini [\(3.10\)](#). Predpostavljamo da raspolažemo sa k skupova mjerenja i da \mathbf{n} ima Gaussovsku zajedničku raspodjelu tako da

$$p(\mathbf{n}) = f(N,k) \exp(-\mathbf{n}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n}/2) \quad (3.50a)$$

$$E(\mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (3.50b)$$

$$E(\mathbf{n} \mathbf{n}^T) = \mathbf{N} \quad (3.50c)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

gdje E označava očekivanje a f je skalarna funkcija od N i k . Prema tome, ako je očekivanje N apriori poznato, možemo izvesti linearnu procjenu sa najmanjom varijansom (procjenu Markova) vektora parametara \mathbf{a} jednačine (3.49b) na slijedeći način:

Opažajući da se u jednačinama (3.49a) i (3.49b) procjena $\hat{\mathbf{a}}$ parametara \mathbf{a} vezana sa $\hat{\mathbf{n}}$ preko:

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{z} - \mathbf{U} \hat{\mathbf{a}} \quad (3.51)$$

definišemo funkciju vjerodostojnosti $p(\hat{\mathbf{n}})$, tako da je

$$p(\hat{\mathbf{n}}) = p(\mathbf{z} - \mathbf{U} \hat{\mathbf{a}}) \quad (3.52)$$

Procjena $\hat{\mathbf{a}}$ od \mathbf{a} koja maksimizira $\ln p(\hat{\mathbf{n}})$ se daje sa:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{a}}} \left[\ln \left[p(\mathbf{z} - \mathbf{U} \hat{\mathbf{a}}) \right] \right] = 0 \quad (3.53)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

gdje $p(\dots)$ označava vjerovatnoću od (\dots) . Zamjenom sa $p(\mathbf{n})$ iz jednačine (3.50) dobijamo da je:

$$\ln \left[p(\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}) \right] = \ln[f(\mathbf{N}, k)] - (\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}) / 2 \quad (3.54)$$

tako da jednačina (3.53) postaje:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{a}}} \left[\left((\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}) \right) \right] = 0 \quad (3.55)$$

Jednačina (3.55) daje :

$$\mathbf{U}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{a}^* - \mathbf{U}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{z} = 0 \quad (3.56a)$$

ili za nesingularnu $\mathbf{U}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{U}$:

$$\mathbf{a}^* = (\mathbf{U}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{z} \quad (3.56b)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

gdje je \mathbf{a}^* linearna (Markovljeva) procjena sa najmanjom varijansom od \mathbf{a} koja je (neuslovna) procjena najveće vjerodostojnosti, za Gaussovu raspodjelu \mathbf{n} , pošto ona maksimizira funkciju vjerodostojnosti jednačine (3.52).

Primjećujemo da je procjena sa najmanjom varijansom \mathbf{z}^* iz jednačine (3.56b) u stvari procjena ponderisane regresije. Matrica ponderisanja \mathbf{N}^{-1} uvodi se u procjenu regresije najmanje sume kvadrata iz jednačine (3.16), koja je data sa:

$$\mathbf{a}^* = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z} \quad (3.57)$$

Očigledno je, ako ne raspolažemo ni sa kakvim znanjem o \mathbf{N} (što je opšti slučaj), možemo pretpostaviti da je $\mathbf{N} = \sigma^2 \mathbf{I}$ (σ je skalar), tako da jednačine (3.56b) i (3.57) postaju identične. Medjutim, ako je kovarijansa raznih komponenti \mathbf{n} apriori poznata procjena \mathbf{a} je data u jednačini (3.56b).

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Pošto za Gaussovo \mathbf{n} , kada su komponente vektora \mathbf{n} medjusobno nezavisne uzimamo $\mathbf{N} = \sigma^2 \mathbf{I}$, procjena regresije najmanje sume kvadrata ujedno je procjena najveće vjerodostojnosti. Iz toga slijedi da procjena pomoću najmanje sume kvadrata ima iste osobine kao i procjena najveće vjerodostojnosti. Prema tome, obadvije procjene su bez sistematske greške (unbiased). Naime, za dovoljan broj mjerenja, $E[\mathbf{a}^*]$ jednako je \mathbf{a} i konzistentne su. One su takodjer efikasne (tj. uz pretpostavku da ne postoji asimetričnost područja grešaka, za neki dovoljan broj mjerenja, one daju procjene parametara koje imaju najmanju varijansu razlike izmedju stvarnih vrijednosti i vrijednosti mjerenja predskazanih iz bilo kojih parametara koji se mogu razmatrati za date podatke).

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Kada se izvodi identifikacija pomoću najmanje sume kvadrata miješanog autoregresionog Gaussovskog procesa pokretne srednje vrijednosti šuma, bilo koja procjena pomoću najmanje sume kvadrata samih autoregresivnih parametara nije efikasna, jer zanemaruje druge parametre. Ovakva procjena nema najveću vjerodostojnost, jer se transformacijom ovog miješanog autoregresionog modela pokretne srednje vrijednosti, dobija da višedimenzionalni vektor šuma \mathbf{n} nije nezavistan, tj. $\mathbf{N} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$, kada postoje članovi pokretne srednje vrijednosti.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

REGRESIONA IDENTIFIKACIJA NELINEARNIH PROCESA

Kako statički tako i dinamički procesi mogu da imaju nelinearne karakteristike koje se ne mogu zanemariti. Kada se raspolaže sa prethodnim znanjem o vrsti nelinearnosti, mogu se identifikovati parametri "pravih" nelinearnih funkcija. Primjer za prethodne slučajeve javlja se onda kada je iz teoretskih razmatranja poznato da odnos između nekih promjenljivih u nekom procesu, kao što je odnos između brzine w i pritiska p , ima eksponencijalni oblik, naprimjer:

$$w = k_1 \exp(k_2 p) + k_3$$

gdje se traži identifikovanje k_1 , k_2 i k_3 .

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Kada nije poznat tip nelinearne funkcije, tada je potrebna neka aproksimacija za stvarnu nelinearnost, recimo pomoću polinomske aproksimacije. Međutim, u svim slučajevima identifikacija se može vršiti samo ako se prepostavi specifičan tip nelinearne funkcije aproksimacije, čiji se parametri trebaju identifikovati. Dakle, problem identifikacije se ponovo odnosi na problem procjene parametara neke apriori date funkcije.

U nastavku ovog poglavlja mi ćemo učiniti pokušaj da se pridje ovim vrstama problema nelinearne identifikacije, tj. kada je tip nelinearne funkcije apriori poznat, ili kada je on aproksimiran, kroz primjenu tehnike nelinearne regresije, i da se razmotri tip funkcija aproksimacije koje daju odgovarajuću aproksimaciju.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Polinomska aproksimacija

Da bi opisali metode za identifikovanje nelinearnih procesa pomoću regresije, prvo razmotrimo polinomsku aproksimaciju u smislu trećeg stepena najmanje sume kvadrata nekog dinamičkog procesa koji ima dvije promjenljive stanja x_1 i x_2 i jednu promjenljivu upravljanja u , i to:

$$X_{i,k+1} = a_{i1} X_{1,k} + a_{i2} X_{2,k}^2 + a_{i3} X_{1,k}^3 + b_{i1} X_{2,k} + b_{i2} X_{2,k}^2 + b_{i3} X_{2,k}^3 + c_{i1} u + c_{i2} u^2 + c_{i3} u^3$$

$$\text{@ } i = 1,2 \quad (3.58)$$

Ovdje primjećujemo, koristeći Weierstrasseovu teoremu, da se kontinualne nelinearne funkcije od x mogu aproksimirati polinomom po x , tako da aproksimacije konvergiraju originalnim funkcijama. Zatim se definiraju vektori \mathbf{z} i α , i da bi se omogućila primjena postupka regresione identifikacije za identifikovanje procesa, jednačina (3.58), tako da je:

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

$$\mathbf{z} \equiv [z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9]^T \equiv [x_{1k} x_{1k}^2 x_{1k}^3 x_{2k} x_{2k}^2 x_{2k}^3 u_k u_k^2 u_k^3]^T \quad (3.59a)$$

$$i \quad \mathbf{a}_i \equiv (\alpha_{i,1} \dots \alpha_{i,9})^T = (a_{i1} a_{i2} a_{i3} b_{i1} b_{i2} b_{i3} c_{i1} c_{i2} c_{i3})^T \quad (3.59b)$$

Dosljedno tome. jednačina (3.58) postaje

$$x_{i,k+1} = \mathbf{z}^T \alpha_i \quad (3.60)$$

koja je potpuno analogna jednačinama (3.5) i (3.6). odnosno ima oblik linearne regresije.

Elementi od α koji se javljaju u polinomu trećeg stepena koji je upotrebljen za aproksimaciju ovog procesa sada se proračunavaju slijedeći izvodjenje jednačina (3.5) do (3.16). Kod posljednjeg izvodjenja zamjenjujemo \mathbf{x} , \mathbf{U} i \mathbf{a} iz jednačina (3.5) i (3.6) sa $x_{1,k+1}$, \mathbf{z} i \mathbf{a} iz jednačina (3.59). Prema tome, \mathbf{x} i \mathbf{U} iz jednačina (3.7) i (3.8) izvode se u obliku $x_{i,k+1}$, a elementi od \mathbf{z} i α_i daju se pomoću jednačine (3-16).

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Ako se razmatra polinomska aproksimacija višeg stepena nego u jednačini (3.58) , slijedi se potpuno isti postupak kao i u jednačinama (3.58) do (3.60), ali za veći broj članova. Posljednji postupak očigledno se također može primjeniti i na statičke procese (tj. kada se zanemare indeksi k i $k+1$ iz jednačine (3.58). On se , u principu , može primjeniti na veći broj promjenljivih nego u jednačini (3.58).

U nekim slučajevima moramo identifikovati koeficijente polinomske aproksimacije, gdje se javljaju eksponenti funkcija promjenljivih procesa, a ne eksponeti samih promjenljivih procesa, kao što je:

$$X_{i,k+1} = a_{i1} f(X_{1,k}) + a_{i2} f^2(X_{1,k}) + a_{i3} f^3(X_{1,k}) + b_{i1} f(X_{2,k}) + b_{i2} f^2(X_{2,k}) + b_{i3} f^3(X_{2,k}) + c_{i1} f(u_k) + c_{i2} f^2(u_k) + c_{i3} f^3(u_k) \quad (3.61)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

U ovom slučaju se elementi od \mathbf{z} definiraju na slijedeći način:

$$\mathbf{z} \equiv [z_1 z_2 z_3 \dots z_9]^T \equiv [f(x_{1k}) : f^2(x_{1k}) : f^3(x_{1k}) : \dots : f^3(u_k)]^T \quad (3.62)$$

a ostali dio izvodjenja je kao u jednačini (3.58). U slučajevima kada se u polinomu koji se definiše javljaju članovi sa mješanim promjenljivim, kao što je:

$$X_{i,k+1} = a_{i1} X_{1k} + a_{i2} X_{1k} X_{2k} + a_{i3} X_{1k}^2 + \dots \quad (3.63)$$

\mathbf{z} se ponovo definiše kao :

$$\mathbf{z} \equiv [z_1 z_2 z_3 \dots z_9]^T \equiv [x_{1k} : x_{1k} x_{2k} : x_{1k}^2 : \dots]^T \quad (3.64)$$

i izvodjenje se nastavlja kao u slučaju jednačine (3.58).

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Potpuno isto kao i u slučajevima linearne regresije , tražimo da je broj skupova mjerenja $r \geq \omega + 1$ gdje je ω dimenzija od z iz jednačina (3.59) ili (3.62) , da bi se omogućilo određivanje α_i iz jednačine (3.60), dok se sa aproksimacionim modelom izbjegava svrstavanje mjerenih podataka.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Ortogonalni polinomi

Između raznih vrsta polinoma koji se upotrebljavaju za aproksimiranje nelinearnih procesa posebnu pažnju zaslužuje aproksimacija pomoću ortogonalnih polinoma. Ti polinomi imaju izvjesne osobine koje ih čine veoma privlačnim za filtriranje podataka čije su karakteristike apriori nepoznate. Neke od tih osobina su:

1. Zbog ortogonalnosti je proračun koeficijenata polinomske jednačine kojom se aproksimira neki proces brži nego sa neortogonalnim polinomima. Ova osobina je posebno važna kod ručnih proračuna.
2. Koeficijenti polinomske jednačine nezavisni su od najvišeg eksponenta u razmatranoj polinomskoj jednačini. Zbog toga, kada prethodno nije poznat stepen polinoma, može se izvršiti provjera sa više raznih vrijednosti najvišeg stepena.¹⁵⁷

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Pri tome, svi koeficijenti nižeg stepena ostaju isti. Ova osobina je posebno važna ako se traži najbolji stepen polinomske aproksimacije.

3. Polinomi Chebisheva, koji se najviše primjenjuju za nelinearne aproksimacije imaju osobinu skoro jednake greške . To znači da greške aproksimacije unutar opsega mjerenja osciliraju između dvije granice koje su skoro jednake, kao na narednoj slici 3.3. Zahvaljujući toj osobini, ne dešava se da se pri aproksimiranju dobiju na krajnjim djelovima opsega aproksimacije greške koje su velike u odnosu na ostale djelove opsega. Time se ustvari vrši "prigušivanje" greške aproksimacije.

Da bi ilustrovali identifikaciju nelinearnih procesa pomoću aproksimacija ortogonalnim polinomom, razmotrićemo

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

slijedeće jednačine aproksimacije kojima se vežu \hat{y} i x za jednodimenzionalni sistem :

$$\hat{y}(x) = b_0 F_0(x) + b_1 F_1(x) + \dots + b_m F_m(x) \quad (3.65)$$

gdje x i \hat{y} označavaju promjenljive ulaza i procjenjenog izlaza nelinearnog procesa (kod problema predskazivanja ili filtriranja vremenskih nizova, x može da predstavlja vrijeme). U prikazanom slučaju $F_v(x)$ predstavlja ortogonalni polinom stepena v ($v=1, \dots, m$) koji ima osobinu ortogonalnosti da:

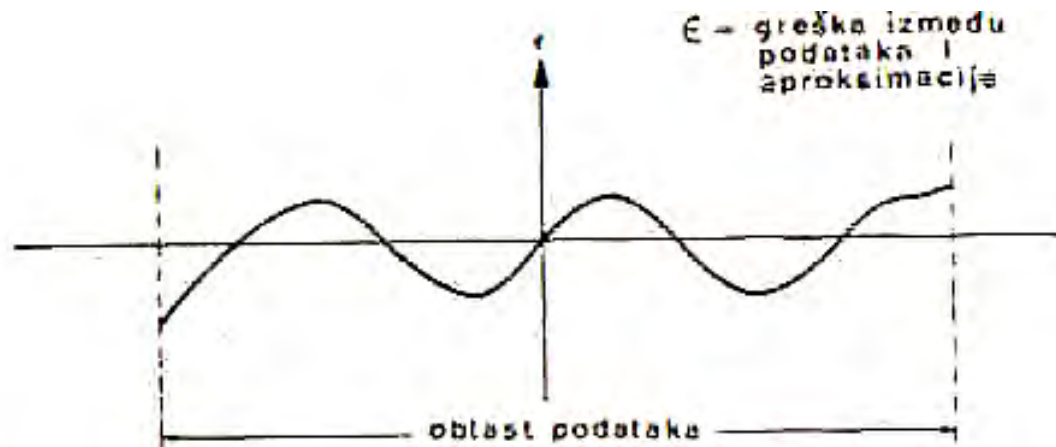
$$\sum_{i=0}^r F_\mu(x_i) F_\nu(x_i) = 0 \quad \forall \mu \neq \nu \quad (3.66a)$$

ili , u opštem obliku:

$$\int_a^b w(x) F_\mu(x) F_\nu(x) dx = 0 \quad \forall \mu \neq \nu \quad (3.66b)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

gdje su μ i ν nenegativni cijeli brojevi, a r je broj mjerenja.



Slika 3.3 Osobina skoro jednake greške kod aproksimacije polinomom Chebisheva

Prilikom identifikovanja koeficijenata b_j iz jednačine (3.65), opet se zahtjeva da je $r > m + 1$. Ako bi uzeli da je $m = r$, dobili bi koristeći proceduru identifikacije, onoliko jednačina koliko ima nepoznatih b_j . Kada bi iz ovih jednačina odredili b_j , dobili bi funkciju $y(x)$ koju bi identički zadovoljavalo svih r skupova mjerenja.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Medjutim tada nebi došlo do filtriranja mjerenih podataka, što je u ovom slučaju nepoželjno.

Kako je ranije navedeno, polinomi Chebisheva su najpogodniji za aproksimaciju pomoću ortogonalnih polinoma zbog osobine pod 3. u prethodnom tekstu. Polinom Chebisheva se definira kao:

$$F_v(\xi) = T_v(\xi) = \cos(v \arccos \xi) : \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (3.67)$$

i ima osobinu ponderisane ortogonalnosti koja se izražava na slijedeći način:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_\mu(\xi) T_\nu(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \begin{cases} 0 & \infty \mu \neq \nu \\ \pi/2 & \infty \mu = \nu \neq 0 \\ \pi & \infty \mu = \nu = 0 \end{cases} \quad (3.68)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

gdje je $\sqrt{1-\xi^2}$ ponder funkcije $\omega(\xi)$ iz jednačine (3.66b). U narednoj tabeli T 3.1 dato je više polinoma Chebisheva do 6-og reda.

Polinomi Čebiševa $T_n(\xi)$ reda 0 do 6

$$T_0(\xi) = 1$$
$$T_1(\xi) = \xi$$
$$T_2(\xi) = 2\xi^2 - 1$$
$$T_3(\xi) = 4\xi^3 - 3\xi$$
$$T_4(\xi) = 8\xi^4 - 8\xi^2 + 1$$
$$T_5(\xi) = 16\xi^5 - 20\xi^3 + 5\xi$$
$$T_6(\xi) = 32\xi^6 - 48\xi^4 + 18\xi^2 - 1$$

$$T_{n+1}(\xi) = 2\xi T_n(\xi) - T_{n-1}(\xi)$$

Tabela T 3.1

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Promjenljiva na apscisi (x u jednačini (3.65)) obično treba da se transformiše da bi zadovoljila zahtjeve u pogledu opsega vrijednosti za ξ izraženih preko jednačine (3.67). Kada se raspolože sa $T_v(\xi)$, tada se $T_{v+1}(\xi)$ može dobiti preko rekurzivnog izraza :

$$T_{v+1}(\xi) = 2\xi T_v(\xi) - T_{v-1}(\xi) \quad (3.69)$$

koji je posljedica definicije $T_v(\xi)$ u jednačini (3.67).

Aproksimacija u smislu najmanje sume kvadrata pomoću polinoma Chebisheva \hat{y} od y vrši se tako da se minimizira po S , gdje je S dato sa :

$$S = \int_{-1}^1 w(\xi) \left[y(\xi) - \sum_{i=0}^m b_i T_i(\xi) \right]^2 d\xi \quad (3.70)$$

Na taj način se dobija :

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

$$b_k = \frac{\int_{-1}^1 w(\xi) y(\xi) T_k(\xi) d\xi}{\int_{-1}^1 w(\xi) T_k^2(\xi) d\xi} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{y(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi & \propto k = 0 \\ \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{y(\xi) T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi & \propto k \neq 0 \end{cases} \quad (3.71)$$

Kada se ovako odrede b_j dobije se aproksimacija:

$$\hat{y}(\xi) = \sum_{k=0}^m b_k T_k(\xi) \quad (3.72)$$

Relativno jednostavan algoritam za b_k je posljedica ortogonalnosti. Zapažamo da b_k iz jednačine (3.71) nisu zavisni od izbora m .

Zbog toga promjena m ne traži da se ponovo računaju b_j , $\forall j \leq m$ dok je kod neortogonalnih aproksimacija potrebno prilično dugotrajno ponovno računanje b_k .

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Polinomi Chebisheva imaju još jednu važnu osobinu. Ako argument ξ_i ima slijedeće vrijednosti:

$$\xi_i = \cos[(2i + 1)\pi/2n] : \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.73)$$

onda je zadovoljen slijedeći izraz za $\mu, \nu < n$:

$$\sum_{j=0}^n T_\mu(\xi_j) T_\nu(\xi_j) = \begin{cases} 0 & \propto \mu \neq \nu \\ \frac{n}{2} & \propto \mu = \nu \neq 0 \\ n & \propto \mu = \nu = 0 \end{cases} \quad (3.74)$$

koji se može nazvati osobina diskretne ortogonalnosti.

Opažamo da je u jednačini (3.74) ponderska funkcija $\omega(\xi)$ iz jednačine (3.66b) je jedinica. Prema tome, $\omega(\xi)$ koju treba uzeti u jednačini (3.70) takodjer je jedinica. Funkcija S u ovom slučaju ima oblik:

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} \left[y(\xi_j) - \sum_{k=0}^m b_k T_{k_i}(\xi_j) \right]^2 \quad (3.75)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Koeficijenti b_k koji minimiziraju ovo S su:

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y(\xi_j) \quad (3.76a)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y(\xi_j) T_k(\xi_j) \quad (3.76b)$$

Ovi izrazi su lakši za računanje nego oni koji su dati jednačinom (3.71) iako zahtjevaju da raspolažemo sa vrijednostima $y(\xi_i)$ za vrijednosti ξ_i date jednačinom (3.73).

Primjer:

Da bi se ilustrirala primjena aproksimacija pomoću polinoma Chebisheva, razmotrimo aproksimaciju funkcije $y(\xi) = \xi^4 \quad \forall |\xi| < 1$ pomoću polinoma Chebisheva drugog stepena na slijedeći način:

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Odredimo broj tačaka koje ćemo uzeti u račun i to $n=3$.
Prema tome, uzimajući u obzir jednačinu (3.73),

$$\xi_0 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad i \quad \xi_1 = \cos \frac{3\pi}{6} = 0 \quad : \quad \xi_2 = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

i prema jednačini (3.74):

$$b_0 = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 + 0^4 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 \right] = \frac{3}{8}$$

$$b_1 = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 \right] = 0$$

$$b_2 = \frac{2}{3} \left[2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^6 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 + 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^6 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 \right] = \frac{3}{8}$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Višedimenzionalni ortogonalni polinomi

Primjena ortogonalnih polinoma na višedimenzionalne probleme manje je u upotrebi nego za jednodimenzionalne slučajeve, radi poteškoća računarske prirode pri generisanju tih polinoma. Inače, višedimenzionalna formulacija ortogonalnih polinoma je potpuno analogna jednodimenzionalnom slučaju:

$$\int \dots \int w(x_1 : \dots x_n) F_{\mu, \nu, \dots, \Omega}(x_1 : \dots x_n) F_{\mu', \nu', \dots, \Omega'}(x_1 : \dots x_n) dx_1 \dots dx_n = 0 \quad (3.77)$$

gdje x_1 do x_n označavaju elemente višedimenzionalnog x i zbog toga je slična ranije opisanom postupku. Pogodan oblik generiranja $F_{\mu, \nu, \dots, \Omega}$ je :

$$F_{\mu, \nu, \dots, \Omega}(x_1 \dots x_n) = F_{\mu}(x_1) F_{\nu}(x_2) \dots F_{\Omega}(x_n) \quad (3.78)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

gdje su $F_\mu : F_\nu \dots F_\Omega$ jednodimenzionalni ortogonalni polinomi. Na osnovu toga, a radi ortogonalnosti $F_\mu(x_1) \dots F_\Omega(x_n)$, dobijamo:

$$\int \dots \int w(x_1 \dots x_n) F_{\mu'}(x_1) \dots F_{\Omega'}(x_n) dx_1 \dots dx_n =$$

$$\int w_1 F_\mu(x_1) F_{\mu'}(x_1) dx_1 \int w_2 F_\nu(x_2) F_{\nu'}(x_2) dx_2 \dots \int w_n F_\Omega(x_n) F_{\Omega'}(x_n) dx_n = \quad (3.79)$$

$$0 \quad \forall \mu : \nu \dots \Omega \neq \mu' : \nu' \dots \Omega'$$

čime se zadovoljava jednačina (3.77).

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Odredjivanje najboljeg stepena polinomske aproksimacije

Najbolji stepen m^* polinomske aproksimacije može se odrediti na osnovu pretpostavki da mjerenja $y_{(i)}$, indeks i označava i -to mjerenje, $i=1,2,\dots,r$, imaju nezavisnu Gaussovsku raspodjelu oko nekog polinoma y stepena $m^* + \mu$, gdje je:

$$\hat{y}_{m^*+\mu}(x_i) = \sum_{j=0}^{m^*+\mu} b_j x_i^j \quad (3.80)$$

Varijansa σ^2 raspodjele $y - \hat{y}$ nezavisna je od μ .

Očigledno, za vrlo malo m ($m=0,1,2,\dots$), σ_m^2 smanjuje se sa povećanjem m . Pošto je, pod prethodnom pretpostavkom variјansa σ_m^2 nezavisna od m , slijedi da je najbolji stepen m^* najniže m za koje je $\sigma_m \cong \sigma_{m+1}$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Odredjivanje m^* traži da se računaju polinomske aproksimacije različitog stepena. Pošto b_i iz jednačine (3.80) može da bude zavisno o stepenu polinoma m i ovdje se preporučuje aproksimacija ortogonalnim polinomom, jer ona eliminira potrebu za ponovnim računanjem svih b_i za svako m , kako je već prethodno pokazano.

Identifikacija apriori datih proizvoljnih nelinearnih funkcija

U mnogim slučajevima na osnovu teorijskih razmatranja raspoložemo sa nelinearnim analitičkim modelom čije parametre je potrebno identificirati. U tim slučajevima, može se primjeniti regresiona analiza na slijedeći način:

Razmotrimo neki proces koji je zadat izrazom:

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

$$y = a_0 + a_1 x_1 x_2^3 + a_2 x_2 \exp\left(-a_3 \frac{x_1^2}{x_3}\right) + \frac{a_4 x_4}{\sqrt{1 - a_5 x_5^2}} \quad (3.81)$$

Da bi identifikovali prethodno dati proces, definisaćemo slijedeće nove promjenljive:

$$\xi_1 \equiv x_1 x_2^3 : \xi_3 \equiv x_2 : \xi_5 \equiv x_5 \quad \xi_2 \equiv \frac{x_1^2}{x_3} : \xi_4 \equiv x_4 \quad (3.82)$$

što daje:

$$y = a_0 + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 \exp(-a_3 \xi_2) + \frac{a_4 \xi_4}{\sqrt{1 - a_5 \xi_5^2}} \quad (3.83)$$

Sada vršimo linearizaciju jednačine (3.83) vršeći samo male perturbacije njenih promjenljivih. Na osnovu toga dobijamo:

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

$$\begin{aligned} \Delta y = & a_1 \Delta \xi_1 - a_2 a_3 \xi_3 \exp(-a_3 \xi_2) \Delta \xi_2 \\ & + a_2 \exp(-a_3 \xi_2) \Delta \xi_3 + \frac{a_4}{\sqrt{1 - a_5 \xi_5^2}} \Delta \xi_4 + \frac{a_4 a_5 \xi_4 \xi_5}{\sqrt{1 - a_5 \xi_5^2}} \Delta \xi_5 \end{aligned} \quad (3.84)$$

Zatim definiramo:

$$\begin{aligned} b_1 & \equiv a_1 \\ b_2 & \equiv -a_2 a_3 \xi_3 \exp(-a_3 \xi_2) \\ b_3 & \equiv a_2 \exp(-a_3 \xi_2) \\ b_4 & \equiv \frac{a_4}{\sqrt{1 - a_5 \xi_5^2}} \\ b_5 & \equiv \frac{a_4 a_5 \xi_4 \xi_5}{\sqrt{1 - a_5 \xi_5^2}} \end{aligned} \quad (3.85)$$

što daje:

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

$$\Delta y = b_1 \Delta \xi_1 + b_2 \Delta \xi_2 + b_3 \Delta \xi_3 + b_4 \Delta \xi_4 + b_5 \Delta \xi_5 = \sum_i b_i \Delta \xi_i \quad (3.86)$$

Očigledno je da se b_1 do b_5 mogu identificirati pomoću linearne regresije, kako je to već izloženo ranije. Zatim vidimo da je :

$$b_5 = b_4 a_5 \xi_4 \xi_5 \quad (3.87)$$

da bi se dobilo a_5 pošto su x_4 i x_5 mjerljivi. Zamjenom posljednjeg rezultata za a_5 u izrazu za b_4 u jednačini (3.85), određujemo a_4 . Član a_1 neposredno se daje pomoću b_1 prema jednačini (3.85), dok se a_2 i a_3 moraju odrediti iz izraza za b_2 i b_3 iste jednačine i to:

$$b_2 = - a_3 \xi_3 b_3 \quad (3.88)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

gdje je x_3 mjerljivo , pa se tako dobije i a_3 . Konačno se a_2 određuje zamjenom a_3 u izraz za b_3 u jednačini (3.85).

Na sličan način mogu se izvršiti identifikacije i mnogih drugih nelinearnih izraza. Procesi koji su dati sa eksponencijalnim funkcijama oblika:

$$y = a e^{bx} \quad (3.89)$$

mogu se identifikovati pomoću regresije ako se zadaju u logaritamskom obliku:

$$\log y = \log a + b x \quad (3.90)$$

Definirajući da je:

$\log y \equiv Y$, $\log x \equiv X$, i $\log a \equiv A$, dobijamo da je:

$$Y = A + bx \quad (3.91)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

gdje se A i b lako mogu preračunati pomoću linearne regresije .

Slično tome, kod procesa oblika:

$$y = a x^b \quad (3.92)$$

možemo razmatrati $\log y$, dobijajući relaciju

$$\log y = \log a + b \log x \quad (3.93)$$

iz koje se a i b mogu odrediti kao i u slučaju jednačine (3.91). Medjutim, postoje slučajevi kada ove metode nisu primjenjive i potrebna je bar još neka informacija. Primjer sistema gdje ova posljednja metoda ne vrijedi je:

$$y = a_0 + a_1 \log (a_2 + x) \quad (3.94)$$

gdje je potrebna identifikacija za a_0 , a_1 i a_2 . Ovdje će male perturbacije dati:

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

$$\Delta y = \frac{a_1}{a_2 + x} \Delta x = b \Delta x \quad (3.95)$$

gdje se b može identifikovati pomoću linearne regresije, dajući

$$b = \frac{a_1}{a_2 + x} \quad (3.96)$$

što ne pruža rješenje za a_0 , a_1 i a_2 . Naravno da je moguće upotrebiti drugi ili viši parcijalni izvod (ili perturbacije drugog ili višeg reda), ali u praktičnim slučajevima to može da bude neupotrebljivo, jer su ti izvodi obično bezvrijedni, naročito ako mjerenja sadrže šum.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

4. IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKVENCIJALNE REGRESIJE

Tehnike identifikacije koje se zasnivaju na sekvencijalnoj regresiji najmanje sume kvadrata mogu se primjenjivati na linearne i nelinearne stacionarne sisteme, gdje mogu da budu zamjena za tehnike nesekvencijalne regresije iz prethodnog poglavlja. Njihova sekvencijalna karakteristika omogućava brzo dobijanje rezultata, a ne zahtjevaju veliku memoriju računara za pamćenje parova vrijednosti ulaza i izlaza.

Kod sekvencijalnog postupka eliminiraju se poteškoće koje mogu nastati kod matrične inverzije, čime se prevazilazi velika prepreka u primjeni postupka regresije za višedimenzionalne slučajne promjenljive kod realnih sistema.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

Kod primjene tehnike regresije iz prethodnog poglavlja, na identifikovanje nestacionarnih procesa koji se sporo mijenjaju, stacionarnost se predpostavlja samo u intervalu za kojeg su prikupljeni podatci za identifikaciju pomoću regresije. Interval regresije se sastoji od r intervala uzimanja uzoraka. Na taj način se identifikacija gotovo neprekidno ažurira, jer se kraj obično fiksiranog intervala regresije pomjera vremenom unaprijed, za jedan ili više intervala mjerenja. Zbog toga se za svako takvo pomjerenje naprijed, vektor svih parametara ponovo mora identificirati, dok se podatci koji ne pripadaju novom intervalu regresije potpuno odbacuju. Suprotno nesekvencijalnoj regresiji, kod sekvencijalne regresije se interval za kojeg su prikupljeni podatci neprekidno produžava tokom vremena, i nikakav podatak ne postaje dovoljno star da bi se odbacio. Zbog toga izgleda da je sekvencijalna regresija (i stohastička

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

aproksimacija), ograničena na stacionarne procese.

Medjutim, pošto procjene sekvencijalne regresije konvergiraju procjenama nesekvencijalne regresije nakon m iteracija (gdje je m dimenzija vektora parametara), to se stacionarnost treba pretpostaviti samo za m intervala, kao i u nesekvencijalnom slučaju.

U praksi se, zbog toga, sekvencijalna procjena bilo koje vrste može primjeniti na podatke prikupljene za neki konačni interval, uz pretpostavku da je u toku njega sistem stacionaran i to na slijedeći način:

Uzmimo neki interval T od $t-T$ do t , u kojem je uzeto n uzoraka u trenutcima $0, 1, \dots, k, \dots, (n-1)$. Možemo da izvršimo identifikaciju pomoću sekvencijalne regresije počinjući od k skupova uzoraka, zatim za $k+1$, $k+2$, itd, sve do n -tog skupa uzoraka, što daje konačnu procjenu

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

identifikacije u vremenu t . Sada, u vrijeme $t + \Delta t$ ($\Delta t = T/n$), ponavljamo cijeli postupak regresione procjene tako da se prvi uzorak mjeri u $T - t + \Delta t$, i tako dalje, sve dok se ne izmjeri n skupova uzoraka u $t + \Delta t$ što bi dalo konačnu procjenu identifikacije u $t + \Delta t$. Isti se postupak može ponoviti za $t + 2\Delta t$, $t + 3\Delta t$, ..., $t + j\Delta t$, Odluka o ponovnom otpočinjanju identifikacije sekvencijalnom regresijom može se zasnivati na ponašanju indeksa S performanse identifikacije, kao u jednačini [\(3.11\)](#), ako se ne sumnja na neku nestacionarnost. Također se može izvršiti određivanje apriori nepoznatog reda vektora stanja ili modela autoregresivne pokretne srednje vrijednosti, jedanput za uvijek.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

Skalarni slučaj

Uzmimo neki nepoznati sistem kao što je:

$$x_k = a u_k + n_k \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad (4.1)$$

gdje su u_k i x_k nizovi mjerljivih ulaza i izlaza, a n_k je šum kod mjerenja u k -tom trenutku uzimanja uzoraka. Problem identifikacije je problem procjene nepoznatog parametra a sistema, i može se riješiti kroz upotrebu linearne regresije najmanje sume kvadrata. Na osnovu toga, vrši se procjena \hat{a}_r od a , koja se zasniva na r skupova mjerenja u_k i x_k ($k=1, 2, \dots, r$). tako da se minimizira indeks troškova J_E :

$$J_E = \sum_{k=1}^r q_k (x_k - \hat{a}_r u_k)^2 \quad (4.2)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

gdje je q_k proizvoljni koeficijent ponderisanja, na primjer $q_k=1$. Uvodjenje $q_k=k$ u jednačinu (4.2) može poslužiti da se da veći ponder novijim mjerenjima. Procjena regresije najmanje sume kvadrata \hat{a}_r od a , daje se sa:

$$\frac{\partial J_r}{\partial \hat{a}_r} = 0 = -2 \sum_{k=1}^r q_k u_k (x_k - \hat{a}_r u_k) \quad (4.3)$$

što daje:

$$\hat{a}_r = \frac{\sum_{k=1}^r q_k u_k x_k}{\sum_{k=1}^r q_k u_k^2} \quad (4.4)$$

Dobijanje \hat{a}_r može se sprovesti sekvencijalno, tako da se dobije rezultat koji je identičan jednačini (4.4) poslije r skupova mjerenja i to na slijedeći način:

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

Iz jednačine (4.4) određujemo da je :

$$\hat{a}_1 = \frac{q_1 u_1 x_1}{q_1 u_1^2} \quad (4.5)$$

$$\hat{a}_2 = \frac{q_1 u_1 x_1 + q_2 u_2 x_2}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} \quad (4.6)$$

Medjutim jednačina (4.6) se može pisati i kao:

$$\begin{aligned} \hat{a}_2 &= \hat{a}_1 - \frac{\hat{a}_1 q_1 u_1^2 + \hat{a}_1 q_2 u_2^2}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} + \frac{q_1 u_1 x_1 + q_2 u_2 x_2}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} = \\ &= \hat{a}_1 + \frac{q_1 u_1 (x_1 - \hat{a}_1 u_1) + q_2 u_2 (x_2 - \hat{a}_1 u_2)}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

Zamjenom \hat{a}_1 iz jednačine (4.5) u drugi član na desnoj strani jednačine (4.7), dobija se:

$$\begin{aligned}\hat{a}_2 &= \hat{a}_1 + \frac{q_1 u_1 (x_1 - \frac{(q_1 x_1 u_1)}{q_1 u_1^2} u_1) + q_2 u_2 (x_2 - \frac{(q_1 x_1 u_1)}{q_1 u_1^2} u_2)}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} \\ &= \hat{a}_1 + \frac{0 + q_2 u_2 (x_2 - \hat{a}_1 u_2)}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} = \hat{a}_1 + \frac{q_2 u_2 (x_2 - \hat{a}_1 u_2)}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2}\end{aligned}\quad (4.8)$$

i na sličan način dobijemo:

$$\hat{a}_j = \hat{a}_{j-1} + p_j q_j u_j (x_j - \hat{a}_{j-1} u_j) \quad (4.9)$$

gdje je :

$$\hat{a}_0 = 0 \quad (4.10)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

Dosljedno tome:

$$1/p_1 = q_1 u_1^2 \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{p_2} = q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2 \quad (4.12)$$

|

$$\frac{1}{p_j} = \sum_{k=1}^j q_k u_k^2 = \frac{1}{p_{j-1}} + q_j u_j^2 \quad \forall j > 1 \quad (4.13)$$

primjećujemo da je sekvencijalno izveden rezultat jednačina (4.9) i (4.13) identičan rezultatu jednačina (4.6) izveden za sve vrijednosti r .

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

Slučaj više parametara

Uzmimo sistem sa više parametara koji se daje sa:

$$x_k = a_1 u_{1,k} + a_2 u_{2,k} + \dots + a_m u_{m,k} + n_k \quad (4.14)$$

gdje su a_i ($i = 1, \dots, m$), nepoznati parametri koji traže identifikaciju, x_k je izlaz sistema u k-tom trenutku uzimanja uzoraka, $u_{i,k}$ je i-ti ulaz sistema u k-tom intervalu uzimanja uzorka, a n_k je mjerni šum. Jednačina (4.14) se može pisati u vektorskom obliku kao:

$$x_k = \mathbf{a}^T \mathbf{u}_k + n_k \quad (4.15)$$

gdje su:

$$\mathbf{a}^T \equiv [a_1 \dots a_m] \quad (4.16)$$

$$\mathbf{u}_k \equiv [u_{1,k} \dots u_{m,k}]^T \quad (4.17)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

Procjena vektora parametara \mathbf{a} se vrši tako da procjenjeno $\hat{\mathbf{a}}_r$ minimizira indeks troškova J_r . Ovdje r označava broj skupova mjerenja gdje, analogno jednačini (4.2):

$$J_r = \sum_{k=1}^r q_k (x_k - \hat{\mathbf{a}}_r^T \mathbf{u}_k)^2 \quad (4.18)$$

Prema tome, $\hat{\mathbf{a}}_r$ treba da zadovolji:

$$\frac{\partial J_r}{\partial \hat{\mathbf{a}}_r} = 0 \quad (4.19)$$

tako da je

$$\left(\sum_{k=1}^r q_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \right) \hat{\mathbf{a}}_r = \sum_{k=1}^r q_k x_k \mathbf{u}_k \quad (4.20)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

Definirajući:

$$\mathbf{P}_r^{-1} \equiv \sum_{k=1}^r q_k (\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T) \quad (4.21)$$

\mathbf{P}_r^{-1} može biti invertovana samo kada je $r \geq m$, gdje je m dimenzija \mathbf{u} a r je broj skupova mjerenja. Sada jednačina (4.20) postaje:

$$\mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_r \equiv \sum_{k=1}^r q_k x_k \mathbf{u}_k \quad (4.22)$$

ili :

$$\hat{\mathbf{a}}_r = \mathbf{P}_r \sum_{k=1}^r q_k x_k \mathbf{u}_k \quad (4.23)$$

gdje je ovo obična procjena linearne regresije $\hat{\mathbf{a}}$, koja je identična procjeni regresije iz prethodnog poglavlja. Iako je $\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T$ singularno, vidimo da je matrica \mathbf{P}_r^{-1} iz jednačine (4.21) nesingularna zbog sume po k . Jednačina (4.22) se može pisati kao:

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

$$\mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_r \equiv \sum_{k=1}^{r-1} q_k x_k \mathbf{u}_k + q_r x_r \mathbf{u}_r \quad (4.24)$$

Uzimajući iz jednačine (4.20) da je:

$$\sum_{k=1}^{r-1} q_k x_k \mathbf{u}_k = \left(\sum_{k=1}^{r-1} q_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \right) \hat{\mathbf{a}}_{r-1} \quad (4.25)$$

možemo izvršiti zamjenu sa $\sum_{k=1}^{r-1} q_k x_k \mathbf{u}_k$ iz jednačine (4.25) u jednačinu (4.24) da bi dobili:

$$\mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_r \equiv \left(\sum_{k=1}^{r-1} q_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \right) \hat{\mathbf{a}}_{r-1} + q_r x_r \mathbf{u}_r \quad (4.26)$$

Dodavajući i oduzimajući $\left[q_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1} \right]$ na desnoj strani

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_r &\equiv \left(\sum_{k=1}^{r-1} q_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \right) \hat{\mathbf{a}}_{r-1} + q_r \mathbf{u}_r (x_r - \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1}) + q_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1} = \\ &\left(\sum_{k=1}^{r-1} q_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \right) \hat{\mathbf{a}}_{r-1} + q_r \mathbf{u}_r (x_r - \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

Uvodeći definicije \mathbf{P}_r^{-1} iz jednačine (4.21) , jednačina (4.27) tada postaje:

$$\mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_r = \mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_{r-1} + q_r \mathbf{u}_r (x_r - \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1}) \quad (4.28)$$

da bi dobili:

$$\hat{\mathbf{a}}_r = \hat{\mathbf{a}}_{r-1} + \mathbf{P}_r q_r \mathbf{u}_r (x_r - \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1}) \quad (4.29)$$

Iz toga se $\hat{\mathbf{a}}_r$ može sekvencijalno odrediti iz prethodne procjene $\hat{\mathbf{a}}_{r-1}$ i iz mjerenja x_r i \mathbf{u}_r i pondera q_r pod uslovom da se \mathbf{P}_r takodjer može sekvencijalno dobiti. Osim toga , prema jednačini (4.21) :

$$\mathbf{P}_r^{-1} = \sum_{k=1}^{r-1} q_k (\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T) + q_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T = \mathbf{P}_{r-1}^{-1} + q_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T \quad (4.30)$$

gdje je posljednja jednačina analogna skalarnoj jednačini (4.13).

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

Da bi se dobio izraz \mathbf{P}_r^{-1} kao u jednačini (4.30) treba izvršiti inverziju matrice i imati na raspolaganju početnu matricu \mathbf{P}_0 . Medjutim, umjesto da vršimo inverziju matrice \mathbf{P}_r , sada koristimo lemu matrične inverzije da bi omogućili rekurzivno izvodjenje \mathbf{P}_r , na slijedeći način:

$$\mathbf{H}_r \equiv \sqrt{q_r} \mathbf{u}_r \quad (4.31a)$$

tako da je:

$$\mathbf{H}_r \mathbf{H}_r^T = q_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T \quad (4.31b)$$

Množenjem obadvije strane sa jednačinom (4.30) sa \mathbf{P} ulijevo dobija se:

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}_r \mathbf{P}_{r-1}^{-1} + \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r \mathbf{H}_r^T \quad (4.32)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

Sada se množenjem jednačine (4.32) sa \mathbf{P}_{r-1} udesno dobija:

$$\mathbf{P}_{r-1} = \mathbf{P}_r + \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \quad (4.33)$$

Ako dalje množimo udesno sa \mathbf{H} dobijamo:

$$\mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r = \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r + \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r = \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r (1 + \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r) \quad (4.34)$$

Množenje jednačine (4.34) sa:

$$(1 + \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r)^{-1} \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1}) \text{ udesno daje:}$$

$$(\text{ podsjećajući da je: } (1 + \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r) \text{ skalar})$$

$$\mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r (1 + \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r)^{-1} \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} = \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \quad (4.35)$$

Zamjenom sa \mathbf{P}_{r-1} iz jednačine (4.33) dobije se :

$$\mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r (1 + \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r)^{-1} \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} = \mathbf{P}_{r-1} - \mathbf{P}_r \quad (4.36)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

da bi se došlo do :

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{P}_{r-1} - \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r (1 + \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r)^{-1} \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \quad (4.37)$$

Pošto je $(1 + \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r)$ skalar, izvodenja \mathbf{P}_r iz jednačine (4.37) rekurzivnom relacijom ne uvodi se nikakva inverzija matrice.

Početna procjena \mathbf{P} može da bude proizvoljna. Medjutim, radi brze konvergencije može biti korisno da se prema Lee-ju upotrebi početna procjena dobijena na slijedeći način:

Uzimajući jednačine (4.31) i (4.30) dobijamo:

$$\mathbf{P}_n^{-1} = \mathbf{P}_0^{-1} + \sum_{k=1}^n q_k (\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T) \quad (4.38)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

Imajući na umu da jednačine (4.20) i (4.15) imaju isti oblik i pošto postupak regresije koji se zasniva na jednačini (4.20) mora dovesti do iste (i tako ograničene) procjene najmanjih kvadrata od \mathbf{a} , kao kod procjene zasnovane na jednačinama (4.15), tražimo da je :

$$\mathbf{P}_0^{-1} = 0 \quad (4.39)$$

Zamjenom iz jednačine (4.39) u (4.30), procjenjeno \mathbf{a}_n koje je određeno iz jednačine (3.29) , za $r=m$ (gdje je m dimenzija \mathbf{a}) , postaje identično procjeni najmanje sume kvadrata iz jednačine (4.16)., za

$$\hat{\mathbf{a}}_0 = 0 \quad (4.40)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

prema tome, početna procjena:

$$\mathbf{P}_0 = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{I}: \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4.41)$$

zajedno sa početnom procjenom parametara jednačine (4.40) dovodi do procjene parametara koja konvergira u n koraka u smislu najmanje sume kvadrata (tj. do procjene nesekvencijalne regresije).

Član $1/\varepsilon$ može se skoro proizvoljno odabrati između 10 i vrijednosti koja odgovara najvećem broju koji se može memorirati u računaru kojeg koristimo. Riješenje problema pokazuje da bilo koji takav izbor slabo utiče na $\hat{\mathbf{a}}_i$ ili \mathbf{P}_i za sve i osim za $i=1$. Međutim, trebalo bi napomenuti da $1/\varepsilon$ ne smije biti veće od one vrijednosti koja odgovara najvećem značajnom decimalnom mjestu računara koji se koristi.

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

Primjer

Uzmimo sistem $y = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$, gdje je \mathbf{a} vektor parametara kojeg treba identifikovati i gdje su:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} : x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} : y_1 = 11 : y_2 = 4$$

Neka je:

$$\mathbf{P}_0 = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{I} = 10^5 \mathbf{I} : \varepsilon = 10^{-5}$$

Prema tome, prema jednačini (4.37) imamo:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{I} - \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} = 4 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 9 + 1 \cdot 10^5 & -12 \\ -12 & 16 + 10^{-5} \end{bmatrix} = 4 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 9 + \varepsilon & -12 \\ -12 & 16 + \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = 4 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 9 + \varepsilon & -12 \\ -12 & 16 + \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} 11 = 4 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 4\varepsilon \\ 3\varepsilon \end{bmatrix} 11 = \begin{bmatrix} 1.76 \\ 1.32 \end{bmatrix}$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

$$\mathbf{P}_2 = 4 \bullet 10^3 \begin{bmatrix} 9 + \varepsilon & -12 \\ -12 & 16 + \varepsilon \end{bmatrix} - \frac{16 \bullet 10^6 \begin{bmatrix} 9 + \varepsilon & -12 \\ -12 & 16 + \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 + \varepsilon & -12 \\ -12 & 16 + \varepsilon \end{bmatrix}}{1 + 4 \bullet 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -12 & 16 + \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} =$$

$$4 \bullet 10^3 \begin{bmatrix} 9 + \varepsilon & -12 \\ -12 & 16 + \varepsilon \end{bmatrix} - \frac{16 \bullet 10^6 \begin{bmatrix} 225 - 30\varepsilon + \varepsilon^2 & -300 - 10\varepsilon + 2\varepsilon^2 \\ -300 - 10\varepsilon + 2\varepsilon^2 & 400 + 80\varepsilon + 4\varepsilon^2 \end{bmatrix}}{1 + 4 \bullet 10^3 (25 + 5\varepsilon)} =$$

$$\cong \frac{4 \bullet 10^3}{25} \begin{bmatrix} ((9 + \varepsilon)100\varepsilon + 92\varepsilon + 2\varepsilon^2) & -300\varepsilon - 26\varepsilon - 2\varepsilon^2 \\ -300\varepsilon - 26\varepsilon - 2\varepsilon^2 & ((16 + \varepsilon)25\varepsilon - 7\varepsilon - \varepsilon^2) \end{bmatrix}$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

Zanemarujući članove ε^2 dobijamo da je :

$$\mathbf{P}_2 \cong \begin{bmatrix} 0.507 & -0.522 \\ -0.522 & 0.629 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} 1.913 \\ 1.055 \end{bmatrix}$$

dok nesekvencijalnom regresijom dva prethodna skupa mjerenja dobijamo da je

$$\hat{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

što je jednako tačnoj vrijednosti \mathbf{a} , jer prethodna mjerenja ne sadrže šum. Vidimo da kada bi zanemarili ε koje se javlja u članu imenitelja ($\varepsilon + 25$), od \mathbf{P}_1 tada bi \mathbf{P}_2 bilo nula

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

i nebi bilo moguće odrediti \hat{a}_r iz jednačine (4.29). Osim toga rekurzivni proračun \hat{a}_i pokazuje da se ε ne smije zanemariti, jer bi \hat{a}_1 također bilo jednako nuli.

Sekvencijalna nelinearna regresija

Već smo ranije spomenuli da se prema teoremi Weirstrassa, svaka neprekidna nelinearna funkcija $f[x(t)]$ od x može aproksimirati polinomom po x , tako da ovaj polinom konvergira ka $f[x(t)]$. Osim toga, ranije smo pokazali kako se u smislu najmanje sume kvadrata identifikuju parametri polinomske funkcije od x . To se vrši kroz ponovno formulisanje datog polinomskeg izraza (za slučaj dva ulaza i za treći stepen polinoma).

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

$$x(t) = a_1 f(u_1) + a_2 f^2(u_1) + a_3 f^3(u_1) + b_1 f(u_2) + b_2 f^2(u_2) + b_3 f^3(u_2) \quad (4.42)$$

da bi se dobilo

$$x(t) = \alpha_1 \mathbf{z}_1 + \alpha_2 \mathbf{z}_2 + \alpha_3 \mathbf{z}_3 + \dots + \alpha_6 \mathbf{z}_6 = \alpha^T \mathbf{z} \quad (4.43)$$

gdje je:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (4.44a)$$

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(u_1) \\ f^2(u_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ f^2(u_2) \\ f^3(u_2) \end{bmatrix} \quad (4.44b)$$

Identifikacija α tako postaje problem identifikovanja parametara jednačine linearne regresije (jednačina 4.43). Ova posljednja identifikacija može se izvršiti i na sekvencijalni način primjenom postupka datog ranije u ovom poglavlju, koji daje sekvencijalne procjene parametara nelinearnih sistema, a koji se zasnivaju na razmatranjima najmanje sume kvadrata grešaka . Sekvencijalna regresija se slično može primjeniti na

IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKV. REGRESIJE

uopštene formulacije dinamičkih sistema sa nepoznatim nelinearnostima.

Pošto se kod postupka sekvencijalne nelinearne regresije izbjegava inverzija matrica, one se mogu upotrijebiti kad god se vrši identifikacija pomoću nelinearne regresije, čime se prevazilazi teškoća inverzije matrica sa malom determinantom koja nastaje kod mnogih nelinearnih sistema. Napomenimo da se matrice za koje treba da se vrši inverzija većih dimenzija nego za odgovarajuće linearne sisteme. Na primjer, kod procesa sa dva ulaza, jednačina (4.42) sa aproksimacijom polinomom trećeg stepena , uzima se šestodimenzionalni ulaz. Ovaj slučaj traži inverziju matrice dimenzije 6×6 , umjesto matrice dimenzije 2×2 u linearnom slučaju, ako bi se upotrebljavala nesekvencijalna regresija. Ovim se ilustrira efikasnost sekvencijalne

IDENTIFIKACIJA SA PARAMETARSKIM MODELIMA

regresije čak i kod nelinearnih sistema malih dimenzija.

IDENTIFIKACIJA SA PARAMETARSKIM MODELIMA I VREMENSKI DISKRETNIM SIGNALIMA

Metoda najmanjih kvadrata za linearne statičke procese

Metodu najmanjih kvadrata je otkrio Gauss još 1875. Šesnaest godina nakon toga je utemeljio i sa stanovišta teorije vjerovatnoće.

U vanjskoj formi metodu bi mogli opisati na slijedeći način:

Neka je dat proces sa parametrima :

$$\underline{\theta}_0^T = [\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{m0}] \quad (5.1)$$

i izlaznom veličinom $y(k)$. Izlazna veličina nije direktno mjerljiva , nego samo preko mjerljive veličine $y_p(k)$, koja je opterećena sa signalom smetnje $n(k)$.

IDENTIFIKACIJA SA PARAMETARSKIM MODELIMA

Nadalje, neka je dat model procesa:

$$y_M = f[\underline{\theta}] \quad (5.2)$$

gdje su:

$$\underline{\theta}^T = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]$$

nepoznati parametri.

Pitanje koje se postavlja glasi: koji parametri $\underline{\theta}$ modela daju izlaz sistema, koji se najbolje podudara sa opažanjima $y_p(k)$?

Gauss je to riješio tako da je definirao grešku opažanja:

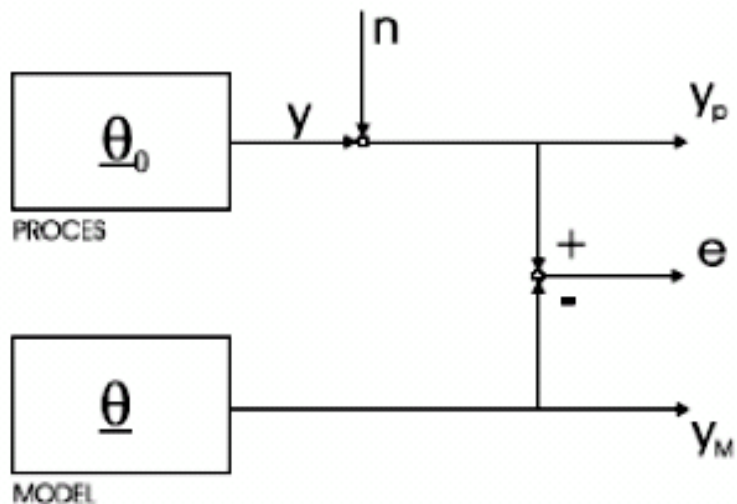
$$\mathbf{e}(k) = y_p(k) - y_M(k) \quad (5.3)$$

i zahtjevao da je suma kvadrata grešaka :

$$V = e^2(1) + e^2(2) + \dots + e^2(N) \quad (5.4)$$

IDENTIFIKACIJA SA PARAMETARSKIM MODELIMA

minimum, kao što je ilustrirano slijedećim blok dijagramom:



Slika 5.1

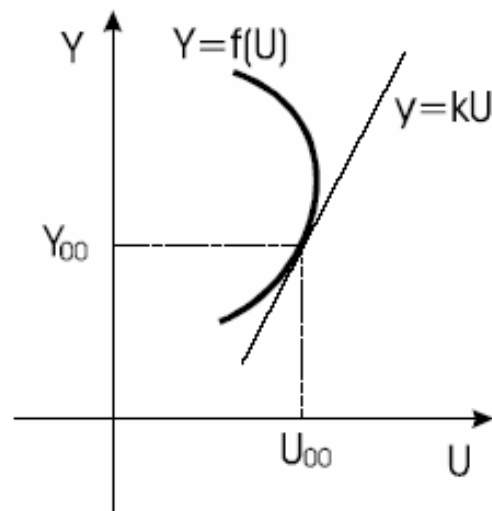
Gore postavljenu formulaciju ćemo upotrebiti za korištenje metode najmanjih kvadrata na jednostavnom primjeru statičkih procesa. Ta metoda je poznata pod imenom "regresijskog postupka".

Ponašanje u ravnotežnom stanju (statičko ponašanje) nekog procesa opisuje karakteristika:

IDENTIFIKACIJA SA PARAMETARSKIM MODELIMA

$$Y = f(U)$$

Pri čemu je Y izlaz iz procesa a U je ulaz u proces.



Slika 5.2 Statička karakteristika procesa

Za manje perturbacije u okolini radne tačke (Y_{00} , U_{00}) vrijedi:

$$y = \Delta Y = Y - Y_{00}$$

$$u = \Delta U = U - U_{00}$$

IDENTIFIKACIJA SA PARAMETARSKIM MODELIMA

Linearizovana relacija :

$$y = \frac{dY}{dU} u$$
$$y = Ku$$

Pošto je radna tačka tačno poznata, proces možemo opisati slijedećom jednačinom:

$$y_u(k) = K u(k)$$

U praksi moramo uzeti u obzir da je izlazna veličina $y_u(k)$ (korisni signal), opterećena sa signalom smetnje $n(k)$ tako, da za mjerenu veličinu vrijedi:

$$y_p(k) = y_u(k) + n(k) \quad (5.5)$$

$n(k)$ je vremenski diskretni stacionarni signal sa $E \{n(k)\} = 0$.

Za realni proces sa šumom vrijedi:

IDENTIFIKACIJA SA PARAMETARSKIM MODELIMA

$$Y_p(k) = Ku(k) + n(k) \quad (5.6)$$

Naš zadatak je da ocjenimo parametar K iz N mjerenja parova pripadajućih vrijednosti $u(0), u(1), \dots, u(N-1), y_p(1), \dots, y_p(N-1)$.

Strukturu modela procesa možemo napisati u slijedećem obliku:

$$y_M(k) = K_M u(k)$$

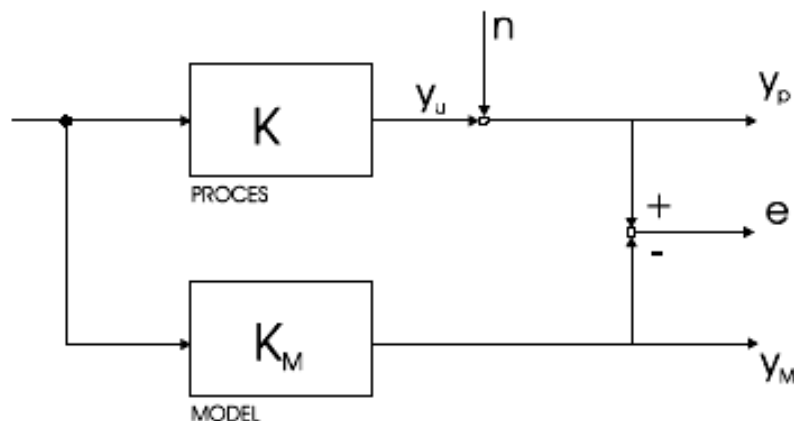
Kada se obadva procesa, i realni i model, priključeni prema gornjoj slici, razlika između njihovih izlaznih signala će biti :

$$e(k) = y_p(k) - y_M(k) \quad (5.7)$$

Kada se obadva procesa, i realni i model, priključeni prema gornjoj slici, razlika između njihovih izlaznih signala će biti :

IDENTIFIKACIJA SA PARAMETARSKIM MODELIMA

$$e(k) = y_p(k) - y_M(k) \quad (5.7)$$



Slika 5.3

Sa uvrštavanjem gornjih relacija , vrijedi :

$$e(k) = y_p(k) - K_M u(k)$$

tj. greška = opažanje – izlaz iz modela

Po metodi najmanjih kvadrata minimiziraćemo kriterijsku funkciju:

IDENTIFIKACIJA SA PARAMETARSKIM MODELIMA

$$V = \sum_{k=0}^{N-1} e^2(k) = \sum_{k=0}^{N-1} [y_p(k) - K_M u(k)]^2 \quad (5.8)$$

po izabranom parametru K_M .

$$\frac{dV}{dK_M} = -2 \sum_{k=0}^{N-1} [y_p(k) - K_M u(k)] u(k) = 0 \quad (5.9)$$

Iz ove jednačine sliedi ocinska vrijednost:

$$\hat{K} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} y_p(k) u(k)}{\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k)} \quad (5.10)$$

i nakon množenja sa $1/N$ u brojniku i nazivniku:

$$\hat{K} = \frac{\hat{\phi}_{uy}(0)}{\hat{\phi}_{uu}(0)} \quad (5.11)$$

IDENTIFIKACIJA SA PARAMETARSKIM MODELIMA

Vidimo da je procjenjena vrijednost \hat{K} data kao odnos ocjenjenih vrijednosti kroskorelacijske i autokorelacijske funkcije za $\tau = 0$.

Preduslov za postojanje ocjenjenih vrijednosti je :

$$\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) \neq 0$$

tj.

$$\hat{\phi}_{uu}(0) \neq 0$$

To znači da se ulazni signal mora pohranjivati, tj. mora pobudjivati proces sa parametrom K , kojeg nazivamo regresijski koeficijent.

IDENTIFIKACIJA SA PARAMETARSKIM MODELIMA

Vektorski oblik modela za ocjenu parametara

Ako predjemo na vektorski model, imaćemo slijedeće vektore:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix} \quad \underline{y_p} = \begin{bmatrix} y_p(0) \\ y_p(1) \\ \vdots \\ y_p(N-1) \end{bmatrix} \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} e(0) \\ e(1) \\ \vdots \\ e(N-1) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

tako da sada jednačina greške za $K_M = K$ glasi:

$$\underline{u} = \underline{y_p} - \underline{u}K$$

Kriterijska funkcija ima oblik:

$$V = \underline{e}^T \underline{e} = \left[\underline{y_p} - \underline{u}K \right]^T \left[\underline{y_p} - \underline{u}K \right] \quad (5.13)$$

IDENTIFIKACIJA SA PARAMETARSKIM MODELIMA

Izvod po K će dati:

$$\frac{dV}{dK} = \frac{d\underline{e}^T}{dK} \underline{e} + \frac{d\underline{e}}{dK} \underline{e}^T = 0 \quad (5.14)$$

Izvodi će imati vrijednosti :

$$\frac{d\underline{e}}{dK} = -\underline{u}$$
$$\frac{d\underline{e}^T}{dK} = -\underline{u}^T$$

Slijedi:

$$\frac{dV}{dK} = -2\underline{u}^T \left[\underline{y}_p - \underline{u}K \right] = 0 \quad (5.15)$$

IDENTIFIKACIJA SA PARAMETARSKIM MODELIMA

Tako da ćemo dobiti:

$$\begin{aligned}\underline{u}^T \underline{u} K &= \underline{u}^T \underline{y}_p \\ K &= \frac{\underline{u}^T \underline{y}_p}{\underline{u}^T \underline{u}}\end{aligned}\quad (5.16)$$

Vidimo da je ova jednačina identična sa [\(5.10\)](#).

IDENTIFIKACIJA SA PARAMETARSKIM MODELIMA

Konvergencija ocjene linearnog statičkog procesa sa smetnjom

Parametar K linearnog statičkog procesa možemo procjeniti pomoću metode najmanjih kvadrata , ako su ispunjeni slijedeći preduslovi:

- Ulazni signal $u(k) = U(k) - U_{00}$ mora biti egzaktno mjerljiv i njegova statička vrijednost poznata
- $\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) \neq 0$ mora biti zadovoljeno
- signal smetnje mora biti stacionaran i u skladu sa tim $E \{u(k)\} = \text{const.}$
- Ulazni signal $u(k)$ ne smije biti koreliran sa signalom smetnje $n(k)$.
- Mora biti $E \{u(k)\} = 0$ ili $E \{n(k)\} = 0$.

IDENT PAKET U MATLAB-U

KORIŠTENJE IDENT TOOLBOXA ZA IDENTIFIKACIJU U OKVIRU MATLAB-A

Toolbox pod nazivom : “System identification toolbox” – SIT, u okviru MATLAB-a je pripremio Prof Dr. Lenneart Ljung sa Univerziteta u Linkopingu -Švedska.

U okviru Matlab Vers. 7.2 (Release 14) , to je Verzija 6.2.

Namjena SIT paketa

Po definiciji autora u predgovoru, toolbox za identifikaciju sistema SIT , je namjenjen za gradnju tačnih, pojednostavljenih modela kompleksnih sistema iz vremenske serije podataka opterećene sa šumom. SIT obezbjedjuje alat za kreiranje matematskih modela dinamičkih sistema baziranih na prikupljenim i observiranim ulazno/izlaznim podacima. Alat ima fleksibilan grafički interfejs za korisnika (Graphic user interface – GUI), koji pomaže organizaciji podataka i modela.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Tehnike identifikacije koje su uključene su korisne za primjene koje uključuju analizu i dizajn sistema upravljanja kao i procesiranje signala te analizu vremenskih serija kao i analizu vibracija.

Pošto se matematski modeli dinamičkih sistema grade na bazi mjerenih podataka, potrebno je neko predznanje o tim modelima da bi uspješno koristili alate iz SIT paketa.

Osnovne karakteristike SIT paketa

SIT paket nam omogućava da izgradimo matematske modele dinamičkih sistema na bazi mjerenih podataka iz procesa.

Model se gradi u suštini podešavanjem parametara unutar datog ili predpostavljenog modela procesa, sve dok njegov izlaz ne koincidira što je više moguće sa mjerenjima izlaza iz procesa.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Dobar test kvaliteta , odnosno validnosti modela je da pažljivo posmatramo izlaz iz modela i poredimo ga sa mjerenim izlazom i na nekom drugom setu ulaza/izlaza koji nije bio korišten za razvoj modela , i da vidimo kako se uklapa (fituje) sa tim izlazima. Ovaj postupak se naziva validacijom podataka (“validation data”).

Korisno je ponekad , takodjer pogledati i u dio podataka koje model nije bio u stanju da reprodukuje prema mjerenim podacima (tkz. residuals tj. “residuals”).

Tehnike identifikacije koje se koriste mogu se primjeniti na vrlo opšte oblike modela. Najčešći oblik modela su:

- modeli u obliku diferentnih jednačina (ARX i ARMAX)
- modeli u prostoru stanja (state-space models)

IDENT PAKET U MATLAB-u

Za parametarske metode identifikacije mi moramo da unaprijed pretpostavimo strukturu sistema. Ovo ponekada može biti relativno lako jer se traži da pretpostavimo red sistema u obliku cjelobrojne vrijednosti (integer), ili pak da bude još dodatnih parametara.

Ako pretpostavimo da je sistem linearan, možemo direktno procjeniti njegov impulsni ili step odziv koristeći korelacionu analizu ili njegov frekventni odziv , koristeći spektralnu analizu. Ovo omogućava dodatno korisno poredjenje sa drugim procjenjenim modelima.

SIT paket sadrži sve uobičajene tehnike za podešenje parametara u svim vrstama linearnih modela.

To nam takodjer omogućava da ispitujemo osobine modela, i da provjerimo da li su one od neke koristi, kao i da preprocesiramo i uredimo (filtriramo) prikupljene podatke mjerenja.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Rad sa linearnim modelima ne predstavlja neko veliko ograničenje, pošto su mnoge nelinearnosti u modelima takve prirode da omogućavaju da se podatci mjerenja mogu nelinearno transformirati (kao naprimjer kvadriranje napona ako je ulaz u proces el. snaga).

Korištenjem informacija iz fizikalne slike procesa čiji model gradimo , identificirajući njegove parametre, mi možemo da tražimo transformacije varijabli koje će nam omogućiti da poznate nelinearnosti prevedemo transformacijama koordinata u linearne modele.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Terminologija koja se koristi u SIT paketu

Estimacioni podatci (estimation data) - je skup podataka koji se koristi da se fituje model sa podacima. U GUI terminologiji (grafički korisnički interfejs), ovo se takodjer zove i radni podatci (working data)

Validacioni podatci (validation data) - je skup podataka koji se koriste za validaciju (vrednovanje) modela. Ovo uključuje simulaciju modela za ove podatke i računanje ostataka (residuals) iz modela kada se primjene ovi podatci.

Prikazi modela (model views) – su različiti načini ispitivanja osobina modela. Oni uključuju prikaze nula i polova (zeros and poles), tranzijentni i frekventni odziv, i slične ostale ekrane.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Prikazi podataka (data views) – su različiti načini ispitivanja osobina skupova podataka. Najčešći i najkorisniji način je njihovo iscrtavanje i pažljiva analiza. Time se mogu detektovati tkz. iskoci (outliers). Oni predstavljaju znak nepouzdanih mjerenja, koji mogu biti posljedica grešaka u radu mjernih instrumenata.

Frekventni sadržaj signala, u terminima periodograma ili spektralnih procjena (spectral estimates), daju dosta informacija pri analizi podataka.

Skupovi modela (model sets) ili strukture modela (model structures) - su familije modela sa podesivim parametrima. Procjena parametara (parameter estimation) se sada svodi na nalaženje “najboljih “ vrijednosti za ove parametre. Problem identifikacije sistema se sada svodi i na nalaženje dobre strukture modela kao i dobrih numeričkih vrijednosti za njegove parametre.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Metode parametarske identifikacije (parametric identification methods) – su tehnike procjene parametara za date strukture modela. U suštini , radi se o pronalaženju (numeričkim pretraživanjem), onih numeričkih vrijednosti parametara , koji daju najbolje slaganje između izlaza modela (simuliranog ili predskazanog (predicted)), i mjenog izlaza.

Neparametarske identifikacione metode (nonparametric identification methods) – su tehnike procjene ponašanja modela bez da se nužno koriste dati parametrizirani skup modela. Tipični neperameterski metodi uključuju korelacionu analizu (correlation analysis) , koja procjenjuje impulsni odziv sistema, i spektralnu analizu (spectral analysis), koja procjenjuje frekventni odziv sistema.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Validacija modela (model validation) - je proces povećanja povjerenja u kvalitet (isomorfnost) modela. U suštini, to se postiže sa intenzivnim testiranjem dobijenog modela da se ispitaju svi njegovi aspekti.

Od naročite važnosti je sposobnost modela da reproducira ponašanje skupa podataka za validaciju. Zbog toga je važno da se inspicira i dio podataka modela koji se ne uklapa u validacione podatke (ostatci , residuals).

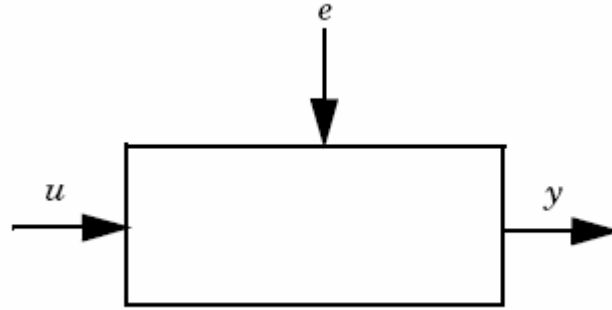
Osnovne informacije o dinamičkim modelima

Kako smo već ranije rekli, identifikacija sistema se provodi sa ciljem gradnje njegovog dinamičkog modela. Zbog toga je neko apriorno znanje o procesu i modelima koji bi se mogli koristiti neophodno da bi se SIT mogao uspješno koristiti.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Modeli opisuju relacije između signala mjerenja. Praktično je da pravimo razliku između ulaznih i izlaznih signala. Tada su izlazi djelomično određeni i sa samim ulazima. Uzmimo naprimjer da je objekat upravljanja avion, čiji su ulazi (upravljačke varijable), razne kontrolne površine na avionu kao što su krilca (ailerons), horizontalni rep (elevators), vertikalni repni djelovi (za kontrolu skretanja –attitude), itd. dok su izlazi naprimjer orijentacija aviona i njegova pozicija. U većini slučajeva, na izlaze utiče više signala nego što su samo mjerljivi ulazi. U primjeru letilice, to bi naprimjer bili udari vjetra, i efekti turbulencije. Takvi "nemjerljivi ulazi" se nazivaju signalima smetnji (disturbance) ili šuma (noise). Ako označimo ulaze, izlaze i smetnje sa u , y i e respektivno, relacija među njima se može grafički predstaviti kao na slijedećoj slici:

IDENT PAKET U MATLAB-u



Slika 6.1 Ulazni signal u , izlaz y i smatnja e

Svi ovi signali su funkcije vremena , i vrijednost ulaza u bilo kojem trenutku vremena je $u(t)$. Često, kod primjene digitalnih sistema upravljanja i vodjenja, samo se razmatraju diskretne vrijednosti ovog signala, pošto uredjaji za mjerenje i obradu uzimaju i obradjuju ove podatke u trenutcima uzorkovanja (smapliranja) T . Problem modeliranja je da opišemo relacije koje postoje izmedju ova tri signala.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Osnovni dinamički model

Osnovna relacija koja povezuje ova tri signala je linearna diferentna jednačina. Primjer ovakve jednačine je:

$$y(t) - 1.5y(t - T) + 0.7y(t - 2T) = 0.9u(t - 2T) + 0.5u(t - 3T) \quad (\text{ARX})$$

Ovakava relacija nam kaže kako da izračunamo izlaz $y(t)$ kada je ulaz poznat a smetnja se može ignorirati:

$$y(t) = 1.5y(t - T) - 0.7y(t - 2T) + 0.9u(t - 2T) + 0.5u(t - 3T)$$

Izlaz u trenutku t se dakle izračunava kao linearna kombinacija prethodnih ulaza i izlaza. Identifikacioni problem je sada da se koriste mjerenja u i y da se odrede:

- Koeficijenti u ovoj jednačini (napr. -1.5, 0.7, itd)

Koliko mnogo prethodnih izlaza treba koristiti u opisu (2 u ovom našem primjeru, tj. $y(t-T)$ i $y(t-2T)$)

IDENT PAKET U MATLAB-u

- Vrijeme kašnjenja u sistemu je ($2T$ u našem primjeru, vidimo da će trebati da prodje $2T$ vremenskih jedinica prije nego što će promjena u u uticati na y .)
- Koliko mnogo zakašnjelih ulaza treba koristiti (dva u našem primjeru : $u(t-2T)$ i $u(t-3T)$). Broj zakašnjelih ulaza i izlaza se obično naziva redom modela (model order).

Varijante opisa modela

Model koji je dat gornjim izrazom se naziva ARX model. Postoje više varijanti ovog modela koji su poznate pod imenima:

- modeli sa izlaznom greškom (OE – output error model),
- ARMAX modeli
- FIR modeli
- BOX-Jenkins (BJ) modeli

IDENT PAKET U MATLAB-u

Ovi modeli će biti opisani u nastavku.

U osnovi, ovi modeli se mogu smatrati varijantama ARX modela , dozvoljavajući i karakterizaciju osobina smetnji e.

Linearni modeli u prostoru stanja (linear state-space models). Ovi modeli su takodjer relativno lagani za korištenje. Bitna varijabla strukture sistema je red modela koji je skalarna varijabla. Ovo znači da imamo samo jedan stepen slobode kada tražimo odgovarajući model da opiše naše podatke.

Opšti linearni modeli se mogu opisati simbolično kao:

$$y = Gu + He$$

koja kaže da je mjereni izlaz $y(t)$ suma doprinosa od mjenog ulaza $u(t)$ i doprinosa koji dolazi od šuma He . Simbol G označava dinamičke osobine sistema, tj. kako je izlaz formiran od ulaza.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Za linearne sisteme to se naziva **prenosnom funkcijom** sistema. Simbol H se odnosi na osobine šuma, i naziva se **model smetnje**. On opisuje kako se smetnje na izlazu formiraju od istog standardiziranog izvora šuma $e(t)$.

Modeli u prostoru stanja su čest oblik predstavljanja dinamičkih modela. Oni opisuju isti tip linearnih diferencijalnih relacija između ulaza i izlaza kao i ARX model, ali su tako organizirane da je kašnjenje korišteno samo u izrazima. Da bi se ovo postiglo, uvedene su dodatne varijable, zvane varijable stanja (state variables). One nisu mjerljive ali se mogu rekonstruirati iz mjerljivih ulazno/izlaznih podataka.

Za osnovno korištenje SIT toolboxa, dovoljno je da znamo da je **red** modela u prostoru stanja, povezan sa brojem zakašnjelih ulaza i izlaza, koji se koriste u odgovarajućim linearnim diferentnim jednačinama. Opis u prostoru stanja izgleda:

IDENT PAKET U MATLAB-u

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Ke(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + e(t)$$

Ovdje je $x(t)$ vektor varijabli stanja. Red modela je dimenzija ovoga vektora. Matrica K određuje osobine smetnji. Primjetimo da ako je $K=0$, tada šum $e(t)$ utiče samo na izlaz, i ne gradi se nikakav specifični model za osobine šuma. Ovo korespondira sa $H=1$ u opštem modelu datom u gornjem tekstu, i obično se naziva **model sa izlaznom greškom** (output error model).

Primjetimo da kada je $D=0$, tada nema direktnog uticaja sa $u(t)$ na $y(t)$. Tada uticaj ulaza na izlaz prolazi preko $x(t)$ i time će biti zakašnjen za najmanje jedan sampl. Prva vrijednost vektora varijabli stanja $x(0)$ odražava početne uslove za sistem na početku zapisa podataka. Kada koristimo modele u prostoru stanja, tipična opcija je da li da procijenimo D, K i $x(0)$ ili da pretpostavimo da su jednaki nuli.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Kako interpretirati izvor šuma

U mnogim slučajevima identifikacije sistema, efekti šuma na izlaz su zanemarivi u poredjenju sa efektima koje imaju ulazi na izlaze. Kada je odnos signala i šuma dobar (SNR tj. signal to noise ratio , je velik), tada nije toliko bitno da imamo dobar model za smetnje.

Ipak je važno da razumijemo ulogu smetnji i izvora šuma $e(t)$, bilo da se javlja u ARX modelu ili u opštem opisu datom gore.

Postoje tri aspekta smetnji koje treba naglasiti:

- razumjevanje pojma bijelog šuma
- interpretacija izvora šuma
- korištenje izvora šuma kada radimo sa modelom

IDENT PAKET U MATLAB-u

Kako mi možemo razumjeti bijeli šum (white noise). Sa formalne tačke gledišta, izvor šuma e će se normalno posmatrati kao bijeli šum. To znači da je on upotpunosti nepredvidiv.

Stvarni doprinos izlazu , H_e , ima realno značenje. On sadrži sve uticaje na mjereno y , koji nisu sadržani u ulazu u . Ipak izvor šuma e nema fizikalnog značenja. U primjeru letilice, smetnje su uključivale i udare vjetra i turbulenciju u zraku.

Kako ćemo postupati sa izvorom šuma kada koristimo model. Ako se model koristi za simulaciju, tj. da se studiraju odzivi na razne vrste ulaza, tada model smetnji nema neku direktnu ulogu. Obično se uzima da je nula u simulacijama, tako da se analiziraju samo efekti od ulaza. (simulacija bez šuma).

IDENT PAKET U MATLAB-u

Medjutim, stvar je različita kada se model koristi za predikciju. Predviđanje budućih izlaza iz ulaza i prethodno mjenjenih izlaza, znači da takodjer i budući doprinosi smetnji trebaju biti predviđeni. Poznata, ili procjenjena , korelaciona struktura (koja je ustvari model smetnje), za smetnje, će omogućiti procjenjivanje budućih smetnji baziranih na prethodno izmjenjenim vrijednostima.

Potreba i korištenje modela šuma se može sumirati kako slijedi:

- zahtjeva se , u najčešćem broju slučajeva, da se dobije bolja procjena za dinamiku, G .
- On indicira kako su pouzdane simulacije bez uticaja šuma (noise –free).
- zahtjeva se, kod pozdanih procjena i dizajna upravljanja stohastičkim sistemom.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Članovi koji karakteriziraju osobine modela

Osobine ulazno/izlazne relacije kao što je ARX model slijede iz numeričkih vrijednosti koeficijenata, i broja kašnjenja koji se koristi. U praksi se ove osobine opisuju preko slijedećih atributa:

Impulsni odziv (impulse response)

Impulsni odziv dinamičkog modela je izlazni signal koji se dobije kada je ulaz impuls, tj. $u(t)$ je nula za sve vrijednosti od t izuzev $t=0$, kada je $u(0) = 1$.

Može se izračunati kao i u jednačini za ARX, stavljajući t da bude jednako $t=0,1,2,..$ i uzumajući da je $y(-T)=y(-2T)=0$ i $u(0)=1$.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Odziv na step (step response)

Odziv na step je izlazni signal koji se dobije kada se primjeni step ulaz, tj. $u(t) = 0$, za $t < 0$, i $u(t) = 1$ za $t > 0$.

Impulsni i odziv na step se nazivaju tranzijentni odzivi sistema (transient responses).

Frekventni odziv (frequency response)

Frekventni odziv linearnog dinamičkog modela opisuje kako model reaguje na sinusoidalne ulaze. Ovaj se odziv najčešće crta kao dva dijagrama, jedan koji pokazuje promjenu amplitude u funkciji od sinusoidalne frekvencije, i drugi koji pokazuje fazni pomak u funkciji od frekvencije.

Obadva dijagrama su poznata kao Bodeovi dijagrami.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Polovi i nule

Polovi i nule su ekvivalentan način opisivanja koeficijenata linearne diferentne jednačine kao što je ARX model. Polovi se odnose na "izlaznu stranu" a nule na "ulaznu stranu" ove jednačine. Broj polova (nula) jednak je broju intervala sampliranja između najviše i najmanje zakašnjelog izlaza.(odnosno ulaza za nule). U ARX primjeru, na početku ovog poglavlja imaćemo dakle dva pola i jednu nulu.

Osnovni koraci u identifikaciji sistema

Procedura određivanja modela dinamičkog sistema iz observiranih ulazno/izlaznih podataka uključuje tri osnovne komponente:

- ulazno/izlazne podatke
- set modela kandidata (strukture modela)

IDENT PAKET U MATLAB-u

- kriterij selekcije odredjenog modela iz skupa, na bazi informacija u podacima (identifikacioni model).

Proces identifikacije se sada sastoji u višekratnoj selekciji strukture modela, izračunavanja najboljeg modela u strukturi i evaluaciji osobina ovog modela da bi se vidjelo da li je on zadovoljavajući. Ovaj višekratni ciklus se može ovako stepenovati:

1. Dizajnirati eksperiment i prikupiti ulazno/izlazne podatke iz procesa koji će se identificirati.
2. Ispitati podatke. Isfiltrirati podatke (polirati ih) , tako da se iz njih uklone trendovi i iskakanja (outliers), i izabрати korisne dijelove originalnih podataka. Primjeniti filtriranje i da se naglase važni frekventni opsezi.

IDENT PAKET U MATLAB-u

3. Selektirati i definirati strukturu modela (tj. skup kandidata opisa sistema), unutar kojih treba potražiti model sistema.
4. Izračunati najbolji model u strukturi modela u skladu sa ulazno/izlaznim podacima i datim kriterijem fitovanja.
5. Ispitati osobine dobijenog modela
6. Ako je model dovoljno dobar, tada završiti, inače vratiti se na korak 3 i pokušati sa drugim skupom modela. Po potrebi , može se pokušati i sa drugim metodama procjene (korak 4), ili nastaviti raditi na predprocesingu ulazno/izlaznih podataka (korak 1 i 2).

SIT toolbox nudi nekoliko funkcija za svaki od ovih koraka. Za korak 2 postoje rutine za crtanje podataka, za njihovo filtriranje, i za uklanjanje trendova u podacima, kao i da se resampliraju i rekonstruišu nedostajući podatci.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Za korak 3, SIT toolbox nudi niz neparametarskih modela , kao i najčešće crna kutija (black-box) ulazno/izlazne strukture i strukture u prostoru stanja, kao i opšte i prilagodjene linearne modele u prostoru stanja u diskretnom i kontinualnom vremenu.

Za korak 4, metodi opšte predikcije greške (maksimalne sličnosti – maximum likelihood), su na raspolaganju za parametarske modele, kao i metode instrumentalne varijable (instrumental variable methods), te metodi prostora stanja takodjer za parametarske modele, dok se korelacione metode i metode spektralne analize nude za neparametarske strukture modela.

Da bi se ispitali modeli u petom koraku, mnoge funkcije dozvoljavaju računanje i prezentaciju frekventnih funkcija i polova i nula, kao i simulaciju i predikciju koristeći model. ²⁵

IDENT PAKET U MATLAB-u

Funkcije su također uključene za transformacije između kontinualnog i diskretnog vremenskog modela, u formatu koji se koristi i u drugim MATLAB toolboxovima kao što je Control system toolbox i Signal processing toolbox.

Start identifikacione procedure

Ne postoje standardne i sigurne procedure za gradnju dobrih modela u identifikaciji sistema. Pošto postoji veliki broj mogućnosti, moguće se lako izgubiti u tome šta treba uraditi, koje strukture modela treba testirati, itd.

Korak 1: Posmatranje podataka

Iscrtati raspoložive podatke ulaza/izlaza. Pokušati naći i prepoznati u njima neku dinamiku. Da li je moguće u njima uočiti efekte u izlazima kada se menjaju na ulazu.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Da li je moguće uočiti neke nelinearne efekte, kao naprimjer različite odzive na različitim nivoima, ili različite odzive kada se primjeni pozitivni odnosno negativni step, od neke radne tačke. Da li ima dijelova podataka koji su zamazani (messy) ili ne nose nikakvu informaciju. Koristiti ovakvu analizu kroz podatke da se odrede dijelovi podataka koji će biti korišteni za estimaciju , kao i dijelovi podataka za validaciju modela.

Analizirati i odrediti da li fizički nivo podataka igra neku ulogu u modelu? Ako ne igra, podatci se mogu detrendirati na taj način da im se ukloni njihova srednja vrijednost. Modeli će nakon ovoga opisivati kako promjene u ulazu daju promjene u izlazu, ali neće objasniti stvarne nivoe u signalima.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Default situacija , sa dobrim podacima, je da mi detrendiramo podatke na taj način što im uklonimo srednje vrijednosti, i nakon toga izaberemo prvu polovinu podatka za procjenu modela, a ostali dio podataka koristimo za validaciju modela. Ovo je upravo one što se dešava kada primjenimo brzi start (Quickstart), u okviru pop-up menija Preprocess u glavnom ident prozoru.

Korak 2: Razvoj osjećaja za poteškoće

Primjeniti Quickstart u okviru pop-up menija Estimate u glavnom ident prozoru. Ovo će izračunati i prikazati procjenu spektralne analize i procjenu korelacione analize, kao i ARX model četvrtog reda sa kašnjenjem koje je procjenjeno iz korelacione analize, kao i default redom modela u prostoru stanja (state-space), izračunatog putem rutine n4sid.

Ovo će nam dati tri dijagrama. Posmatrati ih i analizirati tražeći:

IDENT PAKET U MATLAB-u

- procjene spektralne analize i ARX i frekventne funkcije modela u prostoru stanja.
- procjene korelacione analize i tranzijentnih odziva ARX i modela u prostoru stanja.
- Izlaza mjerenih podataka za validaciju i simuliranih izlaza ARX i modela u prostoru stanja.

Ako su ovi argumenti razumni, problem nije toliko težak i relativno jednostavan linearni model će biti adekvatan. Dodatno, može se još izvršiti i fino podešenje u izboru reda sistema, kao i odrediti model za šum, i onda se može nastaviti sa korakom 4. Ako ovo nije tačno, tada se treba vratiti ponovno na korak 3.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Step 3: Ispitivanje poteškoća

Može biti nekoliko razloga zašto poredjenja u koraku 2 nisu izgledala dobro. U ovoj sekciji ćemo diskutovati najčešće uzroke, i kako se mogu prevazići.

Nestabilan model

ARX ili model u prostoru stanja se može pokazati da je nestabilan, ali može još uvijek biti koristan za svrhe upravljanja. Treba ga promjeniti u 5 ili 10 koraka predikcije unaprijed, umjesto da se koristi za simulaciju u prozoru izlaznog modela (model output view).

Feedback u podacima (feedback in data)

Ako postoji povratna veza (feedback) sa izlaza na ulaz, zbog toga što je možda uključen neki regulator, tada procjene na bazi spektralne i korelacione analize nisu pouzdane

IDENT PAKET U MATLAB-u

Razlike izmedju ovih procjena i ARX i modela u prostoru stanja mogu biti zanemarene u ovakvim slučajevima. U pogledu reziduala modela (models residuals view), parametarskih modela, feedback u podacima može takodjer da bude vidljiv i kao korelacija izmedju reziduala i ulaza za negativna kašnjenja.

Model smetnje (disturbance model)

Ako je model u prostoru stanja jasno bolji nego ARX model, kod reprodukcije mjenenog izlaza, ovo je indikacija da smetnje imaju značajan uticaj, i da će biti potrebno da se pažljivo modeliraju.

Red modela

Ako model četvrtog reda ne daje dobar dijagram (plot) izlaza iz modela, treba okušati sa osmim redom. Ako se uklapanje (fit) značajno poboljšalo, slijedi da su potrebni modeli višeg reda, ali i da su linearni modeli dovoljni.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Dodatni ulazi

Ako uklapanje (fit) izlaza modela (model output fit) , nije značajnije poboljšan sa testovima koji su prethodno opisani, potrebno je razmisliti i o fizikalnosti modela koji se gradi. Da li postoji više signala koji su mogli biti mjereni koji mogu da utiču na izlaz? Ako postoje, treba ih uključiti u ulaze i ponovno pokušati sa ARX modelom četvrtog reda od svih ulaza.

Primjetimo da ulazi ne treba uopšte da budu kontrolni ulazi, bilo što je mjerljivo , uključivo i smetnje, treba biti tretirano kao ulazi u sistem.

Nelinearni efekti

Ako uklapanje (fit) između mjenog izlaza i izlaza iz modela je još uvijek loš, treba razmatrati fizikalnost procesa u sistemu. Da li postoje neki nelinearni efekti u sistemu?. U tom slučaju, treba formirati nelinearnosti od mjenih podataka i dodati ova transformirana mjerenja kao dodatne ulaze.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Ovo može biti jednostavno kao napr. formiranje proizvoda mjerenja napona i struja, ako uočavamo da je električna snaga ona koja predstavlja ulaz u sistem napr. peći ili grijača, a temperatura njegov izlaz. Ovo naravno zavisi od aplikacije.

Nije neki veliki dodatni posao, da se formira još jedan broj dodatnih ulaza sa razumljivim nelinearnim transformacijama mjerenja, i da se testira da li njihovo uključenje poboljšava uklapanje (fitovanje) modela u podatke mjerenja.

Problemi još postoje

Ako niti jedan od ovih testova ne vodi ka modelu koji je u stanju da reprodukuje dovoljno dobro podatke validacije, zaključak može biti da se iz podataka ne može proizvesti zadovoljavajuće dobar model. Za ovo mogu postojati i neki razlozi. Može biti da sistem ima neke vrlo komplikovane nelinearnosti koje se ne mogu realizirati na fizikalnim osnovama.

IDENT PAKET U MATLAB-u

U takvim slučajevima, nelinearni , crna kutija (black box) , modeli mogu biti jedno rješenje. Jedan od najčešće korištenih modela ovakvog tipa su vještačke neuronske mreže (artificial neural networks – ANN).

- Drugi važan razlog je da podatci jednostavno ne sadrže dovoljno informacija, naprimjer zbog lošeg omjera korisnog signala i šuma, velikih i nestacionarnih smetnji, promjenljivih osobina sistema, itd.
- Ukoliko sve ovo nije slučaj, koristiti dodatne zaključke o tome koji se ulazi još mogu koristiti i proslijediti dalje ka koraku 4.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Korak 4: Fino podešavanje izbora reda modela i strukture smetnje

Za realne podatke ne postoji nešto što bi se zvalo "korektna struktura modela". Ipak, različite strukture mogu dati vrlo različite kvalitete modela. Jedini način da se ovo utvrdi je da se proba niz različitih struktura i porede osobine dobijenih modela.

Uklapanje između simuliranog i mjenenog izlaza

Treba držati prozor izlaza modela (model output view) otvorenim i gledati u uklapanje između simuliranog izlaza modela i mjenenog izlaza iz validacionih podataka. Formalno, mi bi mogli izabrati model za koji je ovaj broj uklapanja najveći. U praksi, je bolje biti pragmatičniji , i također uzeti u obzir kompleksnost modela, i da li važne osobine odziva izlaza su prisutne i u izlazu iz modela.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Test analize ostatka (residual analysis test)

Treba tražiti od dobrog modela da kros-korelaciona funkcija izmedju reziduala i ulaza ne izlazi značajnije van regiona povjerenja (confidence region). Inače, postoji nešto u ostacima što ima izvor u ulazu, i nije bilo na odgovarajući način uzeto u modelu. Naprimjer, jasan vrh u k intervalu kašnjenja na ulazu $u(t-k)$ nije bio prenesen na izlaz $y(t)$. Neko pravilo "od oka" , je da sporo varirajuća kros korelaciona funkcija van regiona povjerenja je indicacija da imamo isuviše malo polova, a oštri vrhovi indiciraju da imamo malo nula ili pogrešne vrijednosti kašnjenja.

Poništenje polova i nula

Ako dijagram polova i nula (uključivo i intervale povjerenja) indicira na poništenje polova i nula u dinamičkom modelu, ovo onda sugerira na mogućnost korištenja modela nižeg reda

IDENT PAKET U MATLAB-u

Naročito, ako se pokaže da red ARX modela treba biti povećan da bi se dobilo dobro uklapanje, ali se pokazuju i poništavanja polova i nula, onda su dodatni polovi uvedeni da bi se opisao šum. Ako je to slučaj, treba pokušati sa ARMAX, OE, ili BJ strukturom modela, sa A ili F polinomom reda koji je jednak broju neponištenih polova.

Koje strukture modela trebaju biti testirane?

Potrebno je često samo nekoliko sekundi da bi se izračunao i evaluirao model neke strukture, tako da treba imati pozitivan odnos prema testiranju.

Mnogo ARX modela: Postoji jednostavan način simultanog testiranja mnogih ARX struktura. Tako možemo unjeti u polje : Orders (red) mnogo kombinacija redova, koristeći notaciju kolone (":").

IDENT PAKET U MATLAB-u

Možemo također pritisnuti taster : **order selection** (selekcija reda). Kada izaberemo **Estimate**, modeli za sve kombinacije se izračunavaju i njihovo fitovanje (predikcija greške) sa validacionim podacima je pokazano na specijalnom dijagramu. Klikanjem na ovaj dijagram ubaciće se najbolji modeli sa bilo kojim izabranim brojem podataka u tablu Modela (Model board), i biće evaluirani po želji.

Mnogo modela u prostoru stanja: slična mogućnost je također raspoloživa za modele crne kutije (black box) u prostoru stanja, koji su procenjeni sa rutinom *n4sid*. Kada je nadjen dobar red, treba pokušati sa PEM (parameter estimation command) metodom estimacije, koji često poboljšava tačnost.

IDENT PAKET U MATLAB-u

ARMAX, OE i BJ modeli: Kada steknemo osjećaj za odgovarajuća kašnjenja i red dinamike, često je korisno da pokušamo sa ARMAX , OE i/ili BJ modelima sa ovim redom, i takodjer testiramo za neke druge redove za prenosnu funkciju smetnje (C i D). Naročito OE struktura je pogodna kod loše prigušenih sistema.

Multivarijabilni sistemi

Sistemi sa mnogo ulaznih signala i/ili mnogo izlaznih signala se zovu multivarijabilnim. Takvi sistemi su često mnogo veći izazov za gradnju modela. Naročito sistemi sa nekoliko izlaza mogu biti teški. Osnovni razlog teškoća je što kuplovanja izmedju nekoliko ulaza i izlaza vode ka kompleksnijim modelima. Strukture koje se koriste su bogatije u broju parametara koje treba identificirati da se dobije dobro uklapanje.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Raspoloživi modeli

SIT toolbox kao i GUI općenito , dobro rade sa linearnim multivarijabilnim modelima. Svi ranije pomenuti modeli su podržani za jedan izlaz, višestruki ulaz. Za slučaj višestrukih izlaza, ARX modeli kao i modeli u prostoru stanja su pokriveni.

Višestruki izlazi sa ARMAX i OE modelima su pokriveni za opis putem modela u prostoru stanja, ARMAX korespondira sa procjenom K matrice, dok OE korespondira sa fiksiranjem K na nulu (0). Ovo su inače iskačuće (pop-up) opcije u editoru za red GUI modela..

Općenito govoreći, preferira se rad sa modelima u prostoru stanja za multivarijabilne slučajeve, pošto kompleksnost strukture modela se lakše rješava. U suštini ovdje se svodi na izbor reda modela.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Rad sa podskupovima ulazno/izlaznih kanala

U procesu identifikacije dobrih modela sistema, često je korisno selektirati podskupove ulaznih i izlaznih kanala. Parcijalni modeli ponašanja sistema će se time konstruirati. Možda neće biti jasno, naprimjer da li svi mjereni ulazi imaju značajan uticaj na izlaze. To se najlakše testira uklanjanjem jednog ulaznog podatka iz podataka, zatim gradeći model o tome kako izlaz(i) zavisi od preostalih ulaznih kanala, i provjeravajući da li postoji značajnije pogoršanje u uklapanju izlaza modela sa mjerenim izlazima.

Uopšteno govoreći, uklapanje postaje bolje kada se više ulaza uključi i najčešće se pogoršava kada se uključi više izlaza. Da bi se ovo razumjelo, treba uzeti u obzir da model koji treba da objasni ponašanje nekoliko izlaza je mnogo složeniji nego onaj koji to radi samo za jedan izlaz.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Ukoliko imamo problema da dobijemo dobre modele za model sa višestrukim izlazima, može biti pametno da modeliramo jedan po jedan izlaz, da bi uočili koji su izlazi oni koji prave najviše problema kod validacije.

Modeli koji se koriste za simulacije mogu se takodjer graditi od modela sa jednim izlazom, za jedan po jedan izlaz. Ipak, modeli za predskazanja (predikcije) i upravljanje bit će u stanju da proizvedu bolje rezultate ako se konstruiraju za sve izlaze simultano. Ovo slijedi iz činjenice da , znajući da skup svih prethodnih izlaza daje bolju osnovu za predikciju, nego znajući samo prošle izlaze u jednom kanalu.

Takodjer, za sisteme, gdje različiti izlazi reflektiraju slične dinamike, koristeći nekoliko izlaza simultano, će pomoći u procjeni dinamike.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Neki praktični savjeti

Treba slijediti slijedeće korake kod rada sa SIT paketom:

- Uvesti podatke i kreirati skup podataka sa svim ulaznim i izlaznim kanalima od interesa. Zatim provesti nužno predprocesiranje ovog seta u smislu detrendiranja, itd..., i zatim izabrati validacioni set podataka sa svim kanalima
- Selektirati zatim radne podatke (working data) sa svim kanalima , i procjeniti modele u prostoru stanja (state space), sa različitim redovima koristeći n4sid za ove podatke. Ispitati rezultujući model primarno koristeći prozor izlaza modela (model output view).

IDENT PAKET U MATLAB-U

- Ako je teško da se dobije dobro uklapanje u svim kanalima izlaza, ili mi želimo da istražimo koliko su važni pojedini ulazni kanali, treba konstruirati novi set podataka koristeći podskupove originalnih ulazno/izlaznih kanala. Koristiti pop-up meni **Preprocess>Select Channels** za ovo. Ne mjenjati validacione podatke. GUI će voditi evidenciju o ulaznim i izlaznim kanalima. On će učiniti prave stvari, kada evaluiramo kanalno ograničene modele koristeći validacione podatke. Možda će također biti potrebno da se vidi da li poboljšanja u uklapanju su dobijena za različite tipove modela, koji se grade za svaki pojedinačni izlaz koji se dodaje jedan po jedan.
- Ako se odlučimo za model sa više izlaza, tada je često najlakši put da se koriste modeli u prostoru stanja. Koristiti **n4sid** kao primarni alat i pokušati **pem** kada se dobar red nadje.

IDENT PAKET U MATLAB-u

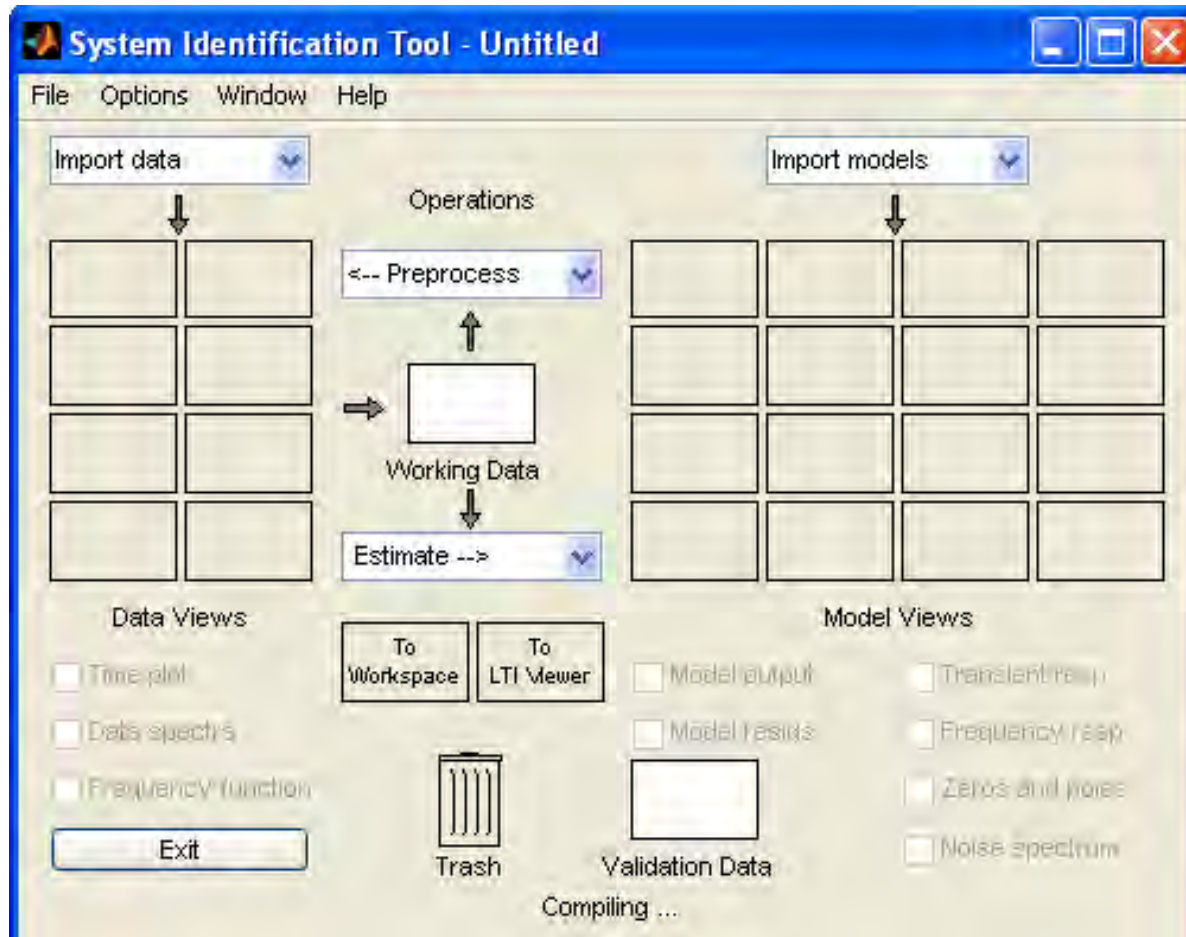
GUI kod SIT paketa

SIT obezbjeđuje grafički korisnički interfejs (GUI – graphical user interface), koji pokriva najveći dio funkcija toolboksa, i daje lagani pristup svim varijablama koje se kreiraju u toku sesije. On se aktivira kucanjem :***ident***

u komandni prozor MATLAB-a.

Pojavit će se dijalog ekran kao na slijedećoj slici:

IDENT PAKET U MATLAB-u



Slika br. 6.2

IDENT PAKET U MATLAB-u

Model i ploče podataka (data boards)

Glavni informacioni i komunikacioni prozor od ident , je ispunjen dvijema tabelama:

- Tabela o raspoloživim setovima podataka, od koji je svaki predstavljen sa jednom ikonom
- Tabela kreiranih modela, od kojih je svaki predstavljen sa ikonom

Ove tabele će se nazivati ploča modela (model board) i ploča podataka (data board). Korisnik unosi setove podataka u ploču podataka na jedan od slijedećih načina:

- otvarajući ranije pohranjene sesije
- uvozeći ih iz radnog prostora (workspace) MATLAB-a
- kreirajući ih kroz detrendiranje, filtriranje, selekciju podskupova, itd. iz drugog seta podataka u ploči podataka (data boardu).

IDENT PAKET U MATLAB-u

Uvoz podataka se ostvaruje kroz pop-up menu Data dok se kreiranje novih setova podataka ostvaruje kroz pop-up menu Preprocess

Modeli se unose u sumarnu ploču na jedan od slijedećih načina:

- otvaranjem ranije pohranenih sesija
- uvoženjem iz MATLAB radnog prostora
- procjenjujući ih iz podataka

Uvozi se ostvaruju kroz pop-up menu Models, dok sve različite šeme procjene se mogu izabrati iz pop-up menija Estimate.

Ploče podataka i modela se mogu reorganizirati pomoću miša i tehnike " drag and drop". Dodatne ploče se mogu otvoriti , ako su potrebne , iz menija Options.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Radni podatci

Svi setovi podataka i modeli se kreiraju iz seta radnih podataka (working data set). Ovo su podatci koji su dati u centru ident prozora. Da bi se promjenio set radnih podataka, treba kliknuti zatim vući (drag) i ispustiti (drop) na ikonu " working data" , bilo koji drugi set podataka iz ploče podataka,

Prikazi (views)

Ispod ploča za podatke i modele su tasteri za izbor različitih prikaza. Oni kontrolišu ,koji aspekt seta podataka i modela mi želimo da ispituujemo.

Da bi izabrali set podataka ili model, tako da se prikažu njegove karakteristike, treba kliknuti na njegovu ikonu. Selektirani objekat je označen sa debljom linijom u ikoni. Da bi se deselektirao treba ponovno kliknuti na njega.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Veći broj podataka i modela može se simultano ispitivati. Da bi se dobilo više podataka informacija o objektu, treba se dva puta klinuti (ili kliknuti sa desnim tasterom) na njegovu ikonu.

Validacioni podatci

Dva prikaza modela : izlaz modela (model output) i ostaci modela (model residuals) ilustriraju osobine modela Ovo je set koji je označen u boksu koji se nalazi ispod ova dva prikaza. Da bi se promjenili validacioni podatci, treba vući i ispustiti (drag and drop) bilo koji set podataka iz ploče podataka na ikonu validacionih podataka.

Česta i dobra praksa kod identifikacije je da se evaluiraju osobine procjenjenog modela, koristeći "svjež" set podataka, tj. onaj koji nije korišten za estimaciju.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Zbog toga je i dobar savjet da se uzme da su validacioni podatci različiti od radnih podataka (working data), ali naravno moraju biti medjusobno kompatibilni.

Radni tok (work flow)

Korisnik počinje sa uvozom podataka (koristeći pop-up meni Data), zatim ispituje set podataka koristeći prikaze Data views. Zatim će vjerovatno ukloniti srednje vrijednosti iz podataka i izabrati podskupove podataka za namjene procjene i validacije, koristeći komande iz pop-up menija Preprocess. Zatim može nastaviti da procjenjuje modele, koristeći mogućnosti iz pop-up menija Estimate, možda počevši sa brzim startom (quickstart). Zatim će korisnik ispitati dobijene modele u odnosu na preferirane aspekte koristeći različite prikaze modela (model views).

IDENT PAKET U MATLAB-u

Osnovna ideja je svaki provjereni prikaz pokazuje osobine svih izabranih modela u svakom trenutku. Ova funkcija je "uživo" , tako da modeli i prikazi mogu biti provjeravani po volji u online režimu. Korisnik selektira i deselektira model klikćući uzastopno na njegovu ikonu.

Management aspekti

Zapisnik: Da bi se prisjetili šta smo sve činili sa podacima i modelima, dvaput kliknuvši na ikonu (ili jednaput desnim tasterom miša), dobit ćemo prozor sa kompletnim zapisom (diary), koji sadrži podatke o tome kako je taj objekat kreiran, zajedno sa drugim bitnim informacijama. Sada je moguće i dodati i komentare i promjeniti imena objekta i njegovu boju.

Sesije:

Ploče modela i podataka sa svim modelima i setovima podataka i njihovim zapisima (diaries) se mogu pohraniti (pod menijem File) u bilo kojem trenutku, te kasnije ponovo loadovati.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Čišćenje:

Ploče će sadržavati proizvoljan broj modela i setova podataka (putem kreiranja klonova ploče kada je to neophodno). Zbog toga se preporučuje da se počiste (clear) modeli i setovi podataka koji više nisu interesantni. Da bi se ovo uradilo treba dovući objekat do kante za odbacivanje (trash can).

Varijable u radnom prostoru (workspace variables)

Modeli i setovi podataka kreirani sa GUI normalno nisu raspoloživi u MATLAB radnom prostoru. Medjutim one se mogu izvesti u taj radni prostor, pomoću miša, vukući i ostavljajući ikonu objekta u boks radnog prostora (workspace box). Oni će imati imena u radnom prostoru koja su imali u trenutku izvoza u radni prostor. Nakon toga sa njima možemo raditi u radnom prostoru koristeći MATLAB komande, a onda eventualno uvesti ponovo modifikovanu verziju ovih varijabli natrag u ident.

IDENT PAKET U MATLAB-U

Primjetimo da su modeli i podatci izvezeni kao objekti ident toolboksa tj. : idmodel, idfd i iddata.

GUI imena za modele i setove podataka se sugerišu od strane default procedura. Normalno, korisnik može zamjeniti i unjeti bilo koje drugo ime kod kreiranja varijable. Imena takodjer mogu biti promjenjena (nakon dvostrukog klika na ikonu), kad god to zaželimo. Suprotno od situacije sa radnim prostorom, dva GUI objekta mogu imati isto ime.

Rad sa podacima

U SIT boksu , signali i observirani podatci su predstavljeni kao vektori kolone , tj. :

$$u = \begin{bmatrix} u(1) \\ u(2) \\ \dots \\ \dots \\ u(N) \end{bmatrix}$$

IDENT PAKET U MATLAB-U

Vrijednost u redu k , tj. $u(k)$, je vrijednost signala u k -tom trenutku samplovanja. U opštem slučaju ulaz u sistem je označen sa u a izlaz sa y . Ako sistem ima nekoliko ulaznih kanala, ulazni podatci su predstavljeni sa matricom, gdje kolone su ulazni signali u različitim kanalima:

$$u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]$$

Isto vrijedi i za sisteme sa nekoliko izlaznih kanala.

Posmatrani (observed) ulazno/izlazni zapis podataka je predstavljen u SIT toolboku sa `iddata` objekat, koji je kreiran sa ulaznim i izlaznim signalima sa:

$$\text{Data} = \text{iddata}(y,u,T_s)$$

gdje je T_s vrijeme sampliranja.

IDENT PAKET U MATLAB-u

iddata objekat se takodjer može kreirati iz ulaznih i izlaznih signala kada se podatcu unesu u GUI.

Unošenje ulazno/izlaznih podataka u GUI

Informacija o podacima seta koji treba biti unesen u GUI je slijedeća:

1. Ulazni i izlazni signali
2. Ime koje je dato setu podataka
3. Interval samplovanja.

Dodatno, uz prethodne obavezne informacije, moguće je dodati i neke osobine koje mogu biti korisne kao:

4. Vrijeme startovanja sampliranja
5. Imena ulaznih i izlaznih kanala
6. Jedinice za ulaze i izlaze

IDENT PAKET U MATLAB-u

7. Periodičnost i medjusamplovsko ponašanje ulaza

8. informacije o podacima: ovo može dati dodatne informacije o podacima koje su korisne radi arhiviranja i izvještavanja.

Kada selektiramo komandu Import iz pop-up menija Data , otvoriće se dijalog boks , gdje možemo unjeti gore pomenute informacije. Ovaj boks ima pet polja koje treba ispuniti:

Input Output Variables		Channel Names	
Enter workspace variable		One name for each channel.	
Input:	<input type="text" value="u2"/>	Input:	<input type="text" value="power"/>
Output:	<input type="text" value="y2"/>	Output:	<input type="text" value="temperature"/>
Optional Data Information		Physical Units of Variables	
Data name:	<input type="text" value="Dryer"/>	Input:	<input type="text" value="W"/>
Starting time:	<input type="text" value="0"/>	Output:	<input type="text" value="° C"/>
Samp. interv.:	<input type="text" value="0.08"/>	Period:	<input type="text" value="inf"/>
	<input type="button" value="Less"/>	InterSample:	<input type="text" value="zoh"/>
<input type="button" value="Import"/>	<input type="button" value="Reset"/>	% This is the "Hair Dryer" data set. The	
<input type="button" value="Close"/>	<input type="button" value="Help"/>	% input is the electric power and	

IDENT PAKET U MATLAB-u

Klikom na taster More , još šest dodatnih polja će postati raspoloživo.

Input and Output : Unjeti imena varijabli ulaza i izlaza. Ovo trebaju biti varijable u MATLAB radnom prostoru, tako da će biti potrebno prvo da ih loadujemo sa diska prije toga.

Ustvari, korisnik može unjeti bilo koje MATLAB izraze u ova polja, i oni će biti evaluirani da izračunaju ulaze i izlaze prije nego što se unesu podatci u GUI.

Data name : Unjeti ime seta podataka koji će se koristiti u GUI. Ovo ime se može kasnije promijeniti.

Vrijeme početka i interval sampliranja (starting time and sampling interval): Ispuniti ova polja za korektne skale vremena i frekvencija za dijagrame.

Može se opciono ispuniti još jedna stranica.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Imena kanala (channel names)

Unjeti stringove za različita imena ulaznih i izlaznih kanala. Razdvojiti stringove sa zarezima (,). Broj imena mora biti jednak broju kanala, Ako ovi ulazi nisu ispunjeni, default imena , y_1 , y_2 , ..., u_1 , u_2 ,... će se koristiti.

Jedinice po kanalima (channel units)

Unjeti, u analognoj formatu, inženjerske jedinice u kojima su mjerenja napravljena. Ove jedinice će se zadržati u svim modelima koji će biti izgradjeni od ovih podataka, ali se koriste samo kod iscrtavanja dijagrama (plots).

Period :

Ako je ulaz periodičan, ovdje treba unjeti dužinu perioda. "Inf" znači neperiodični ulaz, koji je i default.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Intersample :

Izabrati ovaj tip rada (medjusampliranje) i to :

ZOH (zero order hold, kolo memoriranja nultog reda, tj. ulazni signal je konstantan u intervalu izmedju dva sampliranja),

FOH (first order hold, kolo memoriranja prvog reda, tj. ulazni signal je linearan izmedju dva sampliranja),

BL (band –limited , ograničenog pojasa, tj. kontinualni vremenski ulazni signal nema snage na frekvencijama iznad Nyquistove).

Default je ZOH.

Boks na dnu je za Notes , gdje korisnik može unjeti bilo koji tekst koji želi da se čuva zajedno sa setom podataka.

Konačno, treba izabrati Import, da bi se unjeli podatci u GUI. Kada nema više setova podataka koje treba unjeti, izabrati Close da se zatvori dijalog boks. Reset će isprazniti sva polja u dijalog boks.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Opisana procedura će kreirati iddata objekat, sa svim svojim osobinama. Ako već imamo iddata objekat na raspolaganju u radnom prostoru, možemo ga direktno uvesti selektirajući format podataka Iddata Objekt u pop-up meniju na vrhu dijaloga Import Data.

Analiza podataka

Prva stvar koju trebamo uraditi nakon unošenja seta podataka u ploču podataka je da ih ispitamo. Čekiranjem Data View polja Time plot, tj dijagram ulaznih i izlaznih signala će biti pokazani za selektirani set podataka.

Za slučaj multivarijabilnih podataka, različite kombinacije ulaznih i izlaznih signala se izabiraju u meniju sa elementom Channel u prozoru dijagrama (plota). Koristeći funkciju zumiranja, različiti djelovi podataka mogu biti ispitivani sa više detalja.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Da bi se ispitao frekventni sadržaj podataka, treba čekirati Data View boks Data Spectra. Funkcija je analogna sa Time plot, stin što će se pokazati spektar signala. Po default pokazaće se periodogrami podataka, tj. apsolutna vrijednost kvadrata Fourieove transformacije podataka. Plot se može promjeniti u novi za bilo koji izabrani opseg frekvencija, i za različite načine procjenjivanja spektra, sa elementima Options u prozoru spektara.

Namjena ispitivanja podataka na ove načine je da se nadje da li ima djelova podataka koji nisu pogodni za identifikaciju, da li informacioni sadržaji podataka su pogodni u interesantnim regionima frekvencija, i da li podatci moraju biti predprocesirani , prije nego što se koriste za estimacije.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Predprocesiranje podataka

Detrendiranje

Detrendiranje podataka uključuje uklanjanje srednjih vrijednosti ili linearnih trendova iz signala (ovo znači da se srednje vrijednosti i linearni trendovi prvo izračunaju a zatim se uklone individualno iz svakog pojedinačnog signala). Ovoj funkciji se može pristupiti iz pop-up menija Preprocess, selektirajući element Remove means (otkloni srednje vrijednosti), ili remove trends (otkloni trendove). Naprednije metode detrendiranja, kao što je otklanjanje trendova po segmentima podataka, ili sezonskih varijacija, nije moguće ostvariti iz ovog GUI-a.

Općenito se preporučuje da se otklone barem srednje vrijednosti iz podataka prije faze procjene. Postoje međjutim situacije, kada nije preporučljivo da se uklone srednje vrijednosti iz podataka. Može naprimjer da bude slučaj da su fizikalni nivoi signala ugradjeni u model koji se razmatra, ili da integracije u sistem se moraju provesti sa korektnim nivoom ulaza koji se integrišu.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Selekcija opsega podataka

Često je slučaj da je cjelokupni zapis podataka neodgovarajući za identifikaciju, zbog niza nepoželjnih karakteristika (naprimjer, nedostajući ili loši podatci, prolomi smetnji, promjene nivoa, itd), tako da se mogu koristiti samo dijelovi zapisa. U svakom slučaju se preporučuje selektirati dio mjerenih podataka za namjene estimacije a drugi dio za namjene validacije. Pop-up meni element `Preprocess>>Select Range...` otvara dijalog boks, koji olakšava selekciju različitih dijelova podataka, ukucavanjem opsega, ili njihovim markiranjem na taj način što se crtaju pravougaonici sa pritisnutim tasterom miša.

Za multivarijabilne podatke često je prednost startati raditi sa samo nekim od ulaznih i izlaznih podataka. Elementi menija `Preprocess>>Select` dozvoljavaju korisniku da izabere podskupove ulaza i izlaza. Ovo se radi na taj način da je ulazno/izlazno numerisanje i imena ostaju konzistentna i kada evaluiramo osobine podataka i modela, za modele koji pokrivaju različite podskupove podataka. 64

IDENT PAKET U MATLAB-u

Prefiltriranje

Sa filtriranjem ulaznih i izlaznih signala putem linearnih filtera (isti filter za sve signale), korisnik može, naprimjer ukloniti drift i smetnje visokih frekvencija u podacima, koji ne treba da utiču na procjenu modela. Ovo se ostvaruje na taj način da se iz pop-up menija izabere element `Preprocess>>Filter ..` u glavnom prozoru. Dijalog je dosta analogan onom kada izabiramo opseg podataka u vremenskom domenu. Korisnik označi sa pravougaonikom u spektralnim plotovima željeni pojas propuštanja ili pojas nepropuštanja (passband ili stop band), filtera, i onda izabere taster da provjeri da li filtriranje daje željene efekte, i nakon toga unese filtrirane podatke u GUI ploču podataka.

Prefiltriranje je dobar način otklanjanja šuma visokih frekvencija iz podataka, i takodjer dobra alternativa za detrendiranje (odsjecanjem niskih frekvencija iz pojasa propuštanja).

IDENT PAKET U MATLAB-u

Zavisno od namjeravane svrhe modela, korisnik može također da model koncentrira na važne opsege frekvencija. Za model koji će biti korišten za dizajn sistema upravljanja, od specijalne važnosti je frekventni opseg oko planiranog opsega za zatvorenu konturu upravljanja.

Ako korisnik namjerava da koristi podatke da gradi modele i sa osobinama dinamike sistema kao i sa osobinama smetnji, preporučuje se da se filtriranje vrši u fazi estimacije. To se postiže selektirajući element iz pop-up menija Estimate>Parametric Models, i onda selektirajući estimacioni Focus da bude Filter. Ovo otvara isti diajlog boks za filter kao i ranije.

Prefiltriranje će se međjutim primjeniti samo za procjenjivanje dinamike iz ulaza i izlaza. Model smetnji je određen iz originalnih podataka.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Resampling

Ako se pokaže da se podatci sampliraju sa prevelikom brzinom, oni se mogu prorijediti (decimated) , tj. da se uzme svaki k-ti sampl, nakon odgovarajućeg prefiltriranja (antialiasing filtriranje). Ovo se može uraditi iz menija Preprocessing >>Resample.

Korisnik može takodjer da ponovno samplira (resamplira) i sa bržim (manjim) vremenom sampliranja putem interpolacije, koristeći istu komandu, i dajući faktor resampliranja koji je manji od 1 .

Brzi start (Quickstart)

Iz pop-up menija sa elementom Preprocess>>Quickstart može se izvršiti slijedeća sekvenca akcija:

IDENT PAKET U MATLAB-u

Otvora se prikaz Time plot data view , otklanjaju se srednje vrijednosti iz signala, i dijele se ovako detrendirani podatci u dvije polovine. Prva polovina se koristi za radne podatke a druga postaju validacioni podatci. Sva tri ovako kreirana seta podataka se smještaju u ploču podataka.

Više eksperimentalni podatci

SIT toolboks dozvoljava da se radi sa setovima podataka koji sadrže nekoliko različitih eksperimenata. Obadvije aktivnosti i procjena (estimacija) i validacija se može primjeniti na takve setove podataka. Ovo je vrlo korisno kada se radi o eksperimentima koji se realizovani u različitim vremenima ali opisuju isti sistem. Takodjer je korisno da se drže zajedno djelovi podataka koji su dobijeni isjecanjem " informativnih komada" iz dugih setova podataka. Multieksperimentalni podatci se mogu uvoziti i koristiti u GUI kao iddata objekti. Selektiranje specifičnog dijela multieksperimentalnih podataka se realizuje iz pop-up menija Preprocess>>Select Experiment.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Provjera podataka na rukovanje

- Unjeti podatke u GUI ploču podataka.
- Iscrtati podatke i pažljivo ih ispitati
- Tipično detrendirati podatke otklanjajući iz njih srednju vrijednost.
- Izabrati djelove podataka za procjenu i validaciju. Vuči i ispustiti (drag and drop) ove setove podataka u odgovarajuće boksove GUI.

Simuliranje podataka

GUI je primarno namjenjen za rad sa realnim setovima podataka, i sam po sebi ne obezbjedjuje funkcije za simulaciju sintetskih podataka. To treba biti uradjeno u komandnom modu rada, i možemo koristiti naprimjer procedure u Simulinku, ili toolboku za procesiranje signala (Signal processing toolbox), ili nekom drugom toolboku u okviru MATLAB-a , za simulaciju podataka i njihovo unošenje u *ident* GUI.

IDENT PAKET U MATLAB-u

SIT toolboks ima takodjer nekoliko komandi za simulaciju. Na primjer, možemo provjeriti komande **idinput** i **sim**.

Slijedeći primjer pokazuje kako ARMAX model:

$$y(t) - 1.5y(t-1) + 0.7y(t-2) = \\ u(t-1) + 0.5u(t-2) + e(t) - e(t-1) + 0.2e(t-1)$$

je simuliran sa slučajnim binarnim ulazom u.

```
% Create an ARMAX model
model1 = idpoly([1 -1.5 0.7],[0 1 0.5],[1 -1 0.2]);
u = idinput(400,'rbs',[0 0.3]);
e = randn(400,1);
y = sim(model1,[u e]);
```

Ulaz u i izlaz y , se sada mogu uvesti u GUI kao podatci, i razne estimacione rutine se mogu na njih primjeniti. Takodjer, uvozeći simulacioni model, model1, u GUI, njegove osobine mogu biti poredjene sa onim od raznih procjenjenih modela .

IDENT PAKET U MATLAB-u

Da bi simulirali kontinualni model u prostoru stanja:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ke$$

$$y = Cx + e$$

sa istim ulazom , i intervalom sampliranja od 0.1 sec, treba uraditi slijedeće u SIT toolboxu :

```
A = [-1 1;-0.5 0]; B = [1; 0.5]; C = [1 0]; D = 0; K = [0.5;0.5];  
Model2 = idss(A,B,C,D,K,'Ts', 0) % Ts = 0 means continuous time  
Data = iddata([], [u e]);  
Data.Ts = 0.1  
y=sim(Model2,Data);
```

IDENT PAKET U MATLAB-u

Procjena modela

Procjenjivanje modela iz podataka je centralna aktivnost u SIT toolboxu. Svim estimacionim rutinama se može pristupiti iz pop-up menija Estimate u ident prozoru.

Modeli se uvijek procjenjuju koristeći set podataka koji je trenutno u boksu radnih podataka (working data box).

Može se napraviti razlika između dva tipa estimacionih metoda:

Direktna procjena impulsnog ili frekventnog odziva sistema. Ove metode se često zovu neparametarske estimacione metode, i ne postavljaju nikakve pretpostavke o strukturi modela, izuzev samo da je on linearan.

Parametarske metode. Predpostavlja se specifična struktura modela, i parametri u toj strukturi se procjenjuju koristeći podatke. Ovo otvara vrlo veliki broj mogućnosti, u skladu sa različitim mogućnostima opisa sistema.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Dominirajući su modeli u prostoru stanja i nekoliko varijanti opisa pomoću diferentnih jednačina.

Direktno procjenjivanje odziva na impuls

Linearni sistem se može opisati sa impulsnim odzivom g_k sa osobinom da je :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k u(t-k)$$

Za multivarijabilni sistem, impulsni odziv g_k će biti **$n_y \times n_u$** matrica , gdje n_y je broj izlaza a n_u je broj ulaza. Njen i -j element će dakle opisivati ponašanje i -tog izlaza kao posljedica impulsa u j -tom ulazu.

- Izabirući element menija **Estimate>>Correlation Model** , procjenjuju se koeficijenti impulsnog odziva direktno iz ulazno/izlaznih podataka, koristeći tkzv. Korelacionu analizu . Za brzu akciju , korisnik može ukucati slovo **c** u **ident** prozoru.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Rezultirajuća procjena impulsnog odziva će biti smještena na ploču modela (model board), pod default imenom imp.

Najbolji način da se ispita rezultat dobijenog impulsnog odziva je da se izabere Model View Transient response. Ovo će dati graf procjenjenog odziva. Ovaj prikaz nudi izbor između prikaza impulsnog ili step odziva. Za multivarijabilni sistem, različiti kanali tj. odziv nekog izlaza na odgovarajući ulaz , se selektira pod komandom Channel.

Direktna procjena frekventnog odziva

Frekventni odziv linearnog sistema je Fourierova transformacija njegovog impulsnog odziva. Ovakav opis sistema daje značajnu inženjersku perspektivu i uvid u sistem i njegove osobine. Relacija između ulaza i izlaza se često piše kao:

$$| \quad y(t) = G(z)u(t) + v(t)$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

gdje G je prenosna funkcija i v aditivna smetnja.

Frekventni odziv sistema se direktno procjenjuje koristeći spektralnu analizu putem menu komande Estimate> Spectral Model, i tada selektirajući Estimate taster u dijalog boksu koji se otvara. Rezultat se stavlja na ploču modela, pod default imenom spd.

Najbolji način da se ispita frekventni odziv je da se iscrtava koristeći Model View

Frequency Response. Ovaj prikaz nudi brojne različite opcije kako se krive iscrtavaju.

Frekvencije za koje se procjenjuje odziv se mogu selektirati kao opcija pod menijem Options u View prozoru.

Procjena spektralne analize se pohranjuje kao idfrd objekat. Ako je potreban dalji rad sa ovim procjenjenim frekventnim odzivom, on se može izvesti kao model u radni prostor MATLAB-a i koristiti odzive direktno iz ovog objekta u Nyquistovom i Bodeovom dijagramu.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Dvije opcije koje utiču na procjenu spektralne analize se mogu postaviti u dijalog boksu. Najvažniji je izbor broja M , (veličina prozora trajanja odziva –lag window), koja utiče na frekventnu rezoluciju procjena. U suštini, frekventna rezolucija je oko $2\pi/M$ radijana / (po intervalu sampliranja).

Izbor M je kompromis između frekventne rezolucije i varijanse (fluktuacija). Velike vrijednosti M daju dobru rezoluciju za sisteme koji nemaju oštre rezonancije, i možda mora biti prepodešena za rezonantnije sisteme.

Opcije također nude izbor između Blackman-Tukey metoda prozora `spa` (koji je default) , i metoda baziranog na direktnom peglanju (smoothing) Fourierove transformacije., **etfe**.

`etfe` ima prednost za vrlo rezonantne sisteme, u tome što je više efikasan za velike vrijednosti M .

IDENT PAKET U MATLAB-u

Sa druge strane on ima nedostatke u tome što zahtjeva linearno razmještene vrijednosti frekvencija, ne procjenjuje spektar smetnji , i ne daje intervale povjerenja (confidence intervals).

Da bi dobili spektralnu analizu modela za tekuće vrijednosti podešenja opcija, dovoljno je samo otkucati slovo s u ident prozoru (hot key za spektralnu analizu).

Procjena parametarskih modela

SIT podržava široku lepezu struktura modela za linearne sisteme. Njima se može takodjer pristupiti preko elementa menija Estimate>>Parametric Models... u ident prozoru. Ovo će otvoriti dijalog prozor Parametric Models , koji sadrži osnovni dijalog za sve parametarske estimacije .

Interpretacija informacije o strukturi modela (obično kao integer varijabla) u polju Orders, zavisi od selektirane Structure u pop-up meniju. Ovo pokriva, tipično šest mogućnosti:

IDENT PAKET U MATLAB-u

- ARX model
 - ARMAX model
 - Model izlazne greške (OE – output error)
 - Box-Jenkinsov (BJ) model
 - model u prostoru stanja
 - strukturu modela koju je definirao korisnik (initial model)

Korisnik može također unjeti i ime MATLAB varijable iz radnog prostora u polje za red.

Ova varijabla treba imati vrijednost koja je konzistentna sa potrebnim redovima za izabranu strukturu.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Metod procjene

Zajednički i opšti metod procjene parametara je pristup preko greške predikcije (prediction error approach), gdje se jednostavno biraju parametri modela, tako da razlika izmedju predskazanog izlaza modela i mjenog izlaza je minimizirana.

Ovaj metod je raspoloživ i za sve strukture modela. Izuzev za ARX, procjena uključuje iterativno, numeričko traženje za najbolje uklapanje.

Za neke strukture modela (ARX model i modeli crne kutije u prostoru stanja – black box state space model), metode bazirane na korelaciji su takodjer raspoložive i to:

instrumentalna varijabla (IV – instrumental variable) i metode podprostora (n4sid). Izbor izmedju metoda se vrši u dijalog prozoru Parametric Models.

Normalna situacija je da se procjeni kovarijansa modela, tako da različite mjere nesigurnosti se mogu prikazati na plotovima.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Medjutim, za modele u prostoru stanja višeg reda procjenjene sa `n4sid`, ili velike multivarijabilne ARX modele, računanje kovarijantne matrice može biti dosta dugo. Ako izaberemo Covariance: None, značajno ćemo smanjiti vrijeme računanja.

Nakon toga možemo izabrati Present taster, koji će izlistati model i njegove parametere sa procjenjenim standardnim devijacijama u komandnom prozoru MATLAB-a.

Ako korisnik treba da još radi sa modelom, on ga može izvesti vukući i ispuštajući ga u To Workspace ikonu, a onda koristiti MATLAB i njegove komande (kao naprimjer. `ssdata`, `tfddata`, `d2c`).

IDENT PAKET U MATLAB-u

Izbor ARX modela:

Najčešće korišteni model je jednostavna diferentna jednačina:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{na} y(t-na) = \\ b_1 u(t-nk) + \dots + b_{nb} u(t-nk-nb+1)$$

koja uspostavlja relaciju izmedju tekućeg izlaza $y(t)$ i konačnog broja prethodnih izlaza $y(t-k)$ i ulaza $u(t-k)$.

Struktura je time u potpunosti definirana sa tri cjelobrojne (integer) vrijednosti na , nb i nk . na je broj polova, nb je broj nula, dok nk je čisto kašnjenje u sistemu.

Za sistem sa sampliranjem, tipično nk je 1 ako nema mrtvog vremena u sistemu.

Za više ulazne sisteme nb i nk su vektori redovi, gdje i -ti element daje red odnosno kašnjenje koje je pridruženo sa i -tim ulazom. Redovi sistema na , nb i nk mogu se ili direktno unjeti u polje za editiranje Orders u Parametric Models prozoru, ili izabrati koristeći pop-up menije u Order Editoru,

IDENT PAKET U MATLAB-u

Unoseći neke ili sve strukturne parametre kao vektore, koristeći MATLAB-ovu notaciju za kolonu, kao naprimjer $na=1:10$, možemo definirati mnoge različite strukture koje korespondiraju sa svim kombinacijama redova. Kada izaberemo Estimate, izračunavaju se modeli koji korespondiraju sa svim ovim strukturama

Višeulazni modeli: Za višeulazne modele, korisnik može unjeti svaki od redova ulaza i kašnjenja kao vektor. Broj modela koji rezultira iz svih kombinacija redova i kašnjenja može biti vrlo veliki. Kao alternativa, može korisnik unjeti vektor kao napr. $nb=1:10$, za sve ulaze i jedan vektor za sva kašnjenja. U tom slučaju izračunavaće se samo oni modeli koji imaju iste redove i kašnjenja za sve ulaze.

Postoje dva metoda procjene koeficijenata a i b u strukturi ARX modela:

Najmanjih kvadrata: Minimizira sumu kvadrata desne strane minus desna strana gornjeg izraza, u odnosu na a i b . Ovo se postiže izabirući ARX kao Method.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Instrumentalne varijable: Odredjuje a i b tako da greške izmedju desnih i lijevih strana postaju nekorelirane sa izvjesnim linearnim kombinacijama ulaza. Ovo se dobija izabirući IV u Method boksu.

Višeizlazni modeli

Za strukturu višeizlaznog ARX modela, sa n_y izlaza i n_u ulaza, gornja diferentna jednačina još uvijek vrijedi. Jedina promjena je da koeficijenti **a** su $n_y \times n_y$ matrice a koeficijenti **b** su $n_y \times n_u$ matrice. Redovi [NA NB NK] definiraju strukturu modela kako slijedi:

NA: je $n_y \times n_y$ matrica čiji i-j ulaz je red polinoma (u operatoru kašnjenja) koji uspostavlja relaciju izmedju j-tog izlaza i i-tog izlaza.

NB : je $n_y \times n_u$ matrica čiji i-j ulaz je red polinoma koji uspostavlja relaciju izmedju j-tog ulaza i i-tog izlaza.

IDENT PAKET U MATLAB-u

NK : je $n_y \times n_y$ matrica čiji i-j ulaz je kašnjenje od j-tog ulaza na i-ti izlaz.

Dijalog prozor Order Editor , dozvoljava izbore: NA = na-ova (n_y, n_y), NB= nb-ova (n_y, n_u) ; NK=nk-ova (n_z, n_u)

gdje na, nb i nk su izabrani iz pop-up menija.

ARMAX, modeli Izlazne greške (OE) i Box-Jenkinsovi modeli

Postoji nekoliko elaboracija osnovnog ARX modela, gdje se uvode razni modeli smetnji. Oni uključuju dobro poznate tipove modela kao što su ARMAX, model izlazne greške (OE - output error) i Box-Jenkinsa.

Opšta struktura

Opšti ulazno/izlazni linearni model za sistem sa jednim izlazom, sa ulazom u i izlazom y se može napisati kao:

IDENT PAKET U MATLAB-u

$$A(q)y(t) = \sum_{i=1}^{nu} [B_i(q)/F_i(q)]u_i(t - nk_i) + [C(q)/D(q)]e(t)$$

Ovdje u_i označava ulaz i , a : A , B_i , C , D i F_i su polinomi po šift operatoru (z ili q).

Opšta struktura je definirana dajući vremenska kašnjenja nk i redove ovih polinoma (tj. broj polova i nula u dinamičkom modelu od u na y , kao i model smetnje od e na y).

Specijalni slučajevi

Najčešće su izbori ograničeni na jedan od specijalnih slučajeva:

$$\text{ARX: } A(q)y(t) = B(q)u(t - nk) + e(t)$$

$$\text{ARMAX: } A(q)y(t) = B(q)u(t - nk) + C(q)e(t)$$

$$\text{OE: } y(t) = [B(q)/F(q)]u(t - nk) + e(t) \text{ (Output-Error)}$$

$$\text{BJ: } y(t) = [B(q)/F(q)]u(t - nk) + [C(q)/D(q)]e(t) \text{ (Box-Jenkins)}$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

Polinomi po šift operatoru su samo kompaktan način pisanja diferentnih jednačina.

Naprimjer, ARMAX model u punom zapisu bi bio:

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{na}y(t-na) = b_1u(t-nk) + \dots + b_{nb}u(t-nk-nb+1) + e(t) + c_1e(t-1) + \dots + c_{nc}e(t-nc)$$

Primjetimo da $A(q)$ korespondira polovima koji su zajednički između dinamičkog modela i modela smetnje (što je korisno ako smetnje ulaze u sistem "blisko" ulazu).

Na sličan način, $F_i(q)$ određuje polove koji su jedinstveni za dinamiku od ulaza i , i $D(q)$ polove koji su jedinstveni samo za smetnje.

Za vremenske serije (tj. podatke bez ulaznih signala), samo AR i ARMA su na raspolaganju u ovim izborima. Oni su opoziti od ARX i ARMAX modela za vremenske serije.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Metod procjene

Koeficijenti polinoma se procjenjuju koristeći metod predikcije greške/maksimalne sličnosti , minimizirajući veličinu greške člana greške "e" . Nekoliko opcija kontrolira ovu proceduru minimizacije. Ove opcije se realizuju aktivirajući Iteration Control u prozoru Parametric Models , i izabirući Options.

Modeli u prostoru stanja

Struktura modela

Osnovni model u prostoru stanja može se pisati u obliku:

$$\left| \begin{array}{l} x(t+1) = A x(t) + B u(t) + K e(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) + e(t) \end{array} \right.$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

SIT toolbox podržava dvije vrste parametrizacije modela u prostoru stanja: crna kutija (black-box), slobodne parametrizacije, i parametrizacije krojene prema aplikaciji (kod slučaja tkz "struktura modela korisnički definiranih").

Unošenje struktura modela tipa crne kutije u prostoru stanja

Najvažniji indeks strukture je red modela, tj. dimenzija vektora stanja x .

Fiksirajući K na nulu, daje metod izlazne greške (OE), tj. razlika se minimizira između izlaza simuliranog modela i mjerelog izlaza. Formalno, ovo odgovara pretpostavci da je izlazna smetnja bijeli šum.

Unoseći vektor za red modela, koristeći MATLAB notaciju kolone (kao naprimjer 1:10), svi indicirani redovi će se izračunati koristeći preleminarni metod. Nakon toga možemo unjeti modele različitih redova u ploču modela, klikanjem u specijalnom grafu koji sadrži informacije o modelima.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Metodi procjene

Postoje u suštini dva osnovna metoda procjene:

PEM : je standardni metod predikcije (predskazanja) greške/maksimalne sličnosti, baziran na iterativnoj minimizaciji kriterija. Iteracije se startaju pri vrijednostima parametara koje se izračunavaju iz n4sid. Parametrizacija matrica A, B, C, D i K je slobodna.

Traženje minimuma je kontrolirano sa nizom opcija. Do njih se može doći pomoću Options tastera u prozoru Iteration Control.

N4SID : Je metod baziran na podprostoru koji ne koristi iterativno traženje. Kvalitet rezultirajućih procjena može u značajnoj mjeri zavisiti od opcija koje se zovu N4Weight i N4Horizon. Ove opcije se mogu izabrati u prozoru Order Editor.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Ako N4Horizon se unese sa nekoliko redova, modeli koji korespondiraju sa horizontima u svakom redu se odvojeno ispituju koristeći radne podatke.

Izabraće se najbolji model u terminu performanse predikcije (ili simulacije , ako je $K=0$) . Pokazaće se i slika koja će ilustrirati uklapanje u funkciji od horizonta.

Ako je n4Horizon boks ostavljen prazan, napraviće se default izbor.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Strukture modela definirane od korisnika

Strukture u prostoru stanja

SIT podržava korisnički definirane linearne modele u prostoru stanja proizvoljne strukture. Koristeći `idmodel` i `idss`, poznati i nepoznati parametri u A , B , C , D , K i X_0 matricama se mogu lako definirati i za diskretne i vremenski kontinualne modele.

Objekat `idgrey` dozvoljava korisniku da koristi kompletno proizvoljnu strukturu sive kutije (greybox structure), definiranu sa M fajlom. Osobine objekta modela se mogu lagano mjenjati i ispitivati.

Da bi se koristile ove strukture u sprezi sa GUI, treba definirati odgovarajuću strukturu u MATLAB komandnom prozoru. Zatim koristiti pop-up meni Structure da se izabere By Initial Model i unoseći ime varijabe strukture u editorskom boksu Initial Model u prozoru Parametric Models i izabrati Estimate.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Bilo koja struktura modela

Arbitrarno, strukture modela mogu biti definirane koristeći SIT objekte modela:

- `idpoly` : kreira ulazno/izlazne strukture za modele sa jednim izlazom
- `idss` : kreira linearne modele u prostoru stanja, sa proizvoljnim , slobodnim parametrima,
- `idgrey` : kreira kompletno proizvoljne parametrizacije linearnih sistema
- `idarx`: kreira multivarijabilne ARX strukture

Metod je standardni pristup greške predikcije/maksimalne sličnosti, koji iterativno traži minimum kriterija. Opcije koje kontroliraju ovo traženje se izabiru sa Options tasterom u prozoru Iteration Control.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Ispitivanje modela

Procjena modela je samo prvi korak. Sada mora biti ispitan, poredjen sa drugim modelima, i testiran sa novim setom podataka. Ovo se realizuje uglavnom pomoću funkcija prikaza modela (Model View), na dnu glavnog ident prozora:

- frekventni odziv (frequency response)
- tranzijentni odziv (transient response)
- polovi i nule (zeros and poles)
- spektar šuma (noise spectrum)
- izlaz modela (model output)
- ostatak modela (model residuals)

Nadalje, korisnik može dvaput kliknuti na ikonu modela da dobije tekst informaciju (Text information) o modelu

IDENT PAKET U MATLAB-u

Konačno, on može izvesti model u radni prostor MATLAB-a i koristiti njegove komande za dalju analizu i korištenje modela.

Opcije

Najvažnija opcija je mogućnost da pokaže intervale povjerenja (confidence intervals).

Svaka osobina procjenjenog modela ima neku neizvjesnost. Ova neizvjesnost se može procjeniti iz podataka. Čekiranjem Show confidence intervals, region povjerenja oko nominalne krive bit će označen sa crta-tačka linijama

Nivo povjerenja može se takodjer setovati i kao element menija.

Opaska : Intervali povjerenja su podržani za većinu modela i osobina, izuzev modela koji su procjenjeni pomoću **etfe***, i **k- koraka unaprijed predikcije**

IDENT PAKET U MATLAB-u

Za n4sid, osobine kovarijance nisu u potpunosti poznate. Umjesto njih može se procjeniti Cramer-Rao donja granica za kovarijantnu matricu.

Frekventni odziv i spektar smetnji

Svi linearni modeli koji se procjenjuju se mogu pisati u obliku:

$$y(t) = G(z)u(t) + v(t)$$

gdje $G(z)$ je prenosna funkcija (za diskretno vrijeme) sistema i $v(t)$ je aditivna smetnja.

Frekventni odziv ili frekventna funkcija je kompleksna funkcija $G(e^{i\omega T})$ kao funkcija ugaone frekvencije ω .

Ova funkcija se često crta kao Bodeov dijagram, koji se može dobiti čekiranjem Model View Frequency Response u glavnom ident prozoru.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Procjenjeni spektar smetnje v se iscrtava kao spektar snage izabirući Model View Noise Spectrum.

Ako su podatci vremenska serija y (bez ulaza u), tada spektar od y se crta pod Noise Spectrum, i ne daju se frekventne funkcije.

Tranzijentni odziv

Dobar i jednostavan uvid u dinamičke osobine modela se dobije gledajući u njegov step ili impulsni odziv.

Često je vrlo korisno porediti tranzijentni odziv parametarskog modela, sa onim koji je procjenjen koristeći korelacionu analizu. Ako postoji dobro slaganje izmedju ova dva modela, možemo biti sigurni da su u modele uključene bitne osobine. Korisno je takodjer provjeriti intervale povjerenja oko odziva da se vidi šta "dobro slaganje" znači i kvantitativno.

Polovi i nule

Polovi sistema su korjeni nazivnika prenosne funkcije $G(z)$, dok su nule korjeni brojnika.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Naročito polovi imaju direktan uticaj na dinamičke osobine sistema.

Korisno je uključiti intervale povjerenja u ovim slučajevima. Oni će jasno otkriti koji polovi i nule se mogu poništiti (njihovi regioni povjerenja se preklapaju). To je indikacija da se može koristiti dinamički model nižeg reda. Za multivarijabilne sisteme prikazuju se polovi i nule individualnih ulazno/izlaznih kanala. Da bi se dobile takozvane transmisionne nule (transmission zeros), treba izvesti model i onda primjeniti komandu `tzero`, koja je na raspolaganju u Control systems toolboku

Analiza rezidua

U modelu :

$$y(t) = G(z)u(t) + H(z)e(t)$$

izvor šuma $e(t)$ predstavlja dio izlaza koji model ne može da reprodukuje. On daje "ostatke" tj. residue. Za dobar model, reziduali trebaju biti nezavisni od ulaza. Inače, bit će još nešto u izlazima što ima izvor u ulazu i što model nije uključio.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Da bi se testirala ova nezavisnost, kroz korelaciona funkcija izmedju ulaza i residuala koja se izračuna ako čekiramo Model View Model Residuals. Pametno je takodjer prikazati region povjerenja za ovu funkciju. Za idealni model korelaciona funkcija treba ležati upotpunosti izmedju linija povjerenja za pozitivne lagove.

Ako naprimjer, postoji vrh van regiona povjerenja za lag k , ovo znači da postoji nešto u izlazu $y(t)$ čiji je izvor u $u(t-k)$ i što nije odgovarajuće bilo opisano u modelu. Test se izvršava koristeći validacione podatke. Ako oni nisu korišteni za procjenu modela, taj test je dosta strog.

Da bi model takodjer dao i korektan opis osobina smetnji (tj. prenosne funkcije H), reziduali trebaju biti medjusobno nezavisni. Ova test se takodjer izvršava iz prikaza

Model Residuals, prikazujući autokorelacionu funkciju reziduala (isključujući lag nula, za koji je funkcija po definiciji 1).

Za idealni model, korelaciona funkcija treba biti u potpunosti unutar regiona povjerenja.

IDENT PAKET U MATLAB-u

LTI prikaz

Ako u okviru MATLAB paketa koji sadrži SIT toolboks postoji takodjer i CST (tj. toolbox za sisteme upravljanja Control System toolbox), onda će u glavnom prozoru SIT paketa biti na raspolaganju i ikona To LTI Viewer. Ovaj program može prikazati bilo koji broj modela, ali zahtjeva od svih da imaju isti broj ulaza i izlaza.

Daljnja analiza u radnom prostoru MATLAB-a

Nakon izvoza objekata modela ili podataka iz SIT-a u radni prostor MATLAB-a (vukući ikonu u polje To Workspace) , korisniku stoji na raspolaganju mnogo komandi pomoću kojih on može dalje da transformira podatke ili model, i ispita ih, ili pak konvertuje u druge formate da bi se koristili sa ostalim toolbokovima u okviru MATLAB-a. Neki primjeri ovih komandi su:

d2c transformira izvezeni objekat iz diskretnog u kontinualno vrijeme

ss, idss, ssdata konvertuje u predstavu u prostoru stanja 99

IDENT PAKET U MATLAB-u

tf, tfdata konvertuje u oblik prenosne funkcije

zpk, zpndata konvertuje u polove i nule

Primjetimo da komande ss, tf i zks transformišu model u LTI modele CST paketa.

Osnovni alati za procjenu modela crne kutije (black-box)

Komande za ove modele su:

- Za prikazivanje podataka : iddata, plot
- Za neparametarske procjene impulsnog i frekventnog odziva: impulse, step, spa
- Za procjenjivanje modela crne kutije u prostoru stanja ili ulazno/izlaznog tipa:
 - pem, arx
- za evaluaciju modela: compare, resid
- za prikazivanje karakteristika modela: bode, nyquist, pzmap, step, view

IDENT PAKET U MATLAB-u

- posmatranje karakteristika parametarskih modela: putem referenciranja polja kao
: Mod. A, Mod.dA, itd.

Kreiranje modela za simulacije i transformisanje modela:

Za definiranje modela, da bi se generirali ulazi i simulirali modeli:

idarx, idpoly, idss, idinput, sim

Da bi se transformirali modeli u druge načine prikazivanja:

arxdata, polydata, ssdata, tfdata, zpkdir

Selekcija strukture modela

Treći sloj toolbokska sadrži neke korisne tehnike za selekciju redova i kašnjenja.

arxstruc, selstruc

IDENT PAKET U MATLAB-u

Strukturirani modeli i daljnje konverzije modela

Četvrti sloj komandi uključuje transformacije između kontinualnog i diskretnog vremena, i funkcije za procjenjivanje kompletno opštih modela struktura za linearne sisteme. Ove komande su:

c2d, d2c, idss, idgrey, pe, predict, ss, tf, zp, frd (koja se koristi sa CST toolboksom)

Rekursivna identifikacija

Rekurzivni (ili adaptivni , odnosno online) metodi procjene parametara su pokriveni komandama:

rarmax, rarx, roe, rpem, rplr

IDENT PAKET U MATLAB-u

Primjeri korištenja SIT paketa

Demonstracioni M-file iddemo.m , daje nekoliko primjera onoga što bi se moglo nazvati tipičnim sesijama SIT paketa. Da bi se startao demo, treba izvršiti iddemo unutar MATLAB-a.

U nastavku ćemo opisati primjer naveden pod 2 u okviru menija koji se pojavljuje nakon izvršenja iddemo.

Podatci u primjeru su prikupljeni sa laboratorijski skaliranog modela. Proces je sličan ručnom fenu (hair dryer). Zrak se duva kroz cijev nakon što je zagrijan na početku cijevi. Ulaz u proces je el. snaga koja se primjenjuje na otporni grijač . Izlaz je izlazna temperatura fena , koja se mjeri u Voltima pomoću termoelementa.

Prikupljeno je 1000 podataka sa procesa dok se ulaz mjenjao na slučajan način između dva nivoa snage. Vrijeme sampliranja je bilo 80 ms.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Podatci sa DAQ uredjaja su upisani u ASCII file u MATLAB, i pohranjeni su kao vektori :

y_2 (izlaz) i u_2 (ulaz), u fajl dryer2.mat.

```
load dryer2
```

Sada ćemo formirati objekat podataka:

```
dry = iddata ( y2, u2, 0.08) ;
```

Da dobijemo pregled informacija koje su sadržane u iddata u objektu dry, treba ukucati komandu :

```
get( dry)
```

Radi boljeg arhiviranja i pregleda programa, daćemo imena ulazu i izlazu.

```
dry.InputName = 'Power';
```

```
dry.OutputName = 'Temperature';
```

Izabraćemo prvih 300 vrijednosti za gradnju modela .

```
ze = dry ( 1: 300) ;
```


IDENT PAKET U MATLAB-u

Nacrtaćemo interval od uzorka 200 do 300.

```
plot ( ze ( 200:300));
```

Odklonićemo konstantne nivoe i podjeliti sa srednjom vrijednošću

```
ze = detrend ( ze ) ;
```

Procjenimo sada impulsni odziv sistema korelacionom analizom da dobijemo neke predstave o vremenskim konstantama sistema.

```
impulse ( ze , 'sd' , 3) ;
```

Najjednostavniji način da počnemo gradnju modela je da krenemo od modela u prostoru stanja , gdje je red modela automatski odredjen, koristeći metod predikcije (predskazanja) greške:

```
m1 = pem ( ze ) ;
```

IDENT PAKET U MATLAB-u

Kada se izračunavanja završe, pokazaće se prikaz osnovne informacije oko m1. Da bi dobili osobine ovoga modela, možemo naći matricu A od predstave u prostoru stanja u obliku:

$$A = m1.a$$

gdje m1 je model objekta, a

```
get ( m1 )
```

daje listu svih informacija pohranjenih u modelu.

Koliko je dobar model? Jedan način da ovo odredimo je da ga simuliramo i poredimo izlaz iz modela sa izlazom iz mjerenja. Izabraćemo dio originalnih podataka koji nije bio korišten za gradnju modela, napr. od sampla 800 do 900.

```
zv = dry ( 800:900 ) ;
```

```
zv = detrend ( zv ) ;
```

```
compare ( zv ,m1 ) ;
```

Bodeov plot iz modela se dobije sa komandom:

```
bode ( m1 )
```

IDENT PAKET U MATLAB-u

Alternativno, možemo posmatrati Nyquistov plot, i označiti regione nesigurnosti kod izvjesnih frekvencija sa elipsama, koje odgovaraju 3-strukoj standardnoj devijaciji:

```
nyquist ( m1, 'sd' , 3 ) ;
```

Najjednostavniji način da počnemo gradnju modela je da krenemo od modela u prostoru stanja , gdje je red modela automatski odredjen, koristeći metod predikcije (predskazanja) greške:

```
m1 = pem ( ze ) ;
```

Možemo takodjer porediti odziv na step modela sa onim koji se direktno izračunava iz podataka (ze) koristeći metode za neperameterske modele (korelacione analize):

```
step ( m1, ze )
```

Da bi analizirali model sa datom strukturom, mi ćemo izračunati model diferentne jednačine sa dva pola, jednom nulom i tri kašnjenja:

```
m2 = arx ( ze, [ 2 2 3 ] ) ;
```

Ovo će dati model u obliku :

IDENT PAKET U MATLAB-u

$$y(t) + a_1y(t - T) + a_2y(t - 2T) = b_1u(t - 3T) + b_2u(t - 4T)$$

gdje je T interval sampliranja (80 ms). Ovaj model koji je poznat kao ARX model, pokušava da izračuna vrijednost izlaza u trenutku t, kada su date prethodne vrijednosti od y i u. Da bi poredili njegovu performansu sa validacionim podacima, izračunajmo:

```
compare ( zv, m1, m2 );
```

Izračunaćemo i iscrtati polove i nule modela:

```
pzmap ( m1, m2 );
```

Neizvjesnosti polova i nula se takodjer mogu iscrtati.

```
pzmap ( m1, m2, 'sd' ,3 ) , % '3' znači broj standardnih devijacija
```

Procjenićemo frekventni odziv metodom neparametarske spektralne analize.

IDENT PAKET U MATLAB-u

$$gs = spa (ze) ;$$

i uporediti sa frekventnim funkcijama od parametarskih modela

$$bode (m1, m2, gs)$$

Impulsni odzivi, frekventne funkcije i spektar

Osnovna ulazno-izlazna konfiguracija je pokazana na narednoj slici. Predpostavljajući jedinični interval samplovanja, imamo ulazni signal :

$$u(t); \quad t = 1, 2, \dots, N$$

i izlazni signal:

$$y(t); \quad t = 1, 2, \dots, N$$

Predpostavljajući linearnu relaciju izmedju signala, relacija se može pisati kao:

IDENT PAKET U MATLAB-u

Predpostavljajući linearnu relaciju između signala, relacija se može pisati kao:

$$y(t) = G(q)u(t) + v(t) \quad (6.1)$$

gdje q je šift operator (operator pomaka unazad), a $G(q)u(t)$ je:

$$G(q)u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t-k) \quad (6.2)$$

i

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)q^{-k}; \quad q^{-1}u(t) = u(t-1) \quad (6.3)$$

Brojevi $\{g(k)\}$ se zovu impulsni odziv sistema. Funkcija $G(q)$ se naziva prenosnom funkcijom sistema. Ako se ova funkcija evaluira na jediničnom krugu ($q = e^{i\omega}$), dobije se frekventna funkcija :

IDENT PAKET U MATLAB-u

$$G(e^{i\omega}) \quad (6.4)$$

U jednačini (6.1) $v(t)$ je dodatni, nemjerljivi signal (smetnja). Njene osobine se mogu izraziti u jedinicima spektra snage :

$$\Phi_v(\omega) \quad (6.5)$$

koji je definiran kao :

$$\Phi_v(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_v(\tau) e^{-i\omega\tau} \quad (6.6)$$

gdje $R_v(\tau)$ je kovarijantna funkcija od $v(t)$:

$$R_v(\tau) = E v(t)v(t-\tau) \quad (6.7)$$

gdje E označava matematsko očekivanje. Alternativno, smetnja $v(t)$ se može opisati kao filtrirani bijeli šum:

IDENT PAKET U MATLAB-u

$$v(t) = H(q)e(t) \quad (6.8)$$

gdje $e(t)$ je bijeli šum sa varijansom λ i :

$$\Phi_v(\omega) = \lambda |H(e^{i\omega})|^2 \quad (6.9)$$

Jednačina (6.1) i jednačina (6.8) zajedno daju opis u vremenskom domenu sistema:

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) \quad (6.10)$$

Jednačine (6.4) i (6.5) čine opis u frekventnom domenu.

$$G(e^{i\omega}); \quad \Phi_v(\omega) \quad (6.11)$$

Impulsni odziv (6.3) i opis u frekventnom domenu se zovu opisi neparametarskog modela, pošto oni nisu definirani u terminima konačnog broja parametara. Osnovni opis (6.10) se može primjeniti i u multivarijabilnom slučaju, tj. na sisteme sa nekoliko (napr. n_u) ulaznih signala i nekoliko¹¹²

IDENT PAKET U MATLAB-u

(ny) izlaznih signala. U tom slučaju $G(q)$ je $n_y \times n_u$ matrica dok $H(q)$ i $F_v(w)$ su $n_y \times n_y$ matrice.

Polinomska predstava prenosnih funkcija

Umjesto specificiranja funkcija G i H u jednačini (6.10) u funkciji od frekvencije ω , možemo ih opisati kao racionalne funkcije od q^{-1} i specificirati koeficijente brojnika i nazivnika.

Često korišteni parametarski model je ARX model koji odgovara slijedećem opisu:

$$G(q) = q^{-nk} \cdot \frac{B(q)}{A(q)}; \quad H(q) = \frac{1}{A(q)} \quad (6.12)$$

gdje su B i A polinomi po operatoru kašnjenja q^{-1} :

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na} \\ B(q) &= b_1 + b_2 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb+1} \end{aligned} \quad (6.13)$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

Ovdje brojevi na i nb su redovi odgovarajućih polinoma. Broj nk je broj kašnjenja sa ulaza na izlaz. Model se obično piše kao:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t - nk) + e(t) \quad (6.14)$$

ili eksplicitno:

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{na}y(t-na) = \quad (6.15)$$
$$b_1u(t-nk) + b_2u(t-nk-1) + \dots + b_{nb}u(t-nk-nb+1) + e(t)$$

Primjetimo da jednačine (6.14) i (6.15) vrijede i za multivarijabilni slučaj, sa ny izlaznih kanala i nu ulaznih kanala. Tada $A(q)$ i koeficijenti a_i postaju $ny \times ny$ matrice, $B(q)$ i koeficijenti b_i postaju $ny \times nu$ matrice.

Naredni, opštiji model je ARMAX struktura:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t - nk) + C(q)e(t) \quad (6.16)$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

gdje $A(q)$ i $B(q)$ su kao i u jednačini (6.13) , dok:

$$C(q) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{nc}q^{-nc}$$

Struktura izlazne greške (output error – OE), se dobije kao:

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t - nk) + e(t) \quad (6.17)$$

gdje :

$$F(q) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{nf}q^{-nf}$$

Takozvani Box-Jenkinsov (BJ) model je dat kao:

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t - nk) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (6.18)$$

sa:

$$D(q) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{nd}q^{-nd}$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

Svi ovi modeli su specijalni slučajevi strukture opšteg parametarskog modela:

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t - nk) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (6.19)$$

Varijansa bijelog šuma $\{e(t)\}$ je pretpostavljena da je 1.

Unutar strukture jednačine (6.19), skoro sve linearne strukture modela crne kutije (black box) se dobiju kao specijalni slučajevi. ARX struktura se dobije za slučaj $n_c = n_d = n_f = 0$. ARARX struktura (ili " generalizirani model najmanjih kvadrata") se dobije za $n_c = n_f = 0$. ARMAX struktura korespondira sa $n_f = n_d = 0$. Model izlazne greške (OE) se dobije sa $n_a = n_c = n_d = 0$, dok Box-Jenkins model odgovara $n_a = 0$.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Isti tip modela se može definirati za sisteme sa proizvoljnim brojem ulaza. Oni imaju oblik:

$$A(q)y(t) = \frac{B_1(q)}{F_1(q)}u_1(t - nk_1) + \dots + \frac{B_{nu}(q)}{F_{nu}(q)}u_{nu}(t - nk_{nu}) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (6.20)$$

Predstava prenosnih funkcija u prostoru stanja

Čest slučaj opisivanja linearnih sistema je u prostoru stanja:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Ovdje relacija između ulaza $u(t)$ i izlaza $y(t)$ je definirana sa n_x dimenzionalnim vektorom stanja $x(t)$. U formi prenosne funkcije jednačina (6.21) korespondira sa (6.1)

$$G(q) = C(qI_{n_x} - A)^{-1}B + D \quad (6.22)$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

Ovdje, I_{nx} je nx sa nx jedinična matrica. Očividno jednačina (6.21) se može posmatrati kao ona koja parametrizira prenosnu funkciju, preko jednačine (6. 22) $G(q)$ postaje funkcija elemenata matrica A, B, C i D .

Da bi dalje opisali karakter šuma $v(t)$ u jednačini (6.21) , fleksibilnija tkzv. " inovaciona" forma modela u prostoru stanja se može koristiti.

$$\begin{aligned}x(t + 1) &= Ax(t) + Bu(t) + Ke(t) \\y(t) &= Cx(t) + Du(t) + e(t)\end{aligned}\tag{ 6.23}$$

Ovo je ekvivalentno jednačini (6.10) datoj sa (6.22) i $H(q)$ kao:

$$H(q) = C(qI_{nx} - A)^{-1}K + I_{ny}\tag{ 6.24}$$

Ovdje ny je dimenzija $y(t)$ i $e(t)$.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Često je moguće uspostaviti opis sistema direktno u inovacionoj formi (6.23). Drugim riječima, može biti poželjno da se opiše priroda smetnji koje djeluju na sistem. Ovo vodi ka stohastičkom modelu u prostoru stanja:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + e(t)\end{aligned}\tag{ 6.25}$$

gdje $w(t)$ i $e(t)$ su stohastički procesi sa nekim kovarijantnim osobinama. U stacionarnom stanju i iz ulazno/izlaznog modela, jednačina (6.25) je ekvivalentna sa (6.23) ako matrica K je izabrana kao stacionarno Kalmanovo pojačanje.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Modeli u prostoru stanja sa kontinualnim vremenom

Često je lakše opisati sistem iz fizikalnog modela kao model sa kontinualnim vremenom. Razlog je u tome što većina fizikalnih zakona je opisana u kontinualnom vremenu sa diferencijalnim jednačinama.

Zbog toga fizikalno modeliranje tipično vodi ka opisu u prostoru stanja u obliku:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \quad (6.26)$$

$$y(t) = Hx(t) + Du(t) + v(t)$$

Ako je ulaz parcijalno konstantan u vremenskim intervalima, tada relacija između $u[k] = u(kT)$ i $y[k] = y(kT)$ se može opisati sa jednačinom (6.21) sa uzimanjem :

$$A = e^{FT}; \quad B = \int_0^T e^{F\tau} G d\tau; \quad C = H \quad (6.27)$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

i pridruživanjem $y(t)$ sa $y[t]$, itd. Ako startamo sa inovacionom formom i kontinualnim vremenom :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) + \tilde{K}e(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Du(t) + e(t)\end{aligned}\quad (6.28)$$

protupar u diskretnom vremenu je dat sa jednačinom (6.23) , gdje još uvijek vrijedi jednačina (6.27). Tačna konekcija izmedju \tilde{K} i K ie nešto komplikovanija. Ad hoc rješenje je:

$$K = \int_0^T e^{F\tau} \tilde{K} d\tau; \quad (6.29)$$

po analogiji sa G i B. Ovo je dobra aproksimacija za kratke intervale sampliranja T.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Procjena impulsnog odziva

Posmatrajmo opise jednačina (6.1) i (6.2). Da bi se direktno procjenili koeficijenti impulsnog odziva, takodjer i u multivarijabilnom slučaju, pogodno je definirati model višeg reda konačnog impulsnog odziva (FIR – finite impulse response).

$$y(t) = g(0)u(t) + g(1)u(t-1) + \dots + g(n)u(t-n) \quad (6.30)$$

i procjeniti \mathbf{g} koeficijente metodom linearne sume najmanjih kvadrata. Da bi provjerili da nema neuzročnih efekata sa ulaza na izlaz, naprimjer zbog povratne sprege sa y u generiranju u (tj. zatvorene povratne sprege), \mathbf{g} se može procjeniti i za negativna kašnjenja:

$$y(t) = g(-m)u(t+m) + \dots + g(-1)u(t+1) + g(0)u(t) + g(1)u(t-1) + \dots + g(n)u(t-n) \quad (6.31)$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

Ako je u bijeli šum, koeficijenti impulsnog odziva će biti korektno procjenjeni, čak ako i prava dinamika sa u na y je komplikovanija nego u ovim modelima. Zbog toga je prirodno filtrirati i ulaz i izlaz kroz filter koji će učiniti ulaznu sekvencu što je moguće više "bijelom", prije nego što procjenimo g .

Ovo je suština korelacione analize za procjenjivanje impulsnih odziva.

Procjena spektra i frekventnih funkcija

Sada ćemo opisati metode za direktnu procjenu frekventnih funkcija i spektra (jednačina (6.11). Kros kovarijantna funkcija $R_{yu}(t)$, između $y(t)$ i $u(t)$ je definirana kao $Ey(t + \tau)u(t)$, analogno jednačini (6.7). Njena Fourierova transformacija, kros spektar $\Phi_{yu}(\omega)$ je analogno definiran jednačinom (6.6). Pod pretpostavkom da je ulaz $u(t)$ nezavistan od $v(t)$, relacija (6.1) implicira slijedeću relaciju¹²³

IDENT PAKET U MATLAB-u

izmedju spektara:

$$\Phi_y(\omega) = |G(e^{i\omega})|^2 \Phi_u(\omega) + \Phi_v(\omega) \quad (6.32)$$

$$\Phi_{yu}(\omega) = G(e^{i\omega}) \Phi_u(\omega)$$

Sa procjenjivanjem različitih spektara koji su uključeni, frekventna funkcija spektra smetnji se može procjeniti na slijedeći način:

Iz procjena kovarijantnih funkcija $\hat{R}_y(\tau), \hat{R}_{yu}(\tau), \hat{R}_u(\tau)$ (koje su definirane sa (6.7). koristeći :

$$\hat{R}_{yu}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t+\tau)u(t) \quad (6.33)$$

i analogne izraze za ostale. Tada, iz procjena odgovarajućih spektara:

$$\hat{\Phi}_y(\omega) = \sum_{\tau=-M}^M \hat{R}_y(\tau) W_M(\tau) e^{-i\omega\tau} \quad (6.34)$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

i analogno za Φ_u i Φ_{yu} . Ovdje $W_{M(\tau)}$ je takozvani prozor kašnjenja (lag window), i M je širina tog prozora. Procjene se sada formiraju kao:

$$\hat{G}_N(e^{i\omega}) = \frac{\hat{\Phi}_{yu}(\omega)}{\Phi_u(\omega)}; \quad \hat{\Phi}_v(\omega) = \hat{\Phi}_y(\omega) - \frac{|\hat{\Phi}_{yu}(\omega)|^2}{\Phi_u(\omega)} \quad (6.35)$$

Ova procedura je poznata kao spektralna analiza.

Procjena parametarskih modela

Za dati opis (6.10) i imajući observirane ulazno/izlazne podatke u i y, greške predikcije e(t) u jednačini (6.10) se mogu izračunati kao:

$$e(t) = H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)] \quad (6.36)$$

Ove greške su, za date podatke u i y, funkcije od G i H. Ove su sa svoje strane parametrizirani sa polinomima (6.14) do (6.19) , ili sa ulazima u matricama u prostoru stanja definiranim u (6.26) do (6.29).

IDENT PAKET U MATLAB-u

Najčešći metod parametarske identifikacije je određivanje procjena od G i H minimizirajući:

$$V_N(G, H) = \sum_{t=1}^N e^2(t) \quad (6.37)$$

to jest:

$$[\hat{G}_N, \hat{H}_N] = \underset{G, H}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^N e^2(t) \quad (6.38)$$

Ovo se naziva metodom predikcije greške. Za Gaussovsku raspodjelu koincidira sa metodom maksimalne sličnosti (maximum likelihood).

Donekle različita filozofija može biti primjenjena na ARX model (6.14). Formirajući filterske verzije ulaza:

$$N(q)s(t) = M(q)u(t) \quad (6.39)$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

i množeći jednačinu (6.14) sa $s(t-k)$, $k= 1,2,..na$: i $u(t-nk+1-k)$, $k= 1,2....,nb$, i sumirajući po t , šum u jednačini (6.14) se može korelirati i riješiti za dinamiku.

Ovo daje metod instrumentalne varijable (IV), a $s(t)$ se zove instrumenti.

Metodi podprostora za procjenu modela u prostoru stanja

Matrice prostora stanja A , B , C , D i K u jednačini (6.23) se mogu direktno procjeniti, bez da se prije specificira neka specifična parametrizacija, pomoću efikasnih metoda podprostora. Ideja koja se nalazi u ovome metodu je slijedeća:

Ako bi sekvenca vektora stanja $x(t)$ bila poznata, zajedno sa $y(t)$ i $u(t)$, jednačina (6.23) bi bila linearna regresija, i C i D bi mogli biti procjenjeni sa metodom najmanjih kvadrata.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Tada $e(t)$ bi se moglo odrediti, i tretirati kao poznati signal u (6.23), koji bi onda mogao biti drugi linearni regresioni model za A , B i K . Nakon toga, kada su stanja poznata, procjena matrica prostora stanja je lagana.

Kako da nadjemo stanja $x(t)$?. Sva stanja u relacijama kao (6.23) se mogu formirati kao linearne kombinacije od k koraka unaprijed prognoziranih izlaza ($k=1,2,\dots,n$). Sada se metod svodi na to da se nadju ove prognoze, i onda izabere osnova izmedju njih. Metode podprostora čine efikasan i numerički pouzdan način odredjivanja prediktora projektujući ih direktno na osmatrane sekvence podataka.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Predstavljanja podataka i procjene neparametarskih modela

Predstavljanje podataka

Observirani izlazni i ulazni signali, $y(t)$ i $u(t)$, se predstavljaju kao vektori kolone \mathbf{y} i \mathbf{u} . Red k je uzorak u trenutku k . Za multivarijabilne sisteme, svaka komponenta ulaza (izlaza) je predstavljena kao vektor kolona, tako da \mathbf{u} postaje $N \times n_u$ matrica (N je broj sampliranih opažanja, n_u = broj ulaznih kanala). Izlazno/ulazni podatci se kolektivno predstavljaju u formatu `iddata`. Ovo je bazni objekat za rad sa signalima u SIT toolboku. Kreira se sa komandom:

```
Data = iddata(y,u,Ts)
```

gdje je \mathbf{y} vektor kolona ili $N \times n_y$ matrica. Kolone \mathbf{y} odgovaraju različitim izlaznim kanalima. Slično, \mathbf{u} je vektor kolona ili $N \times n_u$ matrica koja sadrži signale ulaznih kanala. T_s je interval samplovanja.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Podatci se zatim iscrtavaju sa plot (Data) a dijelovi zapisa podataka se biraju sa :

```
ze = Data(1:300)
```

Signali u izlaznim kanalima se dobijaju sa :

```
Data.InputData ili Data.u
```

Za vremenske serije , koristiti `Data= iddata(y)` , ili `u = []`.

`iddata` objekat može takodjer sadržavati samo jedan ulaz , ako stavimo `y = []`.

Interval sampliranja se može promjeniti sa (`Data, 'Ts', 0.3`), ili jednostavnije sa:

```
Data.Ts = 0.3
```

IDENT PAKET U MATLAB-u

Korelaciona analiza

Procedura korelacione analize je implementirana u funkciji `impulse`:

```
impulse ( Data )
```

Ova funkcija iscrtava procjenjeni impulsni odziv. Dodajući argument `'sd'` kao u:

```
impulse ( Data,'sd' , 3 )
```

označava i region povjerenja koji odgovara u prethodnoj komandi, 3 standardne devijacije. Rezultat se može pohraniti i ponovno iscrtati:

```
ir = impulse(Data)  
impulse(ir, 'sd', 3)
```

Alternativa je komanda `step` koja iscrtava odziv na step, izračunat iz procjene impulsa.

```
step ( Data )
```

IDENT PAKET U MATLAB-u

Spektralna analiza

Funkcija `spa` izvršava spektralnu analizu u skladu sa procedurom u jednačinama (6.35) do (6.37).

$$g = \text{spa} (\text{Data})$$

Ovdje argument `Data` sadrži izlazno/ulazne podatke u `iddata` objektu. `g` se vraća kao objekat `idfrd` (identified frequency domain – identificirani frekventni domen), koji sadrži procjenjenu frekventnu funkciju `GN` i procjenjeni spektar smetnji `Fv` u jednačini (6.37), kao i procjenjenu neizvjesnost kovarijansi.

Frekventna funkcija , ili frekventni odziv `G` u `g` se može iscrtati sa komandom `bode` , `ffplot` ili `nyquist`. Spektar šuma se dobije sa `g ('n')` , kao :

$$g = \text{spa} (\text{Data})$$
$$\text{bode} (g)$$
$$\text{bode} (g ('n'))$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

i izvršava spektralnu analizu i iscrtava prvo G a onda F_v . Neizvjesnost procjene se prikazuje dodajući argument 'sd' kao u :

```
bode ( g,'sd',3)
```

koja će prikazati , sa crta-tačka linijama, region povjerenja oko procjene. Dodajući argument 'fill' pokazaće popunjen region neizvjesnosti.

```
bode ( g,'sd',3, 'fill')
```

Slično:

```
nyquist ( g )
```

daće Nyquistov plot frekventne funkcije, tj. grafički prikaz realnog dijela prema imaginarnom dijelu od G .

Ako $Data = y$ je vremenska serija, tada $Data$ nema ulaznog kanala, spa vraća procjenu spektra tog signala:

IDENT PAKET U MATLAB-u

```
g = spa ( y )
```

```
ffplot ( g )
```

Kod izračunavanja jednačina (6.35) do (6.37), spa koristi kao prozor kašnjenja (lag window) Hammingov prozor za $W(t)$ sa default dužinom od M jednakom minimumu od 30 i $1/10$ dijelom svih tačaka. Veličina prozora M se može promjeniti na proizvoljni broj sa:

```
g = spa ( Data, M)
```

Pravilo je da kako M raste, procjenjene funkcije frekvencija, pokazuju oštrije detalje ali su i više podložne slučajnim smetnjama. Tipična sekvenca komandi koja testira različite veličine prozora je :

```
g10 = spa ( Data, 10 )
```

```
g25 = spa ( Data, 25 )
```

```
g50 = spa ( Data, 50 )
```

```
bode ( g10, g25, g50 )
```

IDENT PAKET U MATLAB-u

Empirijska procjena prenosne funkcije se dobije kao odnos izlaza i ulaza Fourierove transformacije sa:

$$g = \text{etfe} (\text{Data})$$

Ovo se takodjer može interpretirati kao procjena spektralne analize za veličinu prozora koja je jednaka dužini podataka.

Za vremenske serije, etfe daje periodogram kao procjenu spektra. Ova funkcija takodjer omogućuje izglađenje (smoothing) grube procjene, i može biti dobra alternativa za signale i sisteme sa oštrim rezonancama.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Dodatne informacije o predstavljanju podataka sa iddata

Ulaznim i izlaznim kanalima su data default imena kao : y1, y2, u1, u2, itd.

Imena kanala se mogu setovati sa:

```
set ( Data , 'Inputname', {'Voltage', 'Current'}, 'OutputName' ,  
' Temperature' )
```

(dva ulaza i jedan izlaz u ovom primjeru). I ova imena će se pojavljivati na svim plotovima iz objekta. Također , ova imena se i naslijedjuju od modela koji su procjenjeni iz ovih podataka.

Također, inženjerske jedinice kanala se mogu specificirati koristeći osobine **OutputUnit** i **InputUnit**. Ove jedinice, kada se specificiraju, bit će korištene u plotovima.

Vremenske tačke pridružene samplovima se određuju sa intervalom sampliranja T_s i vremenom prvog sampla, T_{start} .

IDENT PAKET U MATLAB-u

Data.Tstart = 24

Stvarne vrijednosti vremenskih tačaka su date sa osobinom SamplingInstants, kao u:

plot (Data.sa , Data.u)

za iscrtavanje ulaza sa korektnim vremenskim tačkama. Autofill se koristi za sve ove osobine, i one su osjetljive na velika/mala slova.

Za brzo pisanje, 'u' je sinonim za ulaz (input) a 'y' za izlaz (output) kada referenciramo osobine.

Manipulacije sa kanalima

Lagani način da se setuju i dobiju osobine kanala je da se koristi subscripting. Subskripti su definirani kao:

Data (samples, outputs, inputs),

tako da je napr. Dat (:,3, :) je objekat podatka koji je dobijen iz Dat zadržavajući sve ulazne kanale, i samo izlazni kanal

IDENT PAKET U MATLAB-u

broj 3.

Kanali se mogu dobiti preko njihovih imena, tako da:

$$\text{Dat} (: , \{ ' \text{speed}' , ' \text{flow}' \} , [])$$

je objekat podataka gdje su naznačeni izlazni kanali selektirani i nikakvi ulazni kanali nisu izabrani.

Nadalje:

$$\text{Dat1}(101:200, [3 \ 4] , [1 \ 3]) = \text{Dat2} (1001:1100, [1 \ 2] , [6 \ 7])$$

će promjeniti samplove 101 do 200 izlaznih kanala 3 i 4 i ulaznih kanala 1 i 3 u iddata objekat Dat1 , na naznačene vrijednosti iz iddata objekta Dat2. Imena i jedinice ovih kanala će se takodjer promjeniti u skladu sa tome.

Da bi se dodali novi kanali, treba koristiti horizontalnu konkatenciju objekata:

$$\text{Dat} = [\text{Dat1} \ \text{Dat2}] ;$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

ili direktno dodati zapise podataka, tako da naprimjer:

$$\text{Dat.u} (:, 5) = u$$

će dodati peti ulaz u Dat.

Nejednako sampliranje

Osobina `SamplingInstants` daje trenutke sampliranja tačkica podataka. Može se uvijek dobiti sa `get (Dat, 'SamplingInstants')` ili sa `Dat.s` i onda se izračunava iz `Dat.Ts` i `Dat.Tstart`. `Sampling.Instants` se može također podesiti na proizvoljni vektor iste dužine kao i podatci, tako da se može raditi i sa nejednakim sampliranjem. `Ts` se tada automatski setuje na `[]`.

Multipli eksperimenti

`iddata` objekat može također pohraniti podatke iz više odvojenih eksperimenata. Osobina `ExperimentName` se koristi da odvoji eksperimente. Broj podataka kao i osobine

IDENT PAKET U MATLAB-u

samplovanja mogu varirati od eksperimenta do eksperimenta, ali ulazni i izlazni kanali moraju biti isti. (koristiti NaN da se ispune nemjerljivi kanali u nekim eksperimentima). Zapisi podataka će biti ćelije polja (arrays), gdje ćelije sadrže podatke iz svakog eksperimenta.

Multipli eksperimenti se mogu direktno definirati, ako se definiraju osobine 'y' i 'u' kao i 'Ts' i 'Tstart' kao ćelije polja (cell arrays).

Obično je lakše kreirati višeeksperimentalne podatke objedinjavanjem (merging) eksperimenata kao u :

```
Dat = merge ( Dat1, Dat2 )
```

Pohranjivanje višestrukih eksperimenata kao jedan iddata objekat je vrlo korisno kada se radi sa eksperimentalnim podacima koji su sakupljeni u različitim prilikama, ili kada set podataka je rescijepljen da bi se otklonili "loši" dijelovi podataka.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Eksperimentalni podatci se mogu dobiti sa komandom : `getexp` kao i u `getexp (Dat,3)` ili `getexp (Dat, Period1)` .

Oni se takodjer mogu dobiti sa subskriptom sa četvrtim indeksom : `Dat (:, :, :, 3)` je eksperiment broj 3, a :

`Dat (:, :, :, {'Day1', 'Day4'})` daje dva eksperimenta sa naznačenim imenima.

Subskripting se može kombinirati: `Dat (1: 100, [2,3], [4:8], 3)` daje 100 prvih smplova izlaznih kanala 2 i 3 i ulaznih kanala 4 do 8 od eksperimenta br. 3.

Može se takodjer koristiti kao poddoznačavanje (`subassignment`):

IDENT PAKET U MATLAB-u

Subreferenciranje

Samplovi, izlazni i ulazni kanali se mogu referencirati u skladu sa:

Data (samples, outputs, inputs)

Treba koristiti znak za kolonu (:) da označimo sve sampleve/kanale i praznu matricu ([]) da označimo da nema sampleva /kanala. Kanali se mogu referencirati ili po broju ili imenu. Za nekoliko imena, mora se koristiti polje ćelije.

```
Dat2 = Dat ( :, 'y3', {'u1', 'u4'})
```

```
Dat2 = Dat ( :, 3, [1 4])
```

Mogu se takodjer koristiti i logički izrazi , naprimjer:

```
Dat3 = Dat2 ( Dat2.sa > 1.27 & Dat2.sa < 9.3)
```

će izabrati uzorke sa vremenskim tagovima između 1.27 i 9.3.

Subreferencirajući sa viličastim zagradama mi referenciramo

IDENT PAKET U MATLAB-u

eksperiment.

Data {Experiment} (samples, outputs, inputs)

Svaka subreferencirana varijabla se može doznačiti.

Data {'Exp3'}.z = flow (1: 700, :)

Data (1:10,1,1) = Dat1 (101:110,2,3)

Dodavanje kanala

Dat = [Dat1, Dat2,.....DatN]

kreira iddata objekat Dat, koji se sastoji od ulaznih i izlaznih kanala u Dat1,....DatN. Default imena kanala su ('u1', 'u2', 'y1', 'y2' . itd.) i promjeniće se tako da se izbjegne preklapanje u imenima, i novi kanali su dodati.

Ako Datk sadrži kanale sa imenima koje je specificirao korisnik, koji su već prisutni u kanalima Datj , $j < k$, ovi novi kanali će biti ignorisani.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Dodavanje smplova

$\text{Dat} = [\text{Dat1}, \text{Dat2}, \dots, \text{DatN}]$

kreira iddata objekat Dat čiji signali se dobiju sa postavljanjem ovih Datk jedan na drugoga. Tj.

$\text{Dat.y} = [\text{Dat1.y} ; \text{Dat2.y} ; \dots ; \text{DatN.y}]$

i slično i za ulaze. Datk objekti moraju svi imati isti broj kanala i eksperimenata.

Procjena parametarskih modela

SIT toolboks sadrži nekoliko funkcija za procjenu parametarskih modela. Svi oni imaju istu komandnu strukturu:

$m = \text{function} (\text{Data}, \text{modstruc})$

$m = \dots$

$\text{function} (\text{Data}, \text{modstruc}, \text{'Property1' } , \text{Value1' } , \dots , \text{PropertyN' } , \text{ValueN})$

IDENT PAKET U MATLAB-u

Argument Data je `iddata` objekat koji sadrži sekvence ulaznih i izlaznih podataka, dok `modstruc` specificira specifičnu strukturu modela koji treba biti procjenjen. Rezultirajući procjenjeni model je sadržan u `m`. To je model objekat koji pohranjuje razne informacije.

Ukucavajući :

`m`

dobićemo koncizni displej modela. Komanda

`present (m)`

daje još više detalja , dok

`get (m)`

daje kompletnu listu osobina modela. Vrijednosti osobina se mogu lako dobiti sa dot referenciranjem ; naprimjer:

`m.par`

daje procjenjene parametre.

IDENT PAKET U MATLAB-u

U pozivu funkcije (....., 'Proprety1' , Value1 ,....., 'PropretyN', ValueN), je lista osobina koje mogu biti doznačene da utiču na strukturu modela, kao i na algoritam procjene. Model m se takodjer trenutano priprema za prikazivanje i analizu njegovih karakteristika kao i za transformaciju u druge načine predstavljanja, kao u :

bode (m)

compare (Data, m)

[A, B, C, D , K] = ssdata (m)

ARX modeli

Da se procjene parametri a_i i b_i od ARX modela , jednačine (6.14), treba koristiti funkciju arx.

m = arx (Data, [na, nb, nk])

Ovdje na, nb i nk su odgovarajući redovi i kašnjenja u jednačini (6.15) , koja definira tačnu strukturu modela.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Funkcija `arx` implementira metod procjene najmanjeg kvadrata greške, koristeći QR faktorizaciju za preodredjene linearne jednačine.

Alternativa je korištenje metode instrumentalne varijable (IV) opisane u sprezi sa jednačinom (6.39). Ovo se dobije iz:

$$m = iv4 (Data, [na nb nk])$$

koja daje automatski (i približno optimalni) izbor filtera N i M u jednačini (6.39).

I `arx` i `iv4` su primjenjivi na bilo koje multivarijabilne sisteme. Ako imamo n_y izlaza i n_u ulaza, redovi su definirani kao: na je $n_y \times n_y$ matrica čiji i -j unos daju red polinoma koji povezuje prošle vrijednosti od y_j sa tekućim vrijednosti y_i (tj. prethodne vrijednosti y_j do $y_j (t - na(i,j))$ se koriste kada se procjenjuju $y_i (t)$). Slično, i -j ulaz od $n_y \times n_u$ matrice nu i nk , respektivno, daju red i kašnjenje od ulaznog

IDENT PAKET U MATLAB-u

broja j , kada se procjenjuje izlazni broj i .

AR modeli

Za jednostruki izlazni signal $y(t)$, prototip ARX modela je AR model.

$$A(q) y(t) = e(t) \quad (6.40)$$

arx komanda pokriva takodjer i specijalni slučaj :

$$m = arx (y, na)$$

ali za skalarne signale, više opcija su raspoložive sa komandom:

$$m = ar (y , na)$$

koji ima opciju koja dozvoljava korisniku da izabere algoritam iz grupe od nekoliko popularnih tehnika za računanje AR modela sa najmanjim kvadratima. Medju njima su Burg-ov metod, metod geometrijske folije (geometric lattice) , Yule-Walker pristup, i modificirani

IDENT PAKET U MATLAB-u

kovarijantni metod. Prototip iv4 komande je :

$$m = \text{ivar} (y, na)$$

koja koristi tehniku instrumentalne varijable da izračuna AR dio vremenske serije.

Opšti polinomijalni modeli crne kutije (black-box)

Bazirano na metodi procjene greške u jednačini (6.38), korisnik može konstruirati modele bilo koje strukture. Za opšti model dat jednačinom (6.19), postoji funkcija:

$$m = \text{pem} (\text{Data} , nn)$$

gdje nn daje sve redove i kašnjenja.

$$nn = [na \ nb \ nc \ nd \ nf \ nk]$$

Nenulti redovi modela se mogu definisati kao osobina ili par ime osobine/ vrijednost osobine kao u :

IDENT PAKET U MATLAB-u

$m = \text{pem} (\text{Data}, 'na' , na , 'nb' , nb , 'nc' , nc , 'nk' , nk)$

pem komanda pokriva sve slučajeve modela linearnog sistema crne kutije . Za specijalne slučajeve :

$m = \text{armax} (\text{Data}, [na \ nb \ nc \ nk])$

$m = \text{oe} (\text{Data} , [na \ nf \ nk])$

$m = \text{bj} (\text{Data} , [nb \ nc \ nd \ nf \ nk])$

se može koristiti.

Sve rutine takodjer pokrivaju jedno izlazne, višeulazne sisteme tipa :

$$A(q)y(t) = \frac{B_1(q)}{F_1(q)}u_1(t - nk_1) + \dots + \frac{B_{nu}(q)}{F_{nu}(q)}u_{nu}(t - nk_{nu}) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (6.41)$$

gdje nb , nf i nk su vektori redovi iste dužine kao i broj ulaznih kanala koji sadrže svaki od redova i kašnjenja:

IDENT PAKET U MATLAB-u

```
nb = [ nb1 .....nbnu ] ;  
nf = [ nf1 .....nfnu ] ;  
nk = [ nk1 .....nknu ] ;
```

Ove rutine procjene parametara zahtjevaju iterativno traženje za minimum funkcije u jednačini (6.39). Ovo traženje koristi specijalnu startnu proceduru baziranu na najmanjim kvadratima i instrumentalnom varijablom .

Iz početne procjene , procedura Gauss- Newtonove minimizacije se izvršava sve dok norma Gauss-Newtonovog pravca je manja od date tolerancije.

Rutina procjenjivanja takodjer vraća procjenjenu kovarijantnu matricu procjenjenog parametra vektora kao dio m.

Rutine pem, armax, oe, i bj se takodjer mogu startovati sa bilo kojom početnom vrijednošću mi , tj. u objektu modela¹⁵¹

IDENT PAKET U MATLAB-u

zamjenjujući n sa m . Naprimjer:

$$m = \text{pem} (\text{Data} , m_i)$$

Dok se traženje tipično inicijalizira koristeći ugradjenu start-up proceduru, dajući samo redove i kašnjenja , mogućnost da se forsira specifični početni uslov je koristan u nekim uslovima.

Informacija o tome kako minimizacija napreduje se može pratiti u MATLAB komandnom prozoru sa osobinom trace.

Modeli u prostoru stanja

Parametrizacija za diskretni u vremenu model crne kutije (black box)

Predpostavimo prvo da ne postoji specifično znanje o internoj strukturi modela u prostoru stanja i diskretnog vremena. (jednačina (6.15)). Traži se bilo koji linearni model. Jednostavan pristup je da se koristi:

IDENT PAKET U MATLAB-u

$m = pem (Data)$

Ovo procjenjuje model u prostoru stanja bilo kojeg reda (od 1 do 10) koji izgleda razumno.

Da bi se našao model crne kutije odredjenog reda n , koristiti:

$m = pem (Data, n)$

Da se dobije plot, iz kojeg se može odrediti red medju listom redova , $nn = [n1, n2, \dots, nN]$, koristiti:

$m = pem (Data, 'nx' , nn)$

Svi ovi modeli crne kutije se inicijaliziraju sa metodom podprostora $n4sid$. Da se dobije procjena iz ove rutine, koristiti

$m = n4sid (Data, n)$

IDENT PAKET U MATLAB-u

Proizvoljno strukturirani modeli u diskretnom i kontinualnom vremenu

Za modele u prostoru stanja date strukture, najveći dio napora se odnosi na definiranje i manipuliranje sa strukturom. Jedanput kada je struktura definirana kao m , korisnik može procjeniti parametre sa :

$$m = \text{pem} (\text{Data}, m_s)$$

Kada su sistemi sa više izlaza, slijedeći kriterij se koristi za minimizaciju:

$$\det \sum_{t=1}^{N} e(t)e^T(t) \quad (6.42)$$

što predstavlja kriterij maksimalne sličnosti za Gausovski šum sa nepoznatom matricom kovarijance.

Numerička minimizacija kriterija prognoze greške (jednačina (6.39)) ili (6.42) , može biti težak problem za parametrizaciju opšteg modela.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Kriterij, kao funkcija slobodnih parametara, može definirati komplikovanu površinu sa mnogim lokalnim minimumima, uskim dolinama itd. Ovo može zahtjevati značajnu interakciju od strane korisnika, u obezbjedjenju razumnih početnih vrijednosti parametara, kao i u zamrzavanju izvjesnih vrijednosti parametara (koristeći osobinu FixedParameters) , dok se ostalima dozvoljava da budu slobodni. Primjetimo da pem dozvoljava zamrzavanje bilo kojih parametara na njihove tekuće ili nominalne vrijednosti.

Procedura koja se često koristi za modele u prostoru stanja je da se dozvoli parametru šuma i matrici K da bude slobodan samo onda kada je dobijen razuman model dinamičkog dijela.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Opcione varijable

Estimacione funkcije prihvataju listu parova ime osobine/ vrijednost osobine koja može uticati i na strukturu modela i na algoritam procjene. Primjetimo da bilo koja osobina, kao i vrijednosti koje su stringovi , se može unjeti kao nedvosmislena skraćenica koja nije osjetljiva na velika/mala slova, kao naprimjer:

```
m = pem ( Data, mi , 'fo' , 'si' )
```

Primjena na sve estimacione modele

Slijedeće osobine se mogu primjeniti na sve estimacione metode:

- Focus
- MaxSize
- FixedParameter

IDENT PAKET U MATLAB-u

Focus: Ova osobina utiče na težinsku funkciju koja se primjenjuje na uklapanje između modela i podataka. Može se koristiti da obezbjedi da model aproksimira istinski sistem nad nekim intervalom frekvencija. Focus može poprimiti slijedeće vrijednosti:

- Predikcija : Ovo je default i znači da model je određen sa minimiziranjem grešaka predikcije. Korepondira sa frekventnom težinskom funkcijom koja je data sa ulaznim spektrom pomnoženim sa inverznim modelom šuma. Tipično, ovo favorizira dobro fitovanje kod viših frekvencija. Sa tačke gledišta statističke varijanse, ovo je optimalno otežavanje, ali su ipak aproksimacioni aspekti (bias) od fita zanemareni.
- Simulacija: Ovo znači da frekventno otežavanje uklapanja prenosne funkcije je dato sa ulaznim spektrom. Frekventni opsezi gdje ulaz ima značajnu snagu će biti bolje

IDENT PAKET U MATLAB-u

opisani od strane modela. Drugim riječima, aproksimacija modela je takva da će model proizvesti simulacije koje su najbolje moguće, kada se primjene na ulaze sa istim spektrom koji se koristi za procjenjivanje. Za modele koji nemaju model smetnje ($A = C = D$ za idpoly modele i $K = 0$ za idss modele), nema razlike između vrijednosti simulacije i predikcije. Za modele sa opisom smetnji, ovo se procjenjuje sa metodom procjene greške, fiksirajući procjenjenu prenosnu funkciju sa ulaza na izlaz. Rezultirajući model će garantirano biti stabilan.

- Stabilnost: Ovaj algoritam je modificiran tako da se garantira stabilan model, ali otežavanje još uvijek korespondira sa predikcijom.
- Bilo koji SISO linearni filter. Kada prenosna funkcija sa ulaza na izlaz je određena sa fitovanjem frekvencije, sa ovim filterom pomnoženo sa ulaznim spektrom kao

IDENT PAKET U MATLAB-u

funkcijom otežavanja. Model šuma je određen sa metodom predikcije greške, dok se procjena prenosne funkcije fiksira. Da se dobije dobar model fitovanja nad specijalnim opsegom frekvencija, filter treba biti tako izabran sa pojasom propuštanja unutar cijelog opsega. Za model bez modela smetnje, rezultat je isti kao i da smo prvo primjenili prefiltriranje podataka koristeći `idfilt`. Filter se može specificirati na nekoliko načina:

- kao bilo koji `idmodel` sa jednim ulazom i izlazom
- kao `ss`, `tf`, ili `zpk` model iz SIT toolboksa
- kao $\{ A, B, C, D \}$ sa matricama u prostoru stanja za filter
- kao $\{ \text{brojnik}, \text{nazivnik} \}$ sa prenosnom funkcijom brojnik/nazivnik filtera.

`MaxSize` : Ne formira se ni jedna matrica sa više od `MaxSize` elemenata od strane algoritma.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Umjesto toga, for loops će se koristiti. MaxSize će odlučiti o kompromisu između memorije i brzine, i može spriječiti sporo korištenje virtualne memorije. MaxSize može biti bilo koji pozitivni cijeli broj, ali se zahtjeva da ulazno-izlazni podaci sami sadrže manje od MaxSize elemenata. Default vrijednost za MaxSize je Auto, što znači da se vrijednost određuje u M file idmsize. Ovaj fajl se može editirati od strane korisnika da se optimizira brzina na računaru.

FixedParameter : Lista parametara koja će biti držana fiksno na nominalnim ili početnim vrijednostima i neće se procjenjivati. Ovo je vektor od cjelobrojnih vrijednosti (integers), koji sadrži indekse fiksnih parametara ili imena ćelija polja. Ako se koriste imena, mogući su i "*" ulazi (wildcard) , što može biti pogodno ako imamo grupe parametara u modelu.

IDENT PAKET U MATLAB-u

Osobine algoritma koje vrijede za n4sid, koji procjenjuje modele u prostoru stanja

Ove osobine koje se primjenjuju na procjenu modela podprostora su:

- N4Weight
- N4Horizon

Ove osobine se takodjer onda mogu primjeniti i na pem za procjenu modela crne kutije u prostoru stanja, pošto pem se onda inicijalizira sa n4sid procjenom.

N4weight: Ova osobina odredjuje neke težinske matrice koje se koriste u dekompoziciji po singularnoj vrijednosti, koja je centralni korak u algoritmu. Dva izbora su na raspolaganju : moesp koji korespondira sa MOESP algoritmom od Verhaegena i cva koji je algoritam kanonske varijable Larimora. Default vrijednost je N4Weight = Auto , koja daje automatski izbor izmedju dvije opcije.

IDENT PAKET U MATLAB-u

N4Horison: Odredjuje predikcione horizonte unaprijed i unazad, koji se koriste u algoritmu. Ovo je vektor red sa tri elementa : $N4Horison = [r \ sy \ su]$, gdje r je maksimalni predikcioni horizont unaprijed, tj. algoritam koristi do r koraka unaprijed prediktore, sy je broj prethodnih izlaza, a su je broj prethodnih ulaza koji se koriste za predikciju. Ovi brojevi mogu imati značajan uticaj na kvalitet rezultirajućeg modela, i nema jednostavnih pravila za njihov izbor. Ako uzmemo da je $N4Horizon$ $k \times 3$ matrica, znači da svaki red od $N4Horizon$ će biti testiran, i vrijednost koja daje najbolje predikciono uklapanje sa podacima će biti izabrana.

Ako korisnik izabere samo jednu kolonu u $N4Horizon$, interpretacija je $r = sy = su$. Default izbor je : $N4Horizon = Auto$, koji koristi Akaikeov informacijski kriterij (AIC) za selekciju sy i su .

IDENT PAKET U MATLAB-u

Osobine koje se primjenjuju na estimacione metode koristeći iterativno traženje za minimizaciju kriterija.

Osobine koje kontrolišu iterativno traženje su:

- Trace
- LimitError
- MaxIter
- Tolerance
- SearchDirection
- Advanced

Ove osobine se primjenjuju na `armax`, `bj`, `oe`, i `pem`.

Trace: Ova osobina određuje informaciju o iterativnom traženju koja je na raspolaganju u MATLAB komandnom prozoru:

IDENT PAKET U MATLAB-u

- Trace = Off : Informacija se ne piše na ekran
- Trace = On: Informacija o vrijednostima kriterija i procesom traženja je data za svaku iteraciju.
- Trace = Full : tekuće vrijednosti parametara i smjer traženja su takodjer dati (izuzev kod slučaja " slobodne" SSParametrization za idss modele.)

LimitError : Ova varijabla određuje kako kriterij se modificira iz kvadratnog na onaj koji daje linearnu težinu velikim greškama. Greške koje su veće od LimitError puta procjenjena standardna devijacija će nositi linearnu težinu u kriteriju. Default vrijednost od LimitError je 1.6. Ako je LimitError = 0 onda je robustifikacija onemogućena i vodi ka čistom kvadratičnom kriteriju. Standardna devijacija je robustno procjenjena kao median od absolutnih devijacija od medijana, podjeljena sa 0.7.

IDENT PAKET U MATLAB-u

MaxIter : Maksimalni broj iteracija izvršenih za vrijeme traženja minimuma. Iteracije će se zaustaviti kada se dostigne MaxIter, ili neki drugi kriterij zaustavljanja je zadovoljen. Default vrijednost za MaxIter je 20. Setovanje MaxIter = 0, će vratiti rezultat start-up procedure. Stvarni broj korištenih iteracija je dat sa osobinom EstimationInfo.Iterations.

Tolerance: Bazirano na Gauss-Newtonovom vektoru sračunatom pri tekućim vrijednostima parametara, pravi se procjena očekivanog poboljšanja kriterija kod slijedeće iteracije. Kada je ovo očekivano poboljšanje manje od tolerancije Tolerance %, iteracije se zaustavljaju. Default vrijednost je : 0.01.

SearchDirection: Smjer duž kojeg se izvršava linijsko traženje da se nadje manja vrijednost funkcije kriterija. Može poprimiti slijedeće vrijednosti:

IDENT PAKET U MATLAB-u

- gn : Gauss-Newtonovski smjer (inverzni Hessian puta gradijent smjera). Ako se poboljšanje ne nadje duž ovoga smjera, pokušava se i sa smjerom gradijenta.
- gns: Regularizirana verzija Gauss-Newtonovskog smjera. Vlastite vrijednosti (eigenvalues) koje su manje od pinvtot Hessiana se zanemaruju, i Gauss-Newtonov smjer se računa u preostalom podprostoru.
- lm: Koristi se Levenberg-Marquard metod. Ovo znači da je slijedeća vrijednost parametra $-pinv(H+d*i)$ * grad od prethodne vrijednosti, gdje je H hessian, i je jedinična matrica , grad je gradijent , d je broj koji se povećava dok se ne nadje donja vrijednost kriterija.
- Auto: Izbor između gornjih vrijednosti se vrši u algoritmu. Ovo je default izbor.

Jedna od osobina povratnog modela je EstimationInfo. Ovo je struktura koja sadrži korisnu informaciju o estimacionom

IDENT PAKET U MATLAB-u

procesu.

Slijedeća važna opcija je InitialState,

Za procjene spektralne analize , možemo izračunati frekventne funkcije za proizvoljne frekvencije. Ako su frekvencije specificirane u vektoru redu w , tada:

$$g = \text{spa} (z, M, w)$$

rezultira u g koje se izračunava za ove frekvencije. Možemo generirati logaritamski razmještene frekvencije koristeći MATLAB logspace funkciju. Na primjer,

$$w = \text{logspace} (-3, \pi, 128)$$

Definiranje strukture modela

Pošto SIT toolboks radi sa velikim brojem različitih struktura modela, važno je da se one mogu definirati na fleksibilan način.

U ovoj sekciji bit će opisano kako se strukture modela i

IDENT PAKET U MATLAB-u

modeli mogu direktno definirati. Ovo može biti zahtjevano, naprimjer, kada se kreira model za simulaciju. Također, može biti potrebno definirati strukturu modela koji nisu tipa crne kutije, nego sadrže detaljniju internu strukturu, koja reflektuje neko fizikalno sagledavanje načina kako sistem radi.

Opšti izgled predstavljanja modela i struktura modela u SIT toolboku je pomoću raznih modela objekata. U ovoj sekciji bit će uvedene komande (osim samih funkcija parametarske procjene), koje kreiraju različite modele.

Modeli objekti će sadržavati različit broj osobina. Za bilo koji model mi možemo pisati:

get (m)

- da se vidi lista osobina modela, i

- set (m)

IDENT PAKET U MATLAB-u

da se vide koje su vrijednosti doznačene. Svaka vrijednost osobine se može dobiti sa subreferensiranjem kao:

m.A

i postaviti sa:

m.b (3) = 27

Polinomijalni modeli crne kutije: idpoly model

Opšti ulazno/izlazni oblik: (jednačina (6.39)):

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t - nk) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (6.43)$$

je definirana sa pet polinoma $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$ i $F(q)$. Ovi su predstavljeni u standardnom MATLAB formatu za polinome. Polinomski koeficijenti se pohranjuju kao vektori redovi poredani po opadajućem stepenu. Naprimjer,

IDENT PAKET U MATLAB-u

polinom:

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n}$$

je prikazan kao :

$$A = [1 \ a1 \ a2 \ \dots \ an]$$

Kašnjenja u sistemu su indicirana sa vodećim nulama u B (q) polinomu. Naprimjer, ARX model:

$$y(t) - 1.5y(t - 1) + 0.7y(t - 2) = 2.5u(t - 2) + 0.9u(t - 3) \quad (6.44)$$

je predstavljen sa polinomima :

$$A = [1 \ -1.5 \ 0.7]$$

$$B = [0 \ 0 \ 2.5 \ 0.9]$$

idpoly predstava jednačine (6.43), se kreira komandom :

$$m = \text{idpoly} (A, B, C, D, F, \text{lam}, T)$$

lam je ovdje varijansa izvora bijeloga šuma e(t) i T je interval sampliranja. Elementi u repu se mogu izostaviti sa default⁷⁰

IDENT PAKET U MATLAB-u

vrijednostima. Sistem (jednačina (6.44)) se može predstaviti kao:

$$m = \text{idpoly} ([1 -1.5 0.7], [0 0 2.5 0.9])$$

U slučaju višestrukog ulaza (jednačina (6.41) , B i F su matrice, čiji broj reda k korespondira sa k-tim ulazom. Komanda `idpoly` se također može koristiti da definira vremenski kontinualne sisteme.

Kada je `m` definirano, polinomi i njihovi redovi se (6.43) mogu dobiti i mjenjati kao u:

`m.a` % za A polinom

`roots (m.a)`

`m.a (3) = 0.95`

IDENT PAKET U MATLAB-u

Multvarijabilni ARX modeli : idarx model

Multivarijabilni ARX model sa n_u ulaza i n_y izlaza je dat sa:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t) \quad (6.45)$$

Ovdje $A(q)$ je $n_y \times n_y$ matrica čiji ulazi su polinomi po operatoru kašnjenja q^{-1} . Možemo ih predstaviti kao:

$$A(q) = I_{n_y} + A_1 q^{-1} + \dots + A_{n_a} q^{-n_a} \quad (6.46)$$

kao i sa matricom:

$$A(q) = \begin{bmatrix} a_{11}(q) & a_{12}(q) & \dots & a_{1n_y}(q) \\ a_{21}(q) & a_{22}(q) & \dots & a_{2n_y}(q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n_y1}(q) & a_{n_y2}(q) & \dots & a_{n_y n_y}(q) \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

gdje ulazi a_{kj} su polinomi po operatoru kašnjenja q^{-1} . :

$$a_{kj}(q) = \delta_{kj} + a_{kj}^1 q^{-1} + \dots + a_{kj}^{na_{kj}} q^{-na_{kj}} \quad (6.48)$$

Ovaj polinom opisuje kako stare vrijednosti izlaza broj j utiču na broj k . Ovdje δ_{kj} je Kronecker –delta, jednak je 1 kada je $k = j$, inače je jednak 0. Slično, $B(q)$ je $n_y \times n_u$ matrica:

$$B(q) = B_0 + B_1 q^{-1} + \dots + B_{nb} q^{-nb} \quad (6.49)$$

ili :

$$B(q) = \begin{bmatrix} b_{11}(q) & b_{12}(q) & \dots & b_{1n_u}(q) \\ b_{21}(q) & b_{22}(q) & \dots & b_{2n_u}(q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n_y1}(q) & b_{n_y2}(q) & \dots & b_{n_y n_u}(q) \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

sa:

$$b_{kj}(q) = b_{kj}^1 q^{-nk_{kj}} + \dots + b_{kj}^{nb_{kj}} q^{-nk_{kj} - nb_{kj} + 1}$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

Kašnjenje sa ulaza broj j na izlaz broj k je nk_{kj} . Da se poveže sa definicijom strukture u terminima na , nb i nk u komandama `arx` i `iv4`, primjetimo da na je matrica čiji kj -element je na_{kj} , dok kj -elementi od nb i nk su nb_{kj} i nk_{kj} respektivno. ^(6.48)

`idarx` predstava modela (jednačina (6.45)), se može kreirati sa :

$$ma = idarx (A, B) \quad (6.49)$$

gdje A i B su 3D polja (arrays), dimenzija $ny \times ny \times (n + 1)$ i $ny \times nu \times (nb + 1)$, respektivno, koja definira matrične polinome (jednačine (6.46) i (6. 49)).

Primjetimo da $A (:, :, 1)$ je uvijek jedinična matrica , i da koeficijenti vodećih nula u matrici B definiraju kašnjenja.

Primjetimo da $A (:, :, 1)$ je uvijek jedinična matrica , i da koeficijenti vodećih nula u matrici B definiraju kašnjenja. ¹⁷⁴

IDENT PAKET U MATLAB-u

Posmatrajmo slijedeći sistem sa dva izlaza i tri ulaza:

$$\begin{aligned}y_1(t) - 1.5y_1(t-1) + 0.4y_2(t-1) + 0.7y_1(t-2) &= \\0.2u_1(t-4) + 0.3u_1(t-5) + 0.4u_2(t) - 0.1u_2(t-1) + 0.15u_2(t-2) + e_1(t) & \\y_2(t) - 0.2y_1(t-1) - 0.7y_2(t-2) + 0.01y_1(t-2) &= \\u_1(t) + 2u_2(t-4) + 3u_3(t-1) + 4u_3(t-2) + e_2(t) &\end{aligned}\tag{6.50}$$

koji u matričnoj notaciji se može pisati kao:

$$\begin{aligned}y(t) + \begin{bmatrix} -1.5 & 0.4 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix} y(t-1) + \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.01 & -0.7 \end{bmatrix} y(t-2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) + \\ \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} u(t-1) + \begin{bmatrix} 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} u(t-2) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u(t-3) + \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} u(t-4) + \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u(t-5) &\end{aligned}$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

Ovaj sistem je definiran i simuliran za neku vrijednost ulaza u , i onda procjenjen u korektnoj ARX strukturi sa slijedećim stringovima komandi:

```
A(:, :, 1) = eye(2);
A(:, :, 2) = [-1.5 0.4; -0.2 0];
A(:, :, 3) = [0.7 0 ; 0.01 -0.7];
B(:, :, 1) = [0 0.4 0; 1 0 0];
B(:, :, 2) = [0 -0.1 0; 0 0 3];
B(:, :, 3) = [0 0.15 0; 0 0 4];
B(:, :, 4) = [0 0 0; 0 0 0];
B(:, :, 5) = [0.2 0 0; 0 2 0];
B(:, :, 6) = [0.3 0 0; 0 0 0];
m0 = idarx(A,B);
u = iddata([], idinput([200,3]));
e = iddata([], randn(200,2));
y = sim(m0, [u e]);
na = [2 1; 2 2];
nb = [2 3 0; 1 1 2];
nk = [4 0 0; 0 4 1];
me = arx([y u],[na nb nk])
me.a % The estimated A-polynomial
```


IDENT PAKET U MATLAB-u

Modeli crne kutije u prostoru stanja: idss model

Osnovni modeli u prostoru stanja su :

Inovaciona forma diskretnog vremena:

$$x(kT + T) = Ax(kT) + Bu(kT) + Ke(kT) \quad (a)$$

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) + e(kT) \quad (b)$$

$$x(0) = x_0 \quad (c) \quad (6.51)$$

Ovdje T je interval sampiranja, $u(kT)$ je ulaz u trenutku kT , a $y(kT)$ je izlaz u trenutku kT .

Sistem izražene dinamike kontinualan u vremenu:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) + \tilde{K}w(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Du(t) + w(t) \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$x(0) = x_0$$

IDENT PAKET U MATLAB-u

Često je lakše definirati parametrizirani model u prostoru stanja kontinualan u vremenu, pošto fizikalni zakoni su najčešće opisani preko diferencijalnih jednačina. Matrice F , G , H i D sadrže elemente sa fizikalnim značenjem (naprimjer, materijalne konstante). Numeričke vrijednosti ovih mogu ili ne moraju biti poznate. Da bi se procijenili nepoznati parametri, bazirani na sampliranim podatcima (6.51.) (predpostavljajući T je interval sampliranja), prvo treba transformisati jednačinu (6.52) u (6.51) koristeći formule iz jednačine (6.27). Vrijednost Kalmanove matrice pojačanja (jednačina (6.51)), ili \tilde{K} u jednačini (6.52) zavisi od predpostavljenog karaktera aditivnih šumova $w(t)$ i $e(t)$ u jednačini (6.25), i njegovog kontinualnog opozita. Ovo daje (6.52) direktno parametriziranu inovacionu formu.

Ako je interna struktura šuma važna, možemo koristiti strukture sive kutije (idgrey object) kao u primjeru.

IDENT PAKET U MATLAB-u

`m = idss (A, B, C, D, K, X0, 'Ts' , T)`