

Identifikacija – UVOD

- Cilj:
 - Matematski opis vremenskog ponašanja bilo kojeg sistema:
- Kako?
 - Sistemska analiza (analiza procesa i analiza signala)
 - tehnički, biološki i ekonomski
 - D1: Sistem je ograničeni skup procesa, koji utiču jedan na drugoga
 - D2: Proces označava pretvorbu i/ili transport (prenos) materije, energije i/ili informacije

Analiza procesa

- Teoretska (modeliranje)
 - Jednačine ravnoteže
 - mase, energije
 - Fizikalno-kemijske jednačine stanja
 - Uspostava jednačina za pojave, koje opisuju nepovratne (ireverzibilne) procese (napr. prenos toplote).
 - Eventualna uspostava jednačina entropijske ravnoteže, kod reverzibilnih ili nepovratnih (ireverzibilnih) procesa.

Rezultat:

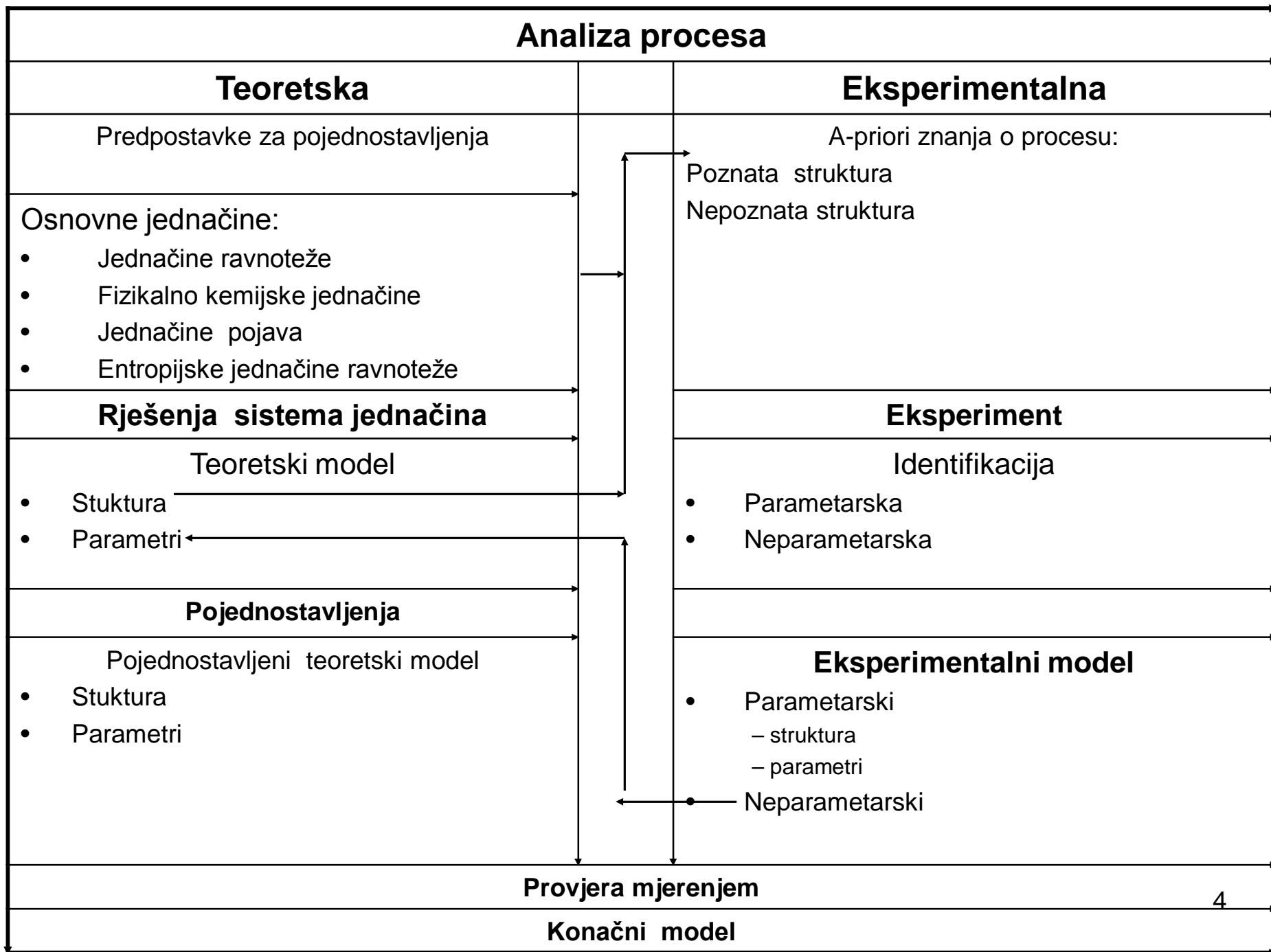
- Sistem običnih i/ili parcijalnih diferencijalnih jednačina

Analiza procesa

- Eksperimentalna (identifikacija)
 - Matematski model dobijamo uz upotrebu mjerenih ulaznih i izlaznih signala
 - Za ulazne signale upotrebljavamo vještački proizvedene ispitne signale (nije uvijek pravilo)
- Koristimo identifikacijske postupke za parametarske ili neparametarske modele

Rezultat:

- Eksperimentalni model



Karakteristike teoretskog modeliranja i identifikacije

Teoretsko modeliranje

- Struktura modela je posljedica prirodnih zakonomjernosti .
- Opis ponašanja unutarnjih akumulatora stanja i ulazno-izlaznog ponašanja.
- Parametri modela su dati kao funkcije procesnih veličina.
- Model je validan za cijelu familiju tipova procesa pri različitim pogonskim stanjima. Mnoge procesne veličine so vrlo malo ili nedovoljno poznate.
- Bitna unutarnja stanja procesa moramo saznati iz matematskog opisa.
- Većinom zahtjeva dosta vremena za razvoj.

Identifikacija

- Strukturu modela moramo pretpostaviti
- Identificiramo je iz ulazno-izlaznog ponašanja
- Parametri modela so čiste numeričke vrijednosti kod kojih ne vidimo povezanost sa fizikalnim procesnim veličinama..
- Model je validan i za razvojni proces kao i za dobijene rezultate iz eksperimenta. Zato ta ponašanja opisujemo relativno dosta tačno.

Karakteristike teoretskog modeliranja i identifikacije

Teoretsko modeliranje

- Struktura modela je posljedica prirodnih zakonomjernosti .
- Opis ponašanja unutarnjih akumulatora stanja i ulazno-izlaznog ponašanja.
- Parametri modela su dati kao funkcije procesnih veličina.
- Model je validan za cijelu familiju tipova procesa pri različitim pogonskim stanjima. Mnoge procesne veličine so vrlo malo ili nedovoljno poznate.
- Bitna unutarnja stanja procesa moramo saznati iz matematskog opisa.
- Većinom zahtjeva dosta vremena za razvoj.

Identifikacija

- Model identificiramo samo za neke postojeće procese.
- Nije potrebno poznavati unutarnje tokove procesa.
- Pošto su postupci identifikacije neovisni od konkretnih procesa , možemo jednostavno upotrebiti jednom razvijenu programsku opremu pri razvoju modela mnogih različitih procesa..
- Većinom zahtjeva relativno malo vremena.

Podjela po tipu identifikacionih metoda

- **Po tipu sistema koji se identifikuje:**
 - ❖ Identifikacija linearnih sistema
 - ❖ Identifikacija nelinearnih sistema
- **Po vremenskoj prirodi sistema**
 - ❖ Identifikacija stacionarnih sistema
 - ❖ Identifikacija nestacionarnih sistema
- **Po vremenskom opisu sistema**
 - ❖ Identifikacija kontinualnih sistema
 - ❖ Identifikacija diskretnih sistema

Podjela po tipu identifikacionih metoda

- **Po složenosti sistema koji se identifikuje:**
 - ❖ Identifikacija sistema sa jednim ulazom i izlazom (SISO)
 - ❖ Identifikacija sistema sa više ulaza i jednim izlazom (MISO)
 - ❖ Identifikacija sistema sa više ulaza i izlaza (MIMO)
- **Po statističkoj prirodi sistema**
 - ❖ Identifikacija determinističkih sistema
 - ❖ Identifikacija stohastičkih sistema
- **Po stepenu apriori znanja o sistemu**
 - ❖ Identifikacija sistema sa više apriori znanja o sistemu (lakše)
 - ❖ Identifikacija sistema sa manje apriori znanja o sistemu (teže)

Rezultat primjene po tipu identifikacionih metoda

- **Model dobijen identifikacijom uz pretpostavke o:**
 - ❖ Linearnosti, determinističkom ponašanju, SISO,
 - ❖ Stacionarni, sa više apriori znanja o ponašanju
- ***Je mnogo jednostavniji od modela dobijenog uz pretpostavke o :***
 - ❖ Nelinearnosti, nestacionarnosti, stohastičkoj prirodi i višedimenzionalnom MIMO sistemu, sa manje apriori znanja
- ***Koji može biti izuzetno složen i komplikovan za gradnju i izvodenje***

OSNOVNE DEFINICIJE I KLASIFIKACIJE

Problem identifikacije karakteristika sistema može se posmatrati kao dual problema upravljanja sistemom. Sistemom se ne može upravljati sve dok nije izvršena njegova identifikacija, bilo apriori ili u trenutku početka upravljanja.

Ukoliko želimo da pokrenemo neki sistem od tačke A do tačke B, možemo se osloniti na čistu sreću ili da naučimo odziv sistema na jedno ili više upravljačkih dejstava. Ako znamo da ulaz u_j dovodi sistem bliže tački B tada možemo primjeniti taj ulaz. Bez tog prethodnog znanja u pogledu u_j , možemo da primjenjujemo i mjerimo odzive (u smislu udaljenosti od B), za više ulaznih dejstava, i tako stvarno vršimo identifikaciju. *Neko znanje o identifikaciji je uvijek neophodno prije nego što se izvede upravljanje.*

Pomenuli smo da je poznavanje diferencijalnih jednačina procesa jedna moguća identifikacija, ali ne i jedina. Na primjer, možemo da napravimo tabelu mogućih upravljanja i njihovih odgovarajućih odziva za koje smo zainteresovani₁₀

OSNOVNE DEFINICIJE I KLASIFIKACIJE

Iz te tabele možemo onda za naše svrhe odabrati najbolje upravljanje. Više drugih formulacija procesa mogu na sličan način dati modele identifikacije.

Ni jedna od razmatranih različitih tehnika identifikacije ne može se upotrebiti za identifikaciju sistema svih vrsta.

Svaka od prikazanih tehnika ima jedno ili više vlastitih područja primjenljivosti. Ovim se ne podrazumjeva da, prema sadašnjem stanju nauke, identifikaciju treba smatrati kao skup recepata za različite tipove sistema. Moguće je da se teorija identifikacije definiše kao nauka koja se bavi procjenjivanjem parametara iz ulaznih i izlaznih podataka, tj. iz historije mjerenja, a procjena se poboljšava sa povećanjem broja mjerenja. Greške u procjeni dovode do grešaka u upravljanju ili u izlazu sistema. Zatim se te greške koriste da bi se popravile dalje procjene. Zbog toga je teorija identifikacije slična , ili je ustvari dual teoriji upravljanja, gdje se greške u upravljanju (predpostavljajući da je sistem već identifikovan) koriste za poboljšanje daljeg upravljanja. I ovdje, kao i u teoriji upravljanja, postoji više ¹¹

OSNOVNE DEFINICIJE I KLASIFIKACIJE

postoji više prilaza u okviru iste teorije od kojih se svaki može primjeniti na određene situacije i slučajeve.

Teorija identifikacije, prema razmatranjima koja slijede, može se proširiti i na procjenjivanje parametara prediktora i filtera. Ovo proširenje proizlazi iz bliske veze između predskazivanja (procjenjivanja) i identifikacije, što se objašnjava činjenicom da je svrha identifikacije da se omogući predskazivanje budućeg ponašanja identifikovanog sistema. Problem predskazivanja se razlikuje, međutim, od problema identifikacije u tome da se kod identifikacije uzimaju veze ulaz/izlaz za predskazivanje budućeg ponašanja, pod uslovom da su dati parametri sistema i njegovi ulazi. Predskazivanje vremenskog niza se zasniva na izmjerenoj historiji vremenskog niza, njegovi ulazi ili često nisu mjerljivi ili nisu uopšte poznati. Odatle se identifikacija parametara prediktora zasniva isključivo na prošlim mjerenjima poruke koja treba da se predskaže (koja se uzima kao izlaz sistema čiji ulaz nije mjerljiv), a ne mogu se upotrebiti podatci ulaz/izlaz.

OSNOVNE DEFINICIJE I KLASIFIKACIJE

Uopšteno govoreći postoji razlika između različitih situacija identifikacije koje traže različite obrade i to:

Prvo, razlikuju se linearni i nelinearni sistemi.

Linearni sistemi se mnogo lakše identifikuju zahvaljujući osobini superpozicije.

Drugo, postoji razlika između stacionarnih i nestacionarnih sistema.

Nestacionarni sistemi imaju parametre koji se menjaju sa vremenom. Sistemi se mogu smatrati stacionarnim ako se njihovi parametri menjaju vrlo sporo u poredjenju sa vremenom koje je potrebno za odgovarajuću identifikaciju.

Treće, često se uzima klasifikacija na diskretne i kontinualne sisteme, iako je transformacija iz kontinualne u diskretnu formulaciju prilično jednostavna.

Četvrto, postoji tehnika identifikacije sistema sa jednim ulazom i izlazom i sa više ulaza.

Tehnika identifikacije je znatno jednostavnija ako na stanje

OSNOVNE DEFINICIJE I KLASIFIKACIJE

sistema utiče samo jedan ulaz nego kada na stanje utiče kombinacija više istovremenih poremećaja ili ulaza.

Peta, klasifikacija uzima u obzir razliku u identifikaciji determinističkih i stohastičkih procesa. Kod stohastičkih procesa, postoji samo, ili uglavnom, probabilističko poznavanje tačnog stanja sistema. U praksi sva mjerenja sadrže šum, a za odgovarajuću identifikaciju je potrebno filtriranje ili usrednjavanje. Kod determinističkih postupaka identifikacije prepostavlja se da je ovo filtriranje već izvršeno.

Šesta, možda najvažnija ali i najteža za definisanje ,je klasifikacija metoda identifikacije prema stepenu apriori znanja sa kojim raspolažemo u pogledu sistema. Klasifikacija nekog sistema kao linearnog podrazumjeva prethodno znanje, kao i kod klasifikacije sistema kao stacionarnog. Ove klasifikacije (linearnost, stacionarnost) mogu se naravno utvrditi iz analize podataka mjerenja, ukoliko nisu apriori zadate.

OSNOVNE DEFINICIJE I KLASIFIKACIJE

Poznavanje dimenzija vektora stanja je veoma važno kod svakog postupka identifikacije, a također i poznavanje prirode interakcija ili nelinearnosti.

Ove klasifikacije su, u određenom smislu, klasifikacije po stepenu poteškoće u identifikaciji. Očigledno, je da je identifikacija determinističkog, linearnog, stacionarnog, procesa, sa jednim ulazom i sa poznatim redom lakša od identifikacije stohastičkog procesa, za kojeg nam je nepoznat red i koji može da bude nelinearan i nestacionaran.

Sigurno je da su tehnike identifikacije koje predpostavljaju manje apriori znanja manje tačne i mnogo složenije u smislu matematičkih poteškoća, brzine konvergencije i vremena za računanje, nego tehnike sa više prethodnog znanja.

S druge strane, tehnike koje se mogu primjeniti za nelinearne ili nestacionarne procese su mnogo složenije od tehnika čija se primjena ograničava na linearne stacionarne

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

processe. Sigurno je da postupci koji predpostavljaju veoma malo apriori znanja u većem stepenu imaju opštu namjenu.

1.METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Najranije metode identifikacije sistema zasnivaju se na frekventnim, odskočnim (step) i impusnim odzivima. Najveći dio ovih metoda primjenjuje se na linearne procese. One se takodjer mogu primjeniti i na linearizovane oblike nelinearnih procesa, ukoliko su nivoi ulaznih signala dovoljno mali. Po definiciji, te metode zahtjevaju upotrebu posebnih ulaznih signala, tj. step ulaza za identifikaciju pomoću odziva na step (odskočnog odziva), impusnog ulaza za identifikaciju pomoću impulsnog odziva i sinusoidalnih ulaza, koji umaju promjenjive učestanosti, za identifikaciju pomoću frekventnih odziva.

Pošto se mjesto normalnih ulaza koriste specijalni ulazi, očigledno je da ove tehnike predstavljaju tkz. "offline" identifikaciju. One se zbog toga mogu primjenjivati samo na

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

linearne stacionarne sisteme, gdje odnos ulaza i izlaza, koji je dobijen za jedan skup ulaza, vrijedi za sve ulaze.

Između prethodna tri tipa ulaznih signala, najjednostavnija je primjena odziva na step, koja se ostvaruje trenutnim otvaranjem ili zatvarenjem ulaznog ventila, ili trenutnim uključanjem ili isključenjem ulaznog napona, dok je za sinusoidalni ulaz potrebna oprema za generiranje sinusoidalnog ulaza i za promjenu učestanosti tog ulaza u području koje je od interesa. Postupak sa impulsnim odzivom često stvara poteškoće u realizaciji zbog generiranja i pobudjivanja sistema impulsnim funkcijama. Međutim ovaj postupak se može primjeniti i na linearizovane oblike nelinearnih sistema, jer je po definiciji amplituda impulsa vrlo velika.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Metode identifikacije pomoću Fourierove transformacije

Mi ćemo za identifikaciju primjenom off-line sinusoidalnog ulaza, step ili impulsnog ulaza upotrebljavati Fourierovu transformaciju.

Uzmimo neku aperiodičnu vremensku funkciju $x(t)$. Fourierova transformacija $X(j\omega)$ od $x(t)$ je data pomoću:

$$F[x(t)] \equiv X(j\omega) = \int x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.1)$$

Fourierova transformacija se može primjeniti na $x(t)$ ako je ona apsolutno integrabilna, to jest ako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (1.2)$$

Ovaj posljednji uslov isključuje primjenu Fourierove transformacije za analizu ulaznih funkcija kao što je sinusna funkcija ili step funkcija.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Ova poteškoća u primjeni Fourierove transformacije na sinusne ili step funkcije može se prevazići ako je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

za neko σ , čak vrlo malo pozitivno σ , tako da se umjesto $x(t)$ uzima $x(t)e^{-\sigma t}$, što daje Laplaceovu transformaciju :

$$X(s) = L[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad ; \quad s \equiv \sigma + j\omega \quad (1.3)$$

Zbog toga se smatra da step odziv predstavlja vrlo lagano asimptotsko smanjivanje stepa, a za sinusoidalni ulaz se smatra da se vrlo lagano prigušuje.

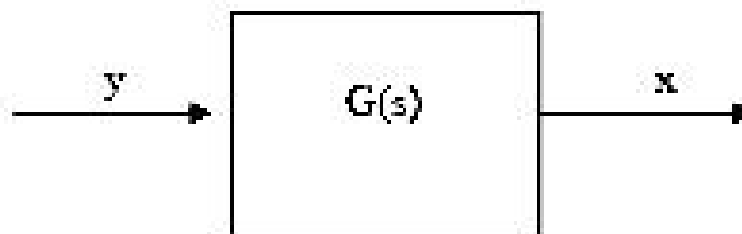
Sada izvodimo Fourierove i Laplaceove transformacije linearnih stacionarnih relacija ulaz/izlaz na slijedeći način:

Uzmimo linearni sistem $G(s)$, kao na narednoj slici, čiji se izlaz $x(t)$ za ulaz $y(t)$, daje pomoću slijedećeg konvolucionog integrala :

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

$$X(t) = \int_0^t y(\tau)g(t - \tau)d\tau; \quad g(t) = L^{-1}[G(s)] \quad (1.4)$$

$L^{-1} []$ je inverzna Laplaceova transformacija.



Slika br. 1.1

Jednačina (1.4) postaje u transformisanom Fourierovom obliku:

$$X(j\omega) = G(j\omega) Y(j\omega) \quad (1.5)$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Dok Laplaceova transformacija jednačine 1.4 zadovoljava:

$$X(s) = G(s)Y(s) \quad (1.6)$$

Gdje su $G(j\omega)$ i $G(s)$ funkcija sistema odnosno prenosna funkcija. Član $G(j\omega)$ jednačine 1.5 se može pisati kao $\mathbf{a}_\omega + j\mathbf{b}_\omega = G(j\omega)$ i predstavlja kompleksno pojačanje sistema za ulaz sa frekvencijom ω . Dakle:

$$\sqrt{\mathbf{a}_\omega^2 + \mathbf{b}_\omega^2} = |G(j\omega)|$$

predstavlja apsolutno pojačanje, a $\arctan \mathbf{b}/\mathbf{a}$ predstavlja fazni pomak između izlaza i ulaza, gdje promjena $G(j\omega)$ u funkciji ω predstavlja frekventni odziv sistema.

Dobijanje $G(j\omega)$ pomoću Fourierove transformacije kod upotrebe step ili impulsnog odziva je prilično jednostavno, jer je

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Fourierova transformacija impulsnog odziva jednaka $G(j\omega)$, dok se Fourierova transformacija step odziva može dati sa $G(j\omega)/j\omega$, uzimajući u obzir napomene iz jednačine (1.2).

Zbog toga, ako se primjenjuje numerička Fourierova transformacija, na step ili impulsni odziv, $G(j\omega)$ se može lako numerički odrediti. Osim toga , pri razmatranju jednačine 1.5 , primjećujemo da se $G(j\omega)$ može dobiti numerički, ako se numerička Fourierova transformacija primjeni na bilo koji konvergentni ulaz i na odgovarajući izlaz o i to na slijedeći način:

$$G(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} = \frac{\text{izlaz}(j\omega)}{\text{ulaz}(j\omega)} \quad (1.7)$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Medjutim, ovaj postupak zahtjeva numeričku transformaciju kako ulaza tako i izlaza, i dijeljenje dvije dobijene kompleksne veličine $X(j\omega)$ i $Y(j\omega)$ za veliki broj različitih frekvencija. Zbog toga je ovaj postupak prilično dug, čak i ako se upotrijebi i brza Fourierova transformacija (FFT). Izuzetak su slučajevi step i impulsnih ulaza koji su već spomenuti, i slučajevi ulaznih šumova.

Očigledno je da ulazi koji se uzimaju u obzir za identifikaciju pomoću FFT trebaju da sadrže sve frekvencije koje su interesantne za sistem. Ako se step ulaz realizuje pomoću eksponencijalno rastuće funkcije, koja ima oblik vremenske funkcije

$$1 - e^{-t/T}$$

tada najveća frekvencija koja se može adekvatno identifikovati pomoću Fourierove transformacije je reda $\omega = 2\pi/T$.

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Numerička Fourierova transformacija

Numerička Fourierova transformacija traži aproksimaciju integrala iz jednačine 1.1 pomoću konačne sume , i to:

$$X(n) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi(nk/N)} \quad (1.8)$$

gdje su :

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

$$X(n) \equiv X(jn\Delta\omega) ; n= 0,1,2,\dots$$

$$t_k \equiv k\Delta t ; k = 0,1,2,\dots,(N-1)$$

$$\Delta t \equiv T/N$$

$$\Omega = 2\pi f = 2\pi n/T ; \Delta\omega = 2\pi/T$$

$$\omega t = \frac{2\pi nk\Delta t}{T} = \frac{2\pi nk}{N}$$

METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Očigledno je da su u bilo kojoj diskretnoj aproksimaciji granice sume u jednačini (1.8) konačne. Tačnost će biti zadovoljavajuća ako su granice N sume, koja označava vremenski raspon kojeg treba razmatrati, približava beskonačnosti. Zbog toga, vremenski interval T , za slučaj step ili impusnog ulaza, mora biti veći od vremena odziva. Ovdje se pod vremenom odziva podrazumjeva vrijeme poslije kojeg se mjerenjem raspoloživim instrumentom ne primjećuje da ima promjena izlaza. Vremenski interval uzimanja uzoraka Δt je naravno vezan na najveću frekvenciju koja se može uzeti u dobijenom frekventnom odzivu, pošto frekvencija preko $1/2\Delta t$ Hz nema nikakvog smisla. U praksi je najbolje da se upotrebi FFT za računanje Fourierovih transformacija i njihovih inverzija. Računanje je brže za faktor $N/\log_2 N$, nego kada se neposredno računa jednačina (1.8).

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

Identifikacija sistema se bavi sa problemima gradnje matematskih modela dinamičkih sistema na bazi observiranih podataka sa sistema. Pošto su dinamički sistemi prisutni svuda oko nas, tehnike identifikacije sistema imaju vrlo široku primjenu.

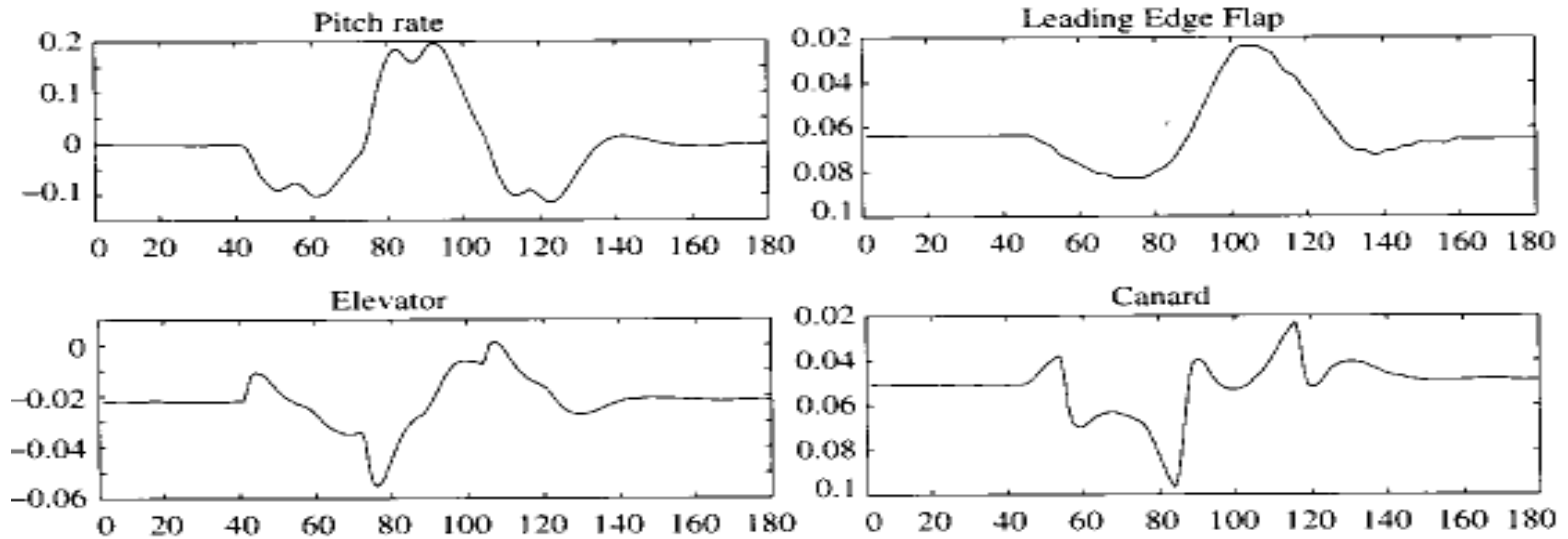
U opštem smislu sistem označava objekat kod kojeg varijable vrlo različitih karakteristika medjusobno interaktiraju i proizvode observabilne (osmotrive) signale. Observabilni signali koji su od interesa za nas se obično nazivaju izlazima. Na sistem takodjer utiču i vanjska dejstva. Vanjska dejstva sa kojima posmatrač može da manipulira se nazivaju ulazi. Preostala se nazivaju smetnje i kako znamo, mogu se podjeliti u one koje su mjerljive i one koje to nisu i mogu se posmatrati samo preko njihovog uticaja na izlaze. Razlika izmedju ulaza i mjerljivih smetnji je obično manje značajna za proces modeli

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

ranja. Jasno da je pojam sistema vrlo širok koncept . Mnogi problemi u raznim oblastima nauke su riješeni u ovom sistemski orijentiranom pristupu. Umjesto formalne definicije sistema, pokažimo šta podrazumjevamo pod sistemom na nekoliko primjera. Na primjeru aviona kao sistema, možemo prikupiti podatke iz testnih letova i graditi model. Naprimjer možemo graditi model po kanalu propinjanja (pitch), tj. kako je brzina promjene ovog ugla propinjanja/poniranja (pitch) zavisna od tri kontrolna signala : elevatora (tj. horizontalnog repa) kanarda (tj. nagiba prednje ivice prednjih krila) i zakretki na prednjem krilu (leading edge flaps).

Avion je nestabilan po pitch uglu pri letu, tako da je za prikaz na narednim slikama jasno da su promjene registrirane u zatvorenim konturama regulacije.

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE



Sistem u ovom primjeru je dinamički tj. tekuće vrijednosti izlaza zavise ne samo od tekućih vrijednosti vanjskih dejstava nego i od njihovih prethodnih vrijednosti. Izlazi dinamičkih sistema čija vanjska dejstva nisu observabilna se često nazivaju vremenskim serijama (ovo je naročito čest termin u ekonomskim aplikacijama).

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

ARX modeli i linearni metod najmanjih kvadrata

Posmatrajmo sada specifičan problem procjene (estimacije) koji će sadržavati većinu onih elemenata sa kojima ćemo se susretati u okviru ovog kursa.

Model

Općenito ćemo označiti ulaz i izlaz sistema u trenutku t sa $u(t)$ i $y(t)$. Najosnovnija relacija između ulaza i izlaza je linearna diferentna jednačina:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m) \quad (1.1)$$

Izabrali smo da sistem opisujemo u diskretnom vremenu, prije svega što se podaci sa sistema uglavnom skupljaju uzorkovanjem (sampliranjem) u okviru nekog digitalno baziranog akvizicionog sistema. U jednačini 1.1 pretpostavljamo da je vrijeme sampliranja jedna vremenska jedinica.

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

Pragmatičan način da se (1.1) posmatra tako da se iz nje određuje slijedeća vrijednost izlaza, kada su raspoložive prethodne observacije:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m) \quad (1.2)$$

Za kompaktnije pisanje, uvešćemo vektore:

$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_m]^T \quad (1.3)$$

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \quad \dots \quad -y(t-n) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-m)]^T \quad (1.4)$$

Sa njima jednačina (1.2) se može pisati kao :

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta$$

Da se naglasi da izračunavanje $y(t)$ iz prethodnih vrijednosti (1.2) zaista zavisi od parametra θ , mi ćemo ovo zvati izračunatom vrijednosti i pisati kao:

$$\hat{y}(t|\theta) = \varphi^T(t)\theta \quad (1.5)$$

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

Metod najmanjih kvadrata

Sada pretpostavimo da za dati sistem, da ne znamo vrijednosti parametara u \mathbf{q} ali da smo zapisali sve ulaze i izlaze u vremenskom intervalu $1 \leq t \leq N$:

$$Z^N = \{u(1), y(1), \dots, u(N), y(N)\} \quad (1.6)$$

Jedan od pristupa nakon toga je da se selektira \mathbf{q} u (1.1) do (1.5) tako da fituje izračunate vrijednosti $\hat{y}(t|\theta)$ što je moguće bolje sa mjerenim izlazima, pomoću metoda najmanjih kvadrata tj.

$$\min_{\theta} V_N(\theta, Z^N) \quad (1.7)$$

gdje :

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - \hat{y}(t|\theta))^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - \varphi^T(t)\theta)^2 \quad (1.8)$$

Mi ćemo označiti vrijednost \mathbf{q} koja minimizira (1.7) sa $\hat{\theta}_N$

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta} V_N(\theta, Z^N) \quad (1.9)$$

Pošto je V_N kvadratično po θ možemo naći lako minimalnu vrijednost postavljajući izvod da je jednak nuli, tj.

$$0 = \frac{d}{d\theta} V_N(\theta, Z^N) = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)(y(t) - \varphi^T(t)\theta)$$

što daje

$$\sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t) = \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t)\theta \quad (1.10)$$

ili :

$$\hat{\theta}_N = \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t) \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t) \quad (1.11)$$

Jedanput kada su vektori $\varphi(t)$ definirani, rješenje se može jednostavno naći modernim numeričkim alatima kao što je Matlab.

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

Primjer : Diferentna jednačina prvog reda

Posmatrajmo jednostavan primjer:

$$y(t) + ay(t - 1) = bu(t - 1).$$

Ovo daje procjenu uskladu sa (1.4), (1.3) i (1.11):

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_N \\ \hat{b}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y^2(t - 1) & -\sum y(t - 1)u(t - 1) \\ -\sum y(t - 1)u(t - 1) & \sum u^2(t - 1) \end{bmatrix}^{-1} \\ \times \begin{bmatrix} -\sum y(t)y(t - 1) \\ \sum y(t)u(t - 1) \end{bmatrix}$$

Sve sume su od $t=1$ do $t=N$. Tipična konvencija je da se uzmu vrijednosti van mjernog opsega da su nula. U tom slučaju mi ćemo uzeti da je $y(0)=0$.

Jednostavni model (1.1) i dobro poznati metod najmanjih kvadra

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

ta su arhitipovi u tehnikama identifikacije sistema. Oni ujedno daju najčešće korišteni metod parametarske identifikacije. Treba uočiti da (1.1) se može direktno proširiti na nekoliko različitih ulaza, kao i da ulazi i izlazi ne moraju biti sirova (direktna –raw) mjerenja.

Primjer 2: Potopljeni grijač

Posmatrajmo proces koji se sastoji od potopljivog grijača koji je potopljen u tečnost za hladjenje. Mi mjerimo:

- $v(t)$ – napon koji je narinut na grijač
- $r(t)$ – temperatura tečnosti
- $y(t)$ - temperatura na površini grijačkog tijela

Predpostavimo da nam je potreban model kako $y(t)$ zavisi od $r(t)$ i $v(t)$. Uočavamo slijedeće:

Promjena u temperaturi grijačeg tijela po samplu je proporcionalna³⁴

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

električnoj snazi koja teče u grijač umanjenoj za gubitak toplote prema tečnosti

-Električna snaga je proporcionalna sa $v^2(t)$

- Gubitak toplote je proporcionalan sa $y(t) - r(t)$

Ovo sugeriše slijedeći model:

$$y(t) = y(t - 1) + \alpha v^2(t - 1) - \beta(y(t - 1) - r(t - 1))$$

koji fituje u oblik:

$$y(t) + \theta_1 y(t - 1) = \theta_2 v^2(t - 1) + \theta_3 r(t - 1)$$

Ovo je model sa dva ulaza i jednim izlazom i korespondira sa onim u (1.5) ako ga pišemo u obliku:

$$\varphi(t) = [-y(t - 1) \quad v^2(t - 1) \quad r(t - 1)]^T$$

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

Linearna regresija

Struktura modela kao (1.5) koja je linearna po q je poznata u statistici kao linearna regresija. Vektor $f(t)$ se naziva regresioni vektor a njegove komponente regresori. "Regresija" ovdje sugeriše na činjenicu da mi pokušavamo da izračunamo $y(t)$ vraćajući se na $f(t)$. Modeli kao onaj (1.1) gdje regresioni vektor $f(t)$ sadrži stare vrijednosti varijable koja se traži- $y(t)$, su djelomično autoregresioni. Iz tog razloga struktura modela (1.1) ima standardno ime ARX-model, **Auto**Regresioni sa **eX**tra ulazima.

Kvalitet modela i dizajn eksperimenta

Posmatrajmo najjednostavniji specijalni slučaj, tj. model konačnog impulsnog odziva(FIR- finite impulse response). On se dobija iz (1.1) uzimajući da je $n=0$

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

$$y(t) = b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m) \quad (1.12)$$

Predpostavimo da se posmatrani podaci generišu sličnim mehanizmom:

$$y(t) = b_1^0 u(t-1) + \dots + b_m^0 u(t-m) + e(t) \quad (1.13)$$

gdje je $e(t)$ sekvenca bijelog šuma sa varijansom I , tj. $e(t)$ može biti opisano kao sekvenca nezavisnih slučajnih varijabli sa nultom srednjom vrijednošću i varijansom I . Analogno (1.5) možemo ovo pisati kao:

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta_0 + e(t) \quad (1.14)$$

Ulazna sekvenca $u(t)$, $t=1,2,\dots$, se uzima kao poznata deterministička sekvenca brojeva. Sada možemo zamjeniti $y(t)$ u (1.12) sa gornjim izrazom i dobiti:

$$\hat{\theta}_N = R(N)^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t)\theta_0 + \sum_{t=1}^N \varphi(t)e(t) \right]$$
$$R(N) = \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t)$$

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

ili:

$$\tilde{\theta}_N = \hat{\theta}_N - \theta_0 = R(N)^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t)e(t) \quad (1.15)$$

Pošto su u i f date determinističke varijable, $R(N)$ je deterministička matrica. Ako sa E označimo matematičko očekivanje, imaćemo:

$$E\tilde{\theta}_N = E \left[R(N)^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t)e(t) \right] = R(N)^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t)Ee(t) = 0$$

pošto $e(t)$ ima nultu srednju vrijednost. Procjena je dakle nebajesovana.

Mi možemo takodjer formirati očekivanje od $\tilde{\theta}_N \tilde{\theta}_N^T$ tj. kovarijantnu matricu od parametarske greške:

$$\begin{aligned} P_N &= E\tilde{\theta}_N \tilde{\theta}_N^T = ER(N)^{-1} \sum_{t,s=1}^N \varphi(t)e(t)e(s)\varphi^T(s)R(N)^{-1} \\ &= R(N)^{-1} \sum_{t,s=1}^N \varphi(t)\varphi^T(s)R(N)^{-1} Ee(t)e(s) \end{aligned}$$

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

$$\begin{aligned}
 &= R(N)^{-1} \sum_{t,s=1}^N \varphi(t)\varphi^T(s)R(N)^{-1}\lambda\delta(t-s) \\
 &= R(N)^{-1}\lambda \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t)R(N)^{-1} = \lambda R(N)^{-1} \quad (1.16)
 \end{aligned}$$

gdje smo koristili činjenicu da e je sekvenca nezavisnih varijabli tako da $Ee(t)e(s) = \lambda\delta(t-s)$ sa $d(0)=1$ i $\delta(\tau) = 0$ if $\tau \neq 0$.

Mi smo dakle izračunali kovarijantnu matricu od procjene $\hat{\theta}_N$. Ona je u cijelosti određena sa ulaznim osobinama od $R(N)$ i sa nivoom šuma λ . Nadalje, definirajmo:

$$\bar{R} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} R(N) \quad (1.17)$$

Ovo će korespondirati sa kovarijantnom matricom ulaza tj. i - j ti element od R je :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t-i)u(t-j)$$

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

Ako je matrica \bar{R} nesingularna, nalazimo da kovarijantna matrica procjene parametra je aproksimativno data sa:

$$P_N = \frac{\lambda}{N} \bar{R}^{-1} \quad (1.18)$$

i aproksimacija se poboljšava sa $N \rightarrow \infty$. Odavde slijedi niz zaključaka:

- Kovarijansa opada sa $1/N$, tako da se parametri približavaju graničnoj vrijednosti sa brzinom $1/\sqrt{N}$.
- Kovarijansa je proporcionalna sa odnosom šuma prema signalu (N/S). To znači da je proporcionalna sa varijansom šuma i inverzno proporcionalna sa ulaznom snagom.
- Kovarijansa ne zavisi od ulaza, ili oblika signala šuma, nego samo od osobina varijanse i kovarijanse.
- Dizajn eksperimenta tj. selekcija ulaza u , ima za cilj da napravi matricu R , što je moguće manjom.

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

Primjetimo da isto \bar{R} se može dobiti za mnoge različite signale u .

Procedura identifikacije sistema

Tri bazna entiteta

Kao što smo vidjeli iz prethodnih razmatranja, konstrukcija modela iz podataka uključuje tri osnovna entiteta:

1. Skup podataka kao što je Z^N u (1.6)
2. Skup kandidata modela: Struktura modela kao što su (1.1) ili (1.5).
3. Pravilo po kojem modeli kandidati se mogu ocjeniti koristeći podatke, kao što je napr. pravilo najmanjih kvadrata (1.9).

Posmatrajmo ovo malo detaljnije:

1. Skup podataka sa procesa. Ulazno-izlazni podaci se zapisuju ponekad za vrijeme specifično dizajniranog identifikacionog eksperimenta, kada korisnik može odrediti koje će signale mjeriti i može izabrati i ulazne signale. Cilj dizajna eksperimenta je da

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

napravi ove izbore tako da podaci postanu maksimalno informativni, podvrgnuti ograničenjima koja postoje u procesu. U drugim slučajevima korisnik možda neće imati mogućnosti da utiče na eksperiment, nego mora koristiti podatke iz normalnog rada sistema.

2. Skup modela i struktura modela.

Skup modela kandidata se dobije specificirajući unutar svake skupine modela, kako ćemo izabrati onaj koji je najpogodniji. Ovo je bez sumnje najvažniji i ujedno i najteži izbor u proceduri identifikacije. Upravo ovdje a priori znanje inženjera i njegova intuicija trebaju biti kombinirani sa formalnim osobinama modela. Ponekad se skup modela dobija nakon pažljivog modeliranja. U tom slučaju model sa nekim nepoznatim fizikalnim parametrima se dobija iz osnovnih fizikalnih zakonomjernosti i drugih već poznatih relacija. U drugim slučaje-

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

vima, mogu se koristiti standardni linearni modeli, bez da se pravi ikakva referenca na njihov fizikalni izgled i prirodu. Takav skup modela, čiji parametri se posmatraju kao mehanizam podešavanja da se fituju podaci sa procesa i ne odslikavaju nikakvu fizikalnu analizu sistema, se nazivaju black box modeli (modeli crne kutije). Skup modela sa podesivim parametrima i sa njihovom fizikalnom interpretacijom i uvidom se onda mogu nazivati modelima sive kutije (gray box models). Općenito govoreći, struktura modela je parametrizirano mapiranje od prošlih ulaza i izlaza Z^{t-1} u (1.16) u prostor izlaza modela:

$$\hat{y}(t|\theta) = g(\theta, Z^{t-1}) \quad (1.19)$$

Ovdje je θ konačno dimenzionalni vektor koji se koristi da parametrizira mapiranje.

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

3. Odredjivanje 'najboljeg' modela u skupu, pomoću podataka

Ovo je ustvari metod identifikacije. Ocjena kvaliteta modela se tipično bazira na tome da se vidi kako modeli dobro reproduciraju podatke mjerenja. Osnovni pristup ovome je nezavistan od korištene strukture modela.

Validacija modela

Nakon prolaska kroz tri prethodna koraka, mi smo stigli do nekog specifičnog modela, tj. onog koji najbolje opisuje podatke u skladu sa izabranim kriterijem. Preostaje sada da se testira da li je model dobar za svoju namjenu. Ovi testovi se nazivaju validacija modela. Oni uključuju različite procedure da se ocjeni kako se model odnosi prema posmatranim podacima, prema a priori znanju o procesu. Model ne može nikada biti prihvaćen kao finalni i istinski opis procesa ili sistema. On se prije svega može prihvatiti kao dobar opis onih aspekata koji su nam od interesa.

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

Kontura identifikacije sistema

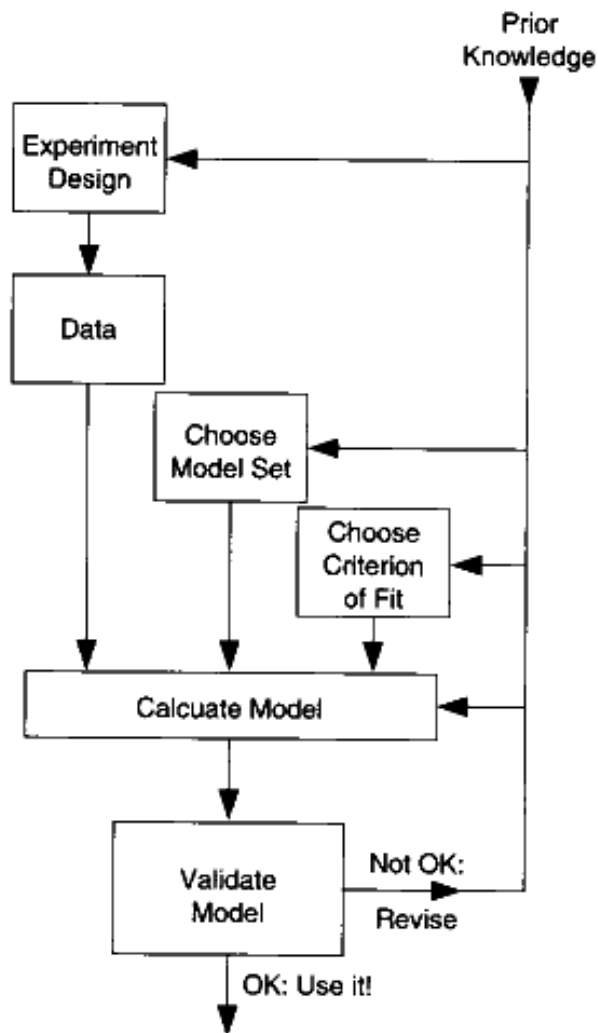
Procedura identifikacije sistema ima prirodni logički tok: prvo prikupljamo podatke, onda biramo skup modela, zatim izaberemo najbolji model iz ovog skupa. Vrlo često se desi da model koji se prvo dobije neće proći testove validacije. U tom slučaju moramo se vratiti natrag i revidirati različite korake procedure. Model može biti nedostatan zbog niza razloga:

- Numerička procedura nije uspjela da nađe najbolji model u skladu sa našim kriterijima.
- Kriterij nije bio dobro izabran.
- Skup modela nije bio adekvatan, po tome jer nije sadržavao niti jedan dobar opis sistema.
- Skup podataka nije bio dovoljno informativan da obezbjedi vodjenje u selekciji dobrog modela.

Interaktivni softver koji je prikazan na slijedećem blok dijagramu

UVOD U TEHNIKE EKSPERIMENTALNE IDENTIFIKACIJE

je važan alat za realizaciju iterativnog karaktera ovog problema.



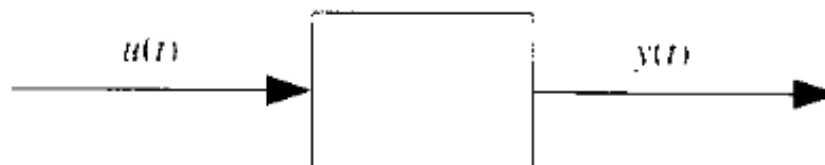
VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

Ovi sistemi su bez sumnje najvažnija klasa dinamičkih sistema koji se razmatraju i u literaturi i praksi.

Impulsni odzivi, smetnje, i prenosne funkcije

Impulsni odziv

Posmatrajmo sistem sa slijedeće slike sa skalarnim ulazom $u(t)$ i skalarnim izlazom $y(t)$. Za sistem se kaže da je vremenski invarijantan ako njegov odziv ne zavisi od absolutnog vremena. Kaže se da je linearan ako njegov izlaz na linearnu kombinaciju ulaza je ista kombinacija izlaza od individualnih ulaza. Nadalje, za sistem se kaže da je kazualni (uzročni) ako izlaz u datom trenutku vremena zavisi samo od ulaza do tog trenutka vremena.



VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

Poznato je da linearni, vremenski invarijantan kazualni sistem se može opisati pomoću impulsnog odziva (ili težinske funkcije) $g(\tau)$ kako slijedi:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (2.1)$$

Impulsni odziv je dakle kompletna karakterizacija sistema.

Uzorkovanje (sampliranje)

Pošto ćemo u ovom kursu raditi isključivo sa posmatranjima i mjerenjima ulaza i izlaza u diskretnim trenutcima vremena, pošto je to tipično za sve akvizicione i sisteme mikroprocesorskog i računarskog upravljanja, mi ćemo pretpostaviti da je $y(t)$ osmotrivo u trenutcima sampliranja $t_k = kT, k=1,2,\dots$

$$y(kT) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)u(kT - \tau)d\tau \quad (2.2)$$

VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

Interval T je poznat kao interval sampliranja. Moguće je također analizirati i slučajeve kada trenutci sampliranja nisu istovjetno raspoređeni. Najčešće, u računarskim aplikacijama, ulazni signal $u(t)$ se drži konstantnim između trenutaka sampliranja:

$$u(t) = u_k, \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (2.3)$$

Ovo se radi najčešće iz praktičnih razloga ali ujedno i značajno olakšava analizu sistema. Ubacujući (2.3) u (2.2) daje:

$$\begin{aligned} y(kT) &= \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)u(kT - \tau)d\tau = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\tau=(i-1)T}^{iT} g(\tau)u(kT - \tau)d\tau \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_{\tau=(i-1)T}^{iT} g(\tau)d\tau \right] u_{k-i} = \sum_{i=1}^{\infty} g_T(i)u_{k-i} \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdje smo definisali :

$$g_T(i) = \int_{\tau=(i-1)T}^{iT} g(\tau)d\tau \quad (2.5) \quad 49$$

VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

Izraz (2.4) nam kaže kakav će biti izlaz u trenucima sampliranja. Mi ćemo zvati sekvencu $\{g_T(\ell)\}_{\ell=1}^{\infty}$ impulsnim odzivom tog sistema.

Mi ćemo također najčešće smatrati da je T trajanje jedne vremenske jedinice i koristiti t da prebrojimo trenutke sampliranja. Dakle možemo pisati (2.4) kao:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t - k), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Za sekvencu ćemo također koristiti oznaku:

$$y_s^t = (y(s), y(s + 1), \dots, y(t)) \quad (2.7)$$

i zbog jednostavnosti:

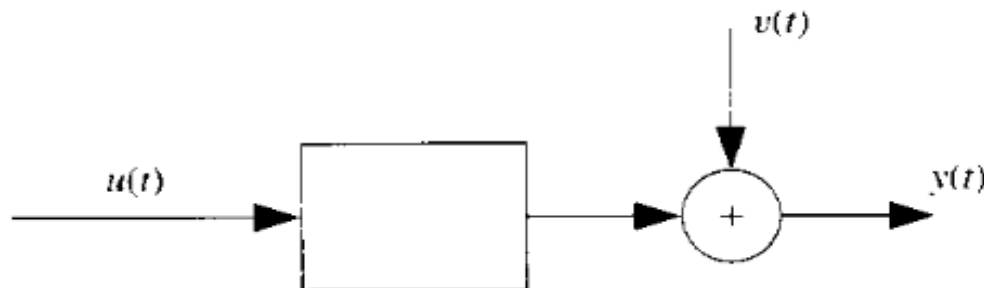
$$y_1^t = y^t$$

VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

Smetnje

U skladu sa relacijom (2.6), izlaz se može tačno izračunati kada je poznat ulaz. U većini slučajeva ovo nije realistično. Postoje uvijek signali koji su van naše kontrole koji takodjer utiču na sistem. Mi ćemo smatrati da se takvi efekti mogu skupiti u dodatni član $v(t)$ na izlazu prema slijedećoj slici 2.

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t - k) + v(t) \quad (2.8)$$



VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

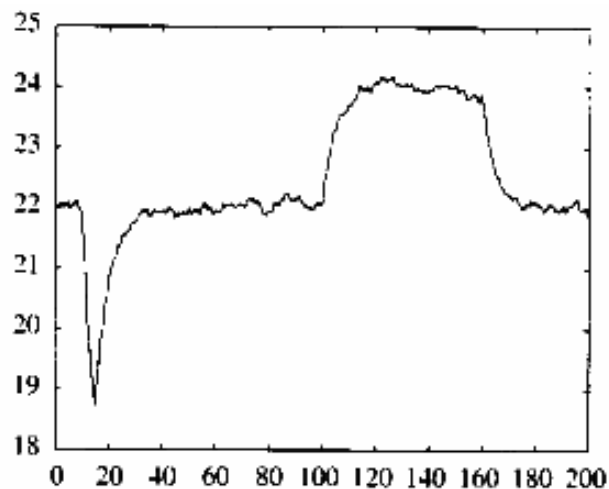
Postoje mnogi izvori ovih smetnji, napr.

- šum mjerenja: senzori koji mjere signale su pod uticajem šumova i drifta.
- Nekontrolabilni ulazi: Sistem je podvrgnut signalima koji imaju karakter ulaza ali se ne kontrolišu od strane korisnika. Pomislimo na avion, čije kretanje je posljedica ulaza pilota preko otklona kormila i pomjeranja zakrilaca, ali takodjer i udara vjetra i turbulencija.

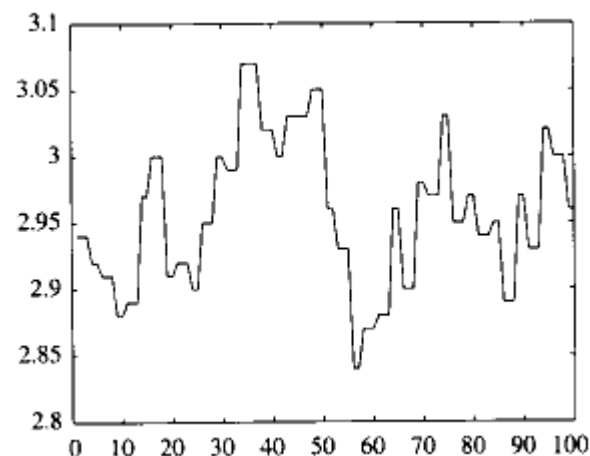
Karakter smetnji može takodjer da varira. Klasični pristup je bio da se smetnje opisuju kao step , impulsi i sinusoide, dok kod stohastičkog upravljanja smetnje su modelirane kao realizacije stohastičkih procesa. Pogledajmo naredne slike br. 3 i 4 za neke tipične ali medjusobno različite karakteristike smetnji. U nekim slučajevima i smetnje mogu biti mjerljive, ali u većini slučajeva one se mogu opaziti isključivo preko njihovog djelovanja na 52

VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

na izlaze.



Slika 3. Promjena temperature u sobi



Slika 4. Sadržaj vlage u papiru kod proizvodnje

Predpostavka sa slike 2 da šum ulazi aditivno na izlaz implicira nekoliko ograničenja. Ponekad i mjerenje ulaza može također sadržavati šum. U takvim slučajevima mi postupamo pragmatično i posmatramo izmjerene ulazne vrijednosti kao stvarne ulaze $u(t)$ u proces, i njihovo odstupanje od stvarnih dejstava se propagira kroz sistem i udružuje u smetnju $v(t)$ na⁵³

VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

slici 2.

Karakterizacija smetnji

Najznačajnija karakteristika smetnje je da njena vrijednost nije unaprijed poznata. Zbog toga je prirodno da se koristi vjerovatnostni okvir da bi se opisalo buduće ponašanje smetnje. Dakle mi smo u trenutku vremena t i želimo da opišemo smetnje u trenutku $t+k$, $k \geq 1$. Kompletna karakterizacija bi bila da opišemo uvjetnu zajedničku funkciju gustine vjerovatnosti za $\{v(t+k), k \geq 1\}$ kada je dato $\{v(s), s \leq t\}$.

Medjutim ovo može biti komplikovano, i mi koristimo jednostavniji pristup. Neka je $v(t)$ dato sa:

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e(t-k) \quad (2.9)$$

gdje $e(t)$ je bijeli šum, tj. sekvenca nezavisnih slučajnih varijabli

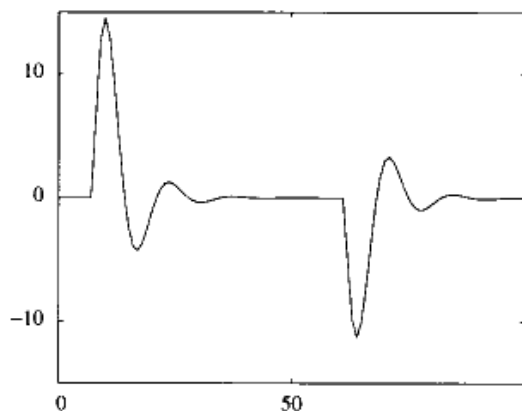
VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

sa nekom funkcijom gustine vjerovatnoće (PDF – probability density function). Iz razloga normalizacije pretpostavićemo da je $h(0)=1$, što ne dovodi do gubitka opštosti, pošto se varijansa e može podesiti. Treba naglasiti da specificiranje različitih PDF za $\{e(t)\}$ može rezultirati u vrlo različitim karakteristikama smetnji. Napr. PDF

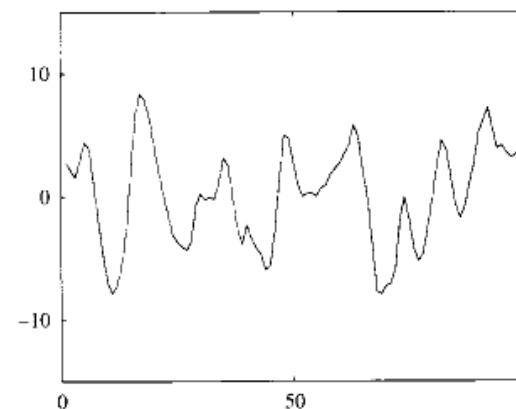
$$\begin{aligned} e(t) &= 0, & \text{with probability } 1 - \mu \\ e(t) &= r, & \text{with probability } \mu \end{aligned} \tag{2.10}$$

gdje je r normalno rasporedjena slučajna varijabla: $r \in N(0, \gamma)$ i vodi do, ako je m mali broj, sekvence smetnji sa karakterističnim i ‘determinističkim’ profilom koji se javlja u slučajnim trenutcima, kao na slijedećoj slici br. 5. Ovo može biti pogodno za opis ‘klasičnih’ tipova smetnji kao što su : step, impuls, sinusoida i rampa.

VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI



Slika 5. Realizacija procesa (2.9) sa e kao (2.10)



Slika br. 6 Realizacija istog procesa sa e kao (2.11)

Sa druge strane PDF u obliku:

$$e(t) \in N(0, \lambda) \quad (2.11)$$

daje potpuno drugu sliku, kao na slici br. 6. Ovakav oblik je adekvatniji da opiše šumove kod mjerenja, i neregularna i česta djelovanja smetnji. Često mi samo specificiramo osobine drugog reda za sekvencu $\{e(t)\}$, tj. srednju vrijednost i varijansu. Primjetimo da i (2.10) i (2.11) mogu biti opisani kao sekvenca nezavisnih slučajnih varijabli sa nultom srednjom vrijednošću i

VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

i varijansama I mada su različite u izgledu. Primjetimo također da su sekvence slučajnih varijabli $\{e(t)\}$ i $\{v(t)\}$ stohastički procesi.

Kovarijantna funkcija

Mi ćemo pretpostaviti da $e(t)$ ima nultu srednju vrijednost i varijansu I . Sa opisom (2.9) možemo izračunati srednju vrijednost kao :

$$E v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) E e(t - k) = 0 \quad (2.12)$$

a kovarijansa kao:

$$\begin{aligned} E v(t) v(t - \tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h(k) h(s) E e(t - k) e(t - \tau - s) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h(k) h(s) \delta(k - \tau - s) \lambda \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} h(k) h(k - \tau) \end{aligned} \quad (2.13)$$

VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

Ovdje je $h(r) = 0$, ako je $r < 0$. Primjetimo da je ova kovarijansa nezavisna od t i da zovemo:

$$R_v(\tau) = E v(t)v(t - \tau) \quad (2.14)$$

kovarijansnom funkcijom procesa v . Ova funkcija zajedno sa srednjom vrijednošću, specificira osobine drugog reda od v . Ove su, sa druge strane jedinstveno definirane sa sekvencom $\{h(k)\}$ i sa varijansom I od e . Pošto (2.14) i $E v(t)$ ne zavise od t , za proces se kaže da je stacionaran.

Prenosne funkcije

Biće pogodno definirati skraćene oznake za sume kao (2.8) i (2.9), koje će se često pojavljivati. Uvedimo operator pomaka unaprijed q kao

$$qu(t) = u(t + 1)$$

VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

i operator pomaka unatrag q^{-1}

$$q^{-1}u(t) = u(t - 1)$$

Sada možemo pisati (2.6) kao:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t - k) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) (q^{-k}u(t)) \\ &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} g(k)q^{-k} \right] u(t) = G(q)u(t) \end{aligned} \tag{2.15}$$

gdje smo uveli označavanje:

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)q^{-k} \tag{2.16}$$

Zvaćemo $G(q)$ prenosnim operatorom ili prenosnom funkcijom linearnog sistema (2.6).

VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

Striktno govoreći, termin prenosna funkcija bi trebao biti rezerviran za z transformaciju od $\{g(k)\}_1^\infty$

tj.

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)z^{-k} \quad (2.17)$$

Slično sa:

$$H(q) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)q^{-k} \quad (2.18)$$

možemo pisati:

$$v(t) = H(q)e(t) \quad (2.19)$$

za (2.9). Dakle osnovni opis linearnog sistema sa dodatnom smetnjom će biti:

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) \quad (2.20)$$

VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

Izrazi u frekventnom domenu

Predpostavimo da je ulaz u sistem (2.6) sinusoida:

$$u(t) = \cos \omega t \quad (2.32)$$

tada je pogodno prepisati ovo tako da bude:

$$u(t) = \operatorname{Re} e^{i\omega t}$$

gdje Re označava realni dio. U skladu sa (2.6), odgovarajući izlaz će biti:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} g(k) \operatorname{Re} e^{i\omega(t-k)} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} g(k) e^{i\omega(t-k)} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} g(k) e^{-i\omega k} \right\} = \operatorname{Re} \{ e^{i\omega t} \cdot G(e^{i\omega}) \} \quad (2.33) \\ &= |G(e^{i\omega})| \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

gdje :

$$\varphi = \arg G(e^{i\omega}) \quad (2.34)$$

VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

Ovdje druga jednakost slijedi pošto su $g(k)$ realni a četvrta iz definicija (2.16) i (2.17). Peta jednakost slijedi direktno pravila za kompleksne brojeve.

U (2.33) smo pretpostavili da je ulaz bio cosinus pošto je vrijeme od minus beskonačno. Ako je $u(t) = 0, t < 0$, dobićemo još jedan član:

$$-\operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \sum_{k=t}^{\infty} g(k) e^{-i\omega k} \right\}$$

u (2.33). Ovim članom dominira: $\sum_{k=t}^{\infty} |g(k)|$ i zbog toga ima tranzijentnu prirodu, pod uslovom da je $G(q)$ stabilno.

U svakom slučaju (2.33) nam kaže da je izlaz u (2.33) će također biti kosinus sa istom frekvencijom, ali sa amplitudom pojačanom sa $|G(e^{i\omega})|$ i sa faznim pomakom od $\arg G(e^{i\omega})$ radijana.

VREMENSKI INVARIJANTNI LINEARNI SISTEMI

Kompleksna funkcija

$$G(e^{i\omega}), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (2.36)$$

se zove frekventna funkcija sistema (2.6). Uobičajeno je da se ova funkcija grafički prikaže kao $\log |G(e^{i\omega})|$ i $\arg G(e^{i\omega})$ crtana nasprema $\log w$ u Bodeovu dijagramu.

Grafik od (2.36) u kompleksnoj ravni se naziva Nyquist plot. Ovi koncepti su dobro poznati kod vremenski kontinualnih sistema, ali se primjenjuju i za diskretne sisteme.

3. SIMULACIJA I PREDIKCIJA

Opisi sistema koji su dati u prethodnom razmatranju, mogu se koristiti za niz različitih problema dizajna koji se odnose na pravi sistem koji se identificira i modelira. Osnovna ideja identifikacije je da napor potrošen na razvoj modela sistema mora biti u relaciji sa aplikacijom u kojoj će biti korišten. Smatraćemo da je opis sistema dat sa:

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) \quad (3.1)$$

Simulacija

Osnovno korištenje opisa sistema je da se simulira njegov odziv na različite ulazne scenarije. Ovo znači da jedna ulazna sekvenca $u^*(t)$, $t=1,2,..N$, izabrana od strane korisnika, se primjenjuje na (3.1) da se izračuna neporemećeni izlaz:

$$y^*(t) = G(q)u^*(t), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

SIMULACIJA I PREDIKCIJA

Ovo je izlaz koji bi proizveo sistem kada ne bi bilo smetnji, prema opisu (3.1). Da bi se evaluirao uticaj smetnji, generator slučajnih brojeva (u računaru) se koristi da proizvede sekvencu brojeva $e^*(t)$, $t=1,2,\dots,N$, koja se može smatrati kao realizacija stohastičkog procesa bijelog šuma sa varijansom I . Sada se smetnja može izračunati kao:

$$v^*(t) = H(q)e^*(t) \quad (3.3)$$

Predstavljajući na pogodan način $y^*(t)$ i $v^*(t)$ korisniku, može se formirati predstava odziva sistema na $\{u^*(t)\}$.

Ovaj način eksperimentiranja sa modelom (3.1) umjesto sa realnim , fizikalnim procesom da bi se evaluiralo njegovo ponašanje pod različitim uslovima se široko koristi u inženjerskoj praksi. Naravno, modeli koji se koriste napr. u simulatorima leta i simulatorima za trening operatora za rad u nuklearnim reaktorima su mnogo kompleksniji nego opis (3.1) , ali je ideja ista

SIMULACIJA I PREDIKCIJA

Predikcija

Počnimo ovo sa diskusijom kako buduće vrijednosti od $v(t)$ se mogu procjeniti u slučaju koji je opisan sa:

$$v(t) = H(q)e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e(t - k) \quad (3.4)$$

Za (3.4) da bi imao smisla, predpostavljamo da je H stabilno, tj da:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (3.5)$$

Invertabilnost modela šuma

Krucijalna osobina (3.4) koju ćemo nametnuti je da ona mora biti invertabilna, tj. da ako $v(s)$, $s \leq t$, je poznato, tada ćemo biti u stanju da izračunamo, $e(t)$ kao :

$$e(t) = \tilde{H}(q)v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{h}(k)v(t - k) \quad (3.6)$$

SIMULACIJA I PREDIKCIJA

sa

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{h}(k)| < \infty$$

gdje

$$\tilde{H}(q) = H^{-1}(q)$$

Primjer : Proces sa pokretnom srednjom vrijednošću

Predpostavimo da je :

$$v(t) = e(t) + ce(t - 1) \quad (3.12)$$

tj.

$$H(q) = 1 + cq^{-1}$$

Ovaj proces je sa pokretnom srednjom vrijednosti reda 1. MA(1). Dakle

$$H(z) = 1 + cz^{-1} = \frac{z + c}{z}$$

SIMULACIJA I PREDIKCIJA

Ima pol u $z=0$ i nulu u $z=-c$, što je unutar jediničnog kruga, ako je $|c| < 1$. Ako je tako, inverzni filter je određen sa

$$H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1 + cz^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-c)^k z^{-k}$$

a $e(t)$ se može izračunati iz (3.12) kao

$$e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-c)^k v(t - k)$$

Observeri

U mnogim slučajevima kod teorije sistema i upravljanja, ne radimo sa punim opisom osobina smetnji kao što je dato sa (3.1). Umjesto toga, koristi se 'deterministički' ili model bez šuma, u obliku:

$$y(t) = G(q)u(t) \tag{3.35}$$

SIMULACIJA I PREDIKCIJA

Opis (3.35) može također biti korišten za 'računanje', ili 'procjenu' budućih vrijednosti izlaza. Nedostatak modela šuma, ipak, ostavlja nekoliko mogućnosti kako ovo može biti urađeno na najbolji način. Pri tome je koncept observera ključan u ovim izračunavanjima.

Primjer

Neka je :

$$G(z) = b \sum_{k=1}^{\infty} (a)^{k-1} z^{-k} = \frac{bz^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad (3.36)$$

Ovo znači da ulazno/izlazna relacija se može predstaviti kao

$$y(t) = b \sum_{k=1}^{\infty} (a)^{k-1} u(t - k) \quad (3.37)$$

tj.

$$y(t) = \frac{bq^{-1}}{1 - aq^{-1}} u(t)$$

$$(1 - aq^{-1})y(t) = bq^{-1}u(t)$$

ili kao :

SIMULACIJA I PREDIKCIJA

tj.

$$y(t) - ay(t - 1) = bu(t - 1) \quad (3.38)$$

Sada ako nam je dat opis (3.35) i (3.36) zajedno sa podacima $y(s)$, $u(s)$, $s \leq t-1$, i ako želimo da 'procjenimo' ili 'izračunamo' koliko može biti $y(t)$, možemo koristiti ili:

$$\hat{y}(t|t - 1) = b \sum_{k=1}^{\infty} (a)^{k-1} u(t - k) \quad (3.39)$$

ili :

$$\hat{y}(t|t - 1) = ay(t - 1) + bu(t - 1) \quad (3.40)$$

Sve dok su podaci i opis sistema korektni, neće biti razlike između (3.39) i (3.40), obadva izraza su 'observeri' odnosno 'prediktori' sistema. Izbor između njih bi bio izvršen od strane dizajnera na osnovu njihove ranjivosti na nesavršenostima u⁷⁰

SIMULACIJA I PREDIKCIJA

podacima ili opisima sistema. Naprimjer, ako ulazno/izlazni podaci nedostaju prije vremena $s=0$, tada (3.39) trpi zbog greške koja opada sa a^t (efekat pogrešnih početnih uslova), dok (3.40) je još uvijek korekatan za $t \geq 1$. Sa druge strane, (3.39) nije osjetljivo na greške mjerenja izlaza, dok takve greške se direktno prenose na predikciju u (3.40).

4. MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Model sistema je opis nekih njegovih osobina, pogodan za neku namjenu. Model ne mora da bude istinski tačan opis sistema, da bi služio svojoj namjeni. Identifikacija sistema je tehnika konstrukcije i selekcije modela dinamičkih sistema da bi služili nekim namjenama. Kao što je ranije rečeno, prvi korak u identifikaciji je određivanje klase modela unutar koje ćemo tražiti najpogodniji model. U nastavku ovog poglavlja ćemo diskutirati takve klase modela za linearne vremenski invarijantne sisteme.

Linearni modeli i skupovi linearnih modela

Linearni vremenski invarijantni sistem je specificiran sa impulsnim odzivom $\{g(k)\}_1^\infty$ spektrumom $\Phi_v(\omega) = \lambda |H(e^{i\omega})|^2$; aditivne smetnje i moguće, i sa funkcijom gustine vjerovatnoće (PDF) od smetnje $e(t)$. Kompletan model je time dat sa:

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) \tag{4.1}$$

$f_e(\cdot)$, the PDF of e

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

gdje:

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)q^{-k}, \quad H(q) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h(k)q^{-k} \quad (4.2)$$

Specifičan model time korespondira sa specifikacijama tri funkcije G , H i f_e . Racionalne prenosne funkcije konačno dimenzionalnog prostora stanja su tipični opisi koji će se koristiti. Takodjer, najčešće PDF f_e nije specificirana kao funkcija, nego opisana u terminima nekoliko numeričkih karakteristika, tipično prvog i drugog momenta:

$$\begin{aligned} Ee(t) &= \int x f_e(x) dx = 0 \\ Ee^2(t) &= \int x^2 f_e(x) dx = \lambda \end{aligned} \quad (4.3)$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Takodjer je uobičajeno da se prepostavi da $e(t)$ je Gaussovski šum, u kom slučaju PDF je u cjelosti specificirano sa (4.3). Specifikacija (4.1) u članovima konačnog broja numeričkih vrijednosti ili koeficijenata ima drugu vrlo važnu posljedicu za namjenu identifikacije sistema. Vrlo često nije moguće odrediti ove koeficijente a priori na osnovu znanja fizikalnih mehanizama koji upravljaju ponašanjem sistema. Umjesto toga određivanje svih ili dijela ovih koeficijenata treba biti ostavljeno procedurama procjene. To znači da koeficijenti ulaze u model (4.1) kao parametri koje treba odrediti. Mi ćemo označiti u opštem slučaju takve parametre sa vektorom \mathbf{q} , tako da će opis modela biti:

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)e(t) \quad (4.4a)$$

$$f_e(x, \theta), \text{ the PDF of } e(t); \{e(t)\} \text{ white noise} \quad (4.4b)$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Vektor parametara \mathbf{q} tada ima opseg nad podskupom od \mathbf{R}^d gdje je d dimenzija od \mathbf{q} :

$$\theta \in D_{\mathcal{M}} \subset \mathbf{R}^d \quad (4.5)$$

Primjetimo da (4.4) i (4.5) nisu više model, sada je to skup modela. I sada je zadatak estimacione procedure da izabere član skupa koji najbolje odgovara namjeni modela.

Koristeći (3.20) možemo izračunati procjenu jedan korak unaprijed za (4.4). Označimo tu procjenu sa $\hat{y}(t|\theta)$ da naglasimo njenu zavisnost od \mathbf{q} . Dakle imaćemo:

$$\hat{y}(t|\theta) = H^{-1}(q, \theta)G(q, \theta)u(t) + [1 - H^{-1}(q, \theta)]y(t) \quad (4.6)$$

Ova forma predikcije ne zavisi od $f_e(x, q)$. Mi ćemo koristiti termin prediktorski modeli za modele koji specificiraju G i H kao u (4.4) ili u formi (4.6). Slično, probablistički modeli će označavati opise (4.4) koji daju kompletnu karakterizaciju probablističkih⁷⁵

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

osobina sistema. Parametrizirani set modela \mathcal{M} (4.6) će se nazivati struktura modela i bit će označen sa \mathcal{M} . Specifičan model pridružen sa vrijednošću parametara θ bit će označen sa $\mathcal{M}(\theta)$.

U nastavku ćemo pokazati različite načine opisivanja (4.4) u članovima od \mathcal{M} (tj. različite načine parametrizacije skupa modela).

Familija modela sa prenosnim funkcijama

Najočigledniji način parametriziranja G i H je da se predstave kao racionalne funkcije i da su parametri koeficijenti u brojniku i nazivniku. Ovakve strukture modela su poznate kao modeli crne kutije (black-box models).

Struktura modela sa jednačinom greške

Najjednostavnija relacija ulaz/izlaz se dobije ako se opiše sa linearnom diferentnom jednačinom:

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) \\ = b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) + e(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pošto član bijelog šuma $e(t)$ ovdje ulazi kao direktna greška u diferentnu jednačinu, model (4.7) se često zove model jednačine greške (ili struktura). Podesivi parametri su u ovom slučaju:

$$\theta = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n_a} \ b_1 \ \dots \ b_{n_b}]^T \quad (4.8)$$

Ako uvedemo: $A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}$

i $B(q) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}$

mi vidimo da (4.7) korespondira sa (4.4) preko

$$G(q, \theta) = \frac{B(q)}{A(q)}, \quad H(q, \theta) = \frac{1}{A(q)} \quad (4.9)$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Mi ćemo također zvati model (4.7) kao ARX model, gdje AR se odnosi na autoregresioni dio $A(q)y(t)$ a X na eXtra ulaz $B(q)u(t)$.

U specijalnom slučaju kada je $n_a = 0$, $y(t)$ se modelira kao konačni impulsni odziv (FIR). Tok signala se može prikazati kao na narednoj slici br. 4.1. Sa te slike vidimo da model (4.7) nije i najprirodniji sa tačke gledišta fizikalnosti predstavljanja, pretpostavljeno je za bijeli šum da prolazi kroz dinamiku nazivnika sistema prije nego što je dodat na izlaz. Ipak, skup modela jednačine greške ima vrlo važnu osobinu koja ga čini prvim izborom u mnogim aplikacijama: prediktor definira linearnu regresiju.

Slika 4.1 ARX struktura modela

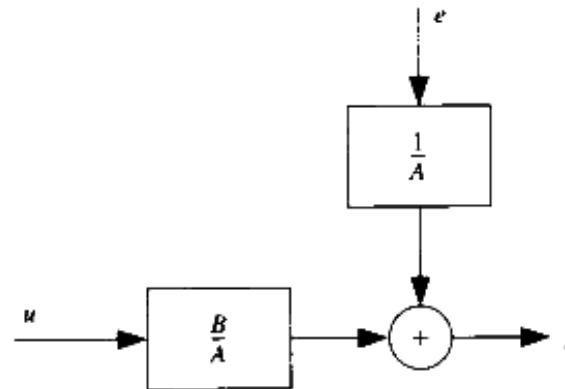


Figure 4.1 The ARX model structure.

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Linearne regresije

Izračunajmo prediktor za (4.7). Ubacujući (4.9) u (4.6) daje:

$$\hat{y}(t|\theta) = B(q)u(t) + [1 - A(q)]y(t) \quad (4.10)$$

Bez korištenja stohastičkog okvira, prediktor (4.10) je prirodan izbor ako član $e(t)$ u (4.7) se smatra beznačajnim ili teškim za procjenu. Zbog toga je prirodno da radimo sa izrazom (4.10) i za 'determinističke' modele.

Uvedimo sada vektor :

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \dots -y(t-n_a) \quad u(t-1) \dots u(t-n_b)]^T \quad (4.11)$$

Sada (4.10) se može napisati u obliku:

$$\hat{y}(t|\theta) = \theta^T \varphi(t) = \varphi^T(t)\theta \quad (4.12)$$

Ovo je važna osobina (4.7) tj. prediktor je skalarni proizvod između poznatog vektora podataka $\varphi(t)$ i parametarskog θ .⁷⁹

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Takav model se naziva linearna regresija u statistici, i vektor $\mathbf{f}(t)$ se naziva regresionim vektorom.

U slučaju da su neki koeficijenti polinoma A i B poznati, dolazimo do linearne regresije u obliku:

$$\hat{y}(t|\theta) = \varphi^T(t)\theta + \mu(t) \quad (4.13)$$

gdje $m(t)$ je poznati član.

ARMAX struktura modela

Osnovni nedostatak sa jednostavnim modelom(4.7) je nepostojanje adekvatne slobode u opisivanju osobina člana smetnji. Mi bi mogli dodati ovu fleksibilnost time što bi opisali jednačinu greške sa pokretnom srednjom vrijednošću i bijelim šumom. Ovo daje model:

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) = & b_1 u(t-1) + \dots \\ & + b_{n_b} u(t-n_b) + e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_{n_c} e(t-n_c) \end{aligned} \quad (4.14)$$

sa

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c}$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

može se sada pisati u obliku:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t) \quad (4.15)$$

što jasno korespondira sa (4.4) gdje:

$$G(q, \theta) = \frac{B(q)}{A(q)}, \quad H(q, \theta) = \frac{C(q)}{A(q)} \quad (4.16)$$

gdje je sada:

$$\theta = [a_1 \dots a_{n_a} \ b_1 \dots b_{n_b} \ c_1 \dots c_{n_c}]^T \quad (4.17)$$

U sklopu dijela pokretne srednje vrijednosti (MA) $C(q)e(t)$, model (4.15) će se zvati ARMAX. ARMAX model je postao standardni alat u upravljanju i za opis i dizajn sistema SAU. Verzija sa forsiranom integracijom u opisu šuma je ARIMA(X) model (I za integraciju, sa ili bez X varijable u). Ovaj model je koristan kod opisa sistema sa sporim smetnjama. Dobije se kada se zamjeni $y(t)$ i $u(t)$ u (4.15) sa njihovim diferencijama , tj. 81

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

$$\Delta y(t) = y(t) - y(t-1)$$

Pseudolinearna regresija

Prediktor za (4.15) se dobije ubacujući (4.16) u (4.6). Ovo daje:

$$\hat{y}(t|\theta) = \frac{B(q)}{C(q)}u(t) + \left[1 - \frac{A(q)}{C(q)}\right]y(t)$$

ili:

$$C(q)\hat{y}(t|\theta) = B(q)u(t) + [C(q) - A(q)]y(t) \quad (4.18)$$

Ovo znači da se predikcija dobije filtriranjem u i y kroz filter sa nazivnikom dinamike određene sa $C(q)$. Da bi startala u trenutku $t=0$, potrebno je znanje:

$$\hat{y}(0|\theta) \dots \hat{y}(-n_c + 1|\theta)$$

$$y(0) \dots y(-n^* + 1), \quad n^* = \max(n_c, n_a)$$

$$u(0) \dots u(-n_b + 1)$$

Ako ovi nisu raspoloživi, mogu se uzeti da su nule, u kojem slučaju predikcija se razlikuje od tačne za grešku koja opada⁸ša

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

m^t gdje m je maksimalni iznos nula od $C(z)$. Moguće je također startati rekurziju u trenutku $\max(n^*, n_b)$ i uključiti nepoznate početne uslove $\hat{y}(k|\theta)$, $k = 1, \dots, n_c$ u vektor \mathbf{q} .

Prediktor (4.18) se može prepisati u formi analognoj sa (4.12) kako slijedi:

Dodajući $[1 - C(q)]\hat{y}(t|\theta)$ na obadvije strane (4.18) daje:

$$\hat{y}(t|\theta) = B(q)u(t) + [1 - A(q)]y(t) + [C(q) - 1][y(t) - \hat{y}(t|\theta)] \quad (4.19)$$

Uvedimo grešku predikcije:

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t|\theta)$$

i vektor:

$$\varphi(t, \theta) = [-y(t-1) \dots -y(t-n_a) \quad u(t-1) \dots \\ u(t-n_b) \quad \varepsilon(t-1, \theta) \dots \varepsilon(t-n_c, \theta)]^T \quad (4.20)$$

Sada se (4.19) može pisati kao:

$$\hat{y}(t|\theta) = \varphi^T(t, \theta)\theta \quad (4.21)$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Primjetimo sličnost sa linearnom regresijom (4.12). Jednačina (4.21) za sebe nije linearna regresija, zbog nelinearnog efekta od \mathbf{q} u vektoru $\mathbf{f}(t, \mathbf{q})$. Zbog toga ćemo je zvati pseudolinearnom regresijom.

Druge strukture modela tipa jednačine greške

Umjesto da modeliramo jednačinu greške u (4.7) kao pokretnu srednju vrijednost, kao što smo uradili u (4.14), možemo to opisati i kao autoregresija. Ovo daje skup modela oblika:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + \frac{1}{D(q)}e(t) \quad (4.22)$$

sa

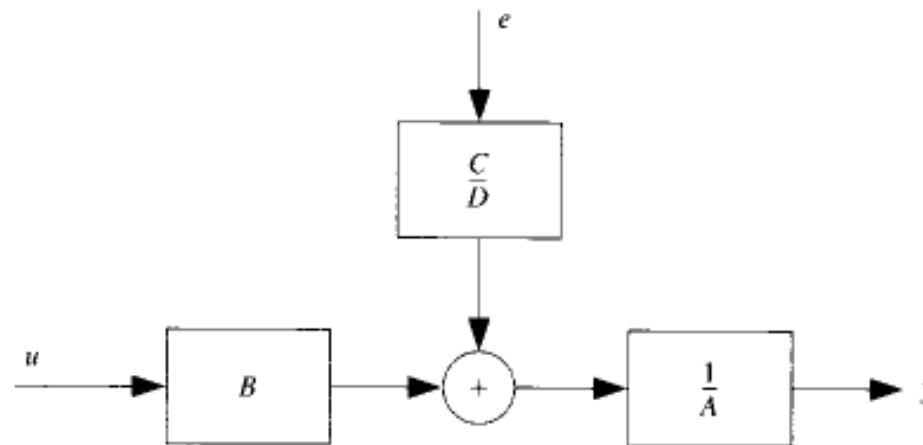
$$D(q) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{n_d}q^{-n_d}$$

koji se, saglasno prethodnoj terminologiji, može zvati ARARX. Općenitije, mogli bi koristiti ARMA opis jednačine greške, što bi nas dovelo do ARARMAX strukture.

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (4.23)$$

koja sadrži (4.7), (4.15) i (4.22) kao specijalne slučajeve. Ovo će formirati familiju skupa modela koji se odnose na modele sa jednačinom greške, kako je to prikazano na narednoj slici 4.2.



Slika br. 4.2 Familija modela sa jednačinom greške(4.23)

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Struktura modela sa izlaznom greškom

Opisane strukture modela sa jednačinom greške, korespondiraju sa opisima gdje prenosne funkcije G i H imaju polinom A kao zajednički faktor u nazivnicima (vidjeti sliku 4.2). Sa fizikalne tačke gledišta može izgledati prirodnije da se parametriziraju ove prenosne funkcije nezavisno.

Ako pretpostavimo da relacija izmedju ulaza i neporemećenog izlaza u' se može pisati kao linearna diferentna jednačina, i da se smetnja sastoji od bijelog šuma mjerenja, onda ćemo dobiti slijedeći opis:

$$\begin{aligned}w(t) + f_1 w(t - 1) + \dots + f_{n_f} w(t - n_f) \\ = b_1 u(t - 1) + \dots + b_{n_b} u(t - n_b)\end{aligned}\tag{4.24a}$$

$$y(t) = w(t) + e(t)\tag{4.24b}$$

sa

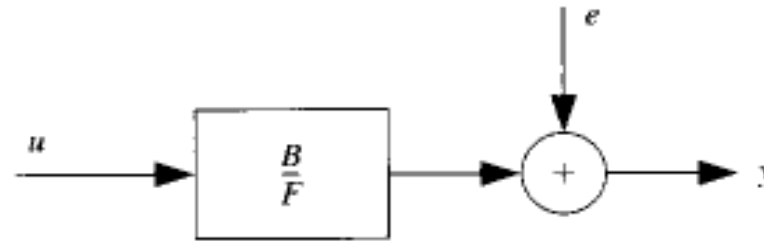
$$F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f}$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

možemo pisati ovaj model kao:

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + e(t) \quad (4.25)$$

Tok signala za ovaj model je prikazan na slijedećoj slici 4.3



Slika 4.3 Stuktura modela izlazne greške

Ovaj oblik (4.25) se naziva model izlazne greške (output error-OE). parametarski vektor kojeg treba odrediti je

$$\theta = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n_b} \ f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{n_f}]^T \quad (4.26)$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Pošto $w(t)$ u (4.24) se nikad ne observira, treba nositi indeks q jer se konstruiše iz u korištenjem (4.24a). To jest:

$$\begin{aligned} w(t, \theta) + f_1 w(t-1, \theta) + \dots + f_{n_f} w(t-n_f, \theta) \\ = b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Poredjenjem sa (4.4), nalazimo da $H(q, \theta) = 1$, što daje prirodni prediktor :

$$\hat{y}(t|\theta) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t) = w(t, \theta) \quad (4.28)$$

Primjetimo da je $\hat{y}(t|\theta)$ konstruirano samo od prošlih ulaza. Pomoću vektora:

$$\varphi(t, \theta) = [u(t-1) \dots u(t-n_b) \quad -w(t-1, \theta) \dots -w(t-n_f, \theta)]^T \quad (4.29)$$

ovo se može pisati kao:

$$\hat{y}(t|\theta) = \varphi^T(t, \theta)\theta \quad (4.30)$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

što je u formalnoj saglasnosti sa ARMAX model prediktorom (4.21). Primjetimo da u (4.29) $w(t - \bar{1}, \theta)$ nisu observabilni, ali, korištenjem (4.28) se mogu izračunati $w(t - k, \theta) = \hat{y}(t - k | \theta), k = 1, 2, \dots, n_f$.

Box-Jenkins struktura modela

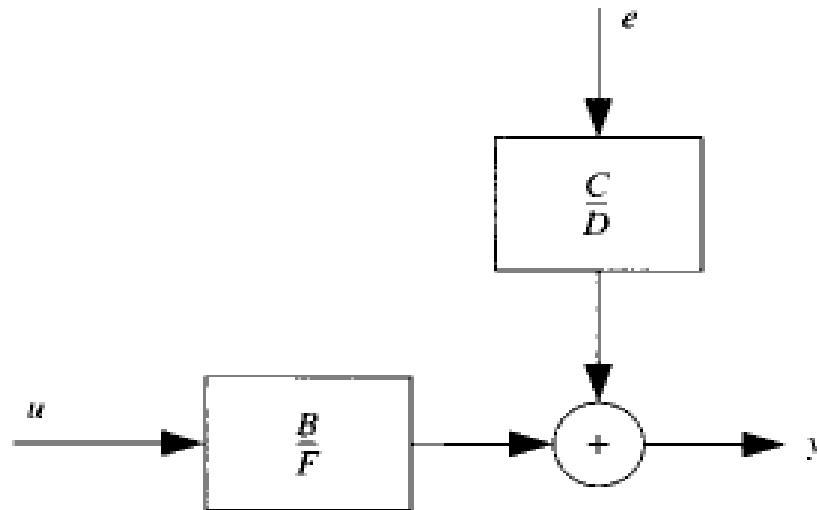
Prirodni razvoj modela izlazne greške (4.25) je da se dalje modeliraju osobine izlazne greške. Opisujući ovo kao ARMA model dobiće se

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (4.31)$$

Ovo je najprirodnija parametrizacija sa konačnim dimenzijama, koja starta sa opisom (4.4), prenosne funkcije G i H su nezavisno parametrizirane kao racionalne funkcije. Skup modela (4.31) je bio sugerisan i razmatran od strane Box-a i Jenkins-a (1970). Model takodjer daje familiju modela sa izlaznom greškom. U skladu sa (4.6), prediktor za (4.31) je

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

$$\hat{y}(t|\theta) = \frac{D(q)B(q)}{C(q)F(q)}u(t) + \frac{C(q) - D(q)}{C(q)}y(t) \quad (4.32)$$



Slika br. 4.4 BJ struktura modela (4.31)

Opšta familija struktura modela

Strukture koje su diskutirane do sada mogu dati 32 skupa modela, zavisno od toga koji od pet polinoma A,B,C,D i F se koristi. Neki od ovih skupova modela pripadaju onim koji se najčešće koriste u praksi. Zbog pogodnosti, mi ćemo uvesti \mathbb{P}^0

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

generaliziranu strukturu modela:

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (4.33)$$

Ponekada dinamika od u na y sadrži kašnjenje od n_k samplova, tako da su neki prednji koeficijenti od B nule, tj.

$$B(q) = b_{n_k}q^{-n_k} + b_{n_k+1}q^{-n_k-1} + \dots + b_{n_k+n_b-1}q^{-n_k-n_b+1} = q^{-n_k}\bar{B}(q), \quad b_{n_k} \neq 0$$

Tada je dobra ideja da se eksplicitno prikaže ovo kašnjenje sa:

$$A(q)y(t) = q^{-n_k}\frac{\bar{B}(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (4.34)$$

Struktura (4.33) je isuviše opšta za većinu praktičnih primjena. Jedan li više od pet polinoma bi se obično fiksirao na 1 u praktičnim aplikacijama. Medjutim razvijajući algoritme i rezultate za (4.33), mi takodjer pokrivamo i sve specijalne slučajeve 91

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

koji odgovaraju realističnijim skupovima modela.

Iz (4.6) mi znamo da je prediktor za (4.33):

$$\hat{y}(t|\theta) = \frac{D(q)B(q)}{C(q)F(q)}u(t) + \left[1 - \frac{D(q)A(q)}{C(q)} \right] y(t) \quad (4.35)$$

Najčešći specijalni slučajevi su sumarno prikazani u narednoj tabeli:

Polinomi koji se koriste u (4.33)	Ime strukture modela
B	FIR
AB	ARX
ABC	ARMAX
AC	ARMA
ABD	ARARX
ABCD	ARARMAX
BF	OE(IZLAZNA GREŠKA)
BFCD	BJ(Box-Jenkins)

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Modeli crne kutije sa kontinualnim vremenom

Opis linearnog sistema se može takodjer parametrizirati po članovima prenosne funkcije kontinualnog vremena (2.22):

$$y(t) = G_c(p, \theta)u(t) \quad (4.49)$$

Podešanja za observirane uzorkovane podatke se mogu postići ili rješavanjem diferencijalnih jednačina, ili primjenjujući egzaktnu ili aproksimativnu proceduru uzorkovanja (2.24). Model (4.49) se takodjer može fitovati i u frekventnom domenu sa Fourier transformisanim ulazno/izlaznim podacima ograničenog propusnog opsega.

Sistem prvog reda sa vremenskim kašnjenjem:

$$G_c(s, \theta) = \frac{K e^{-s\tau_c}}{(s\tau + 1)}, \quad \theta = [K, \tau_c, \tau]^T \quad (4.50)$$

se često koristi u industrijskim aplikacijama. Ortonormalna funkcija serijske ekspanzije:

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

$$G_c(s, \theta) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k f_k(s), \quad \theta = [a_0, \dots, a_{d-1}]^T \quad (4.51)$$

se često koristila u prošlosti. Kao i kod modela sa diskretnim vremenom, Laguerre-ovi polinomi su dobar izbor:

$$f_k(s) = \sqrt{2\alpha} \frac{(s - \alpha)^k}{(s + \alpha)^{k+1}}$$

gdje je α faktor vremenskog skaliranja.

Multivarijabilni slučaj: Opisi sa matričnim frakcijama

Posmatrajmo sada slučaj gdje je ulaz $u(t)$ m -dimenzionalni vektor a izlaz $y(t)$ je p -dimenzionalni vektor. Većina ideja koje su do sada opisane imaju i svoje multivarijabilne verzije. Najjednostavniji slučaj je generalizacija skupa modela jednačine greške (4.7). Biće

$$\begin{aligned} y(t) + A_1 y(t-1) + \dots + A_{n_a} y(t-n_a) \\ = B_1 u(t-1) + \dots + B_{n_b} u(t-n_b) + e(t) \end{aligned} \quad (4.52)$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

gdje A_i su $p \times p$ matrice a B_i su $p \times m$ matrice.

Analogno (4.9) možemo uvesti polinome:

$$\begin{aligned} A(q) &= I + A_1q^{-1} + \dots + A_{n_a}q^{-n_a} \\ B(q) &= B_1q^{-1} + \dots + B_{n_b}q^{-n_b} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Ovo su sada matrični polinomi po q^{-1} što znači da $A(q)$ je matrica čiji ulazi su polinomi po q^{-1} . Sistem je sada dat sa:

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)e(t) \quad (4.54)$$

i

$$G(q, \theta) = A^{-1}(q)B(q), \quad H(q, \theta) = A^{-1}(q) \quad (4.55)$$

Inverzna vrijednost $A^{-1}(q)$ matričnog polinoma je interpolirana i izračunata na direkatan način. $G(q, \theta)$ će biti $p \times m$ matrica čiji ulazi su racionalne funkcije od q^{-1} (ili q). Faktorizacija po ova dva matrična polinoma se zove opis matrične frakcije (MFD).

Još nismo diskutovali parametrizaciju (4.52) (tj. koji elementi od matrica trebaju biti uključeni u vektor parametara (\mathbf{q})).

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Može se odmah primjetiti jedan analog izrazu (4.8), predpostavimo da su svi matrični ulazi u (4.52), (ukupno $n_a \cdot p^2 + n_b \cdot p \cdot m$) uključениh u \mathbf{q} . Tada možemo definirati $[n_a \cdot p + n_b \cdot m] \times p$ matricu:

$$\boldsymbol{\theta} = [A_1 A_2 \cdots A_{n_a} B_1 \cdots B_{n_b}]^T \quad (4.56)$$

i $[n_a \cdot p + n_b \cdot m]$ - dimenzionalni vektor kolonu:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} -y(t-1) \\ \vdots \\ -y(t-n_a) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-n_b) \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

da pišemo (4.52) u obliku:

$$y(t) = \boldsymbol{\theta}^T \varphi(t) + e(t) \quad (4.58)$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

U svjetlu različitih mogućnosti za SISO sisteme, jednostavno je vizuelizirati niz varijanti za MIMO slučaj, kao napr. vektorska diferentna jednačina:

$$\begin{aligned}y(t) + A_1 y(t-1) + \dots + A_{n_a} y(t-n_a) \\ = B_1 u(t-1) + \dots + B_{n_b} u(t-n_b) \\ + e(t) + C_1 e(t-1) + \dots + C_{n_c} e(t-n_c)\end{aligned}\quad (4.60a)$$

ili :

$$G(q, \theta) = A^{-1}(q)B(q), \quad H(q, \theta) = A^{-1}(q)C(q)\quad (4.60b)$$

koja je prirodno proširenje za ARMAX model. Multivarijabilni Box-Jenkins model ima oblik:

$$G(q, \theta) = F^{-1}(q)B(q), \quad H(q, \theta) = D^{-1}(q)C(q)\quad (4.61)$$

Modeli u prostoru stanja (state-space models)

U formi prostora stanja relacija između ulaza, šuma, i izlaznih signala se piše kao sistem diferencijalnih ili diferentnih jednačina prvog reda koristeći vektor stanja $x(t)$.

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Ovaj opis linearnih dinamičkih sistema je bio prilično dominantan nakon Kalmanovog rada (1960) o predikciji i linearnom kvadratičnom upravljanju. U ovom pristupu identifikaciji sistema sagledavanje i uvid u fizikalne mehanizme sistema može se lakše inkorporirati u modele u prostoru stanja, nego u modele koji su do sada opisivani.

Modeli kontinualnog vremena sa fizičkim uvidom u sistem

Za većinu fizikalnih sistema je lakše konstruisati modele sa fizikalnim uvidom u sistem u kontinualnom vremenu nego u diskretnom vremenu, pošto mnogi zakoni fizike (Newton-ov zakon kretanja, jednačine električnih kola) su u kontinualnom vremenu.

To znači da će modeliranje ovakvih sistema najčešće voditi do opisa u obliku:

$$\dot{x}(t) = F(\theta)x(t) + G(\theta)u(t) \quad (4.62)$$

gdje su F i G matrice odgovarajućih dimenzija ($n \times n$ i $n \times m$) za n -dimenzionalni vektor stanja i m -dimenzionalni ulaz.

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

\mathbf{q} je vektor parametara koji obično korespondira sa nepoznatim vrijednostima fizikalnih koeficijenata, materijalnim konstantama, i slično.

Modeliranje se obično provodi u terminima varijabli stanja x , koje imaju fizikalno značenje (pozicije, brzine, itd.) i sa mjerljivim izlazima koji su poznate kombinacije stanja. Neka su $\eta(t)$ mjerenja koja bi se dobila sa idealnih senzora bez šuma:

$$\eta(t) = Hx(t) \quad (4.63)$$

Koristeći p kao diferencijalni operator (4.62) se može pisati kao:

$$[pI - F(\theta)]x(t) = G(\theta)u(t)$$

što znači da prenosni operator sa u na η u (4.63) je:

$$\begin{aligned} \eta(t) &= G_c(p, \theta)u(t) \\ G_c(p, \theta) &= H [pI - F(\theta)]^{-1} G(\theta) \end{aligned} \quad (4.64)$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Dobili smo model prenosne funkcije sa kontinualnim vremenom, kao i (2.22) koji je parametriziran po članovima fizikalnih koeficijenata.

U realnim mjerenjima dobije se jedna verzija $\eta(t)$ koja je opterećena šumom, što je rezultat i nesavršenosti mjerenja kao i efekata smetnji.

Neka su mjerenja uzorkovana u trenutcima $t=kT$, $k=1,2,\dots$, i efekti smetnji u ovi trenutcima vremena su $v_T(kT)$. Tada mjereni izlaz je:

$$y(kT) = Hx(kT) + v_T(kT) = G_c(p, \theta)u(t) + v_T(kT) \quad (4.65)$$

Sampliranje prenosne funkcije

Predpostavimo da je ulaz konstantan unutar intervala uzorkovanja T :

$$u(t) = u_k = u(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (4.66)$$

Tada diferencijalna jednačina (4.62) se može lako riješiti od $t=kT$ do $t=kT+T$, dajući:

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

$$x(kT + T) = A_T(\theta)x(kT) + B_T(\theta)u(kT) \quad (4.67)$$

gdje:

$$A_T(\theta) = e^{F(\theta)T} \quad (4.68a)$$

$$B_T(\theta) = \int_{\tau=0}^T e^{F(\theta)\tau} G(\theta) d\tau \quad (4.68b)$$

Uvodeći q za pomak unaprijed od T vremenskih jedinica, možemo pisati (4.67) kao:

$$[qI - A_T(\theta)]x(kT) = B_T(\theta)u(kT) \quad (4.69)$$

ili :

$$\eta(kT) = G_T(q, \theta)u(kT) \quad (4.70)$$

$$G_T(q, \theta) = H [qI - A_T(\theta)]^{-1} B_T(\theta) \quad (4.71)$$

Dakle (4.65) se može ekvivalentno opisati u formi uzorkovanih podataka (sampled-data) kao:

$$y(t) = G_T(q, \theta)u(t) + v_T(t), \quad t = T, 2T, 3T, \dots \quad (4.72) \quad 101$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Primjer istosmjernog motora

U ovom primjeru ćemo analizirati fizikalni proces, gdje imamo neki uvid u dinamičke osobine sistema. Posmatrajmo istosmjerni (dc) motor koji je prikazan na slici 4.5 sa blok dijagramom na slici 4.6. Ulaz u sistem je napon koji je primjenjen na motor u , a izlaz je ugaona pozicija osovine motora η . Relacija između narinutog napona u i rezultirajuće struje i u rotorskom kolu je data relacijom:

$$u(t) = R_a i(t) + L_a \frac{di(t)}{dt} + s(t) \quad (4.73)$$

gdje je $s(t)$ kontra elektromotorna sila i predstavlja interakciju mehaničkog podsistema na mehanički tj. posljedica je rotacije armaturnog kruga u magnetnom polju statorskog namotaja:

$$s(t) = k_v \frac{d}{dt} \eta(t)$$

Struja i proizvodi obrtni momenat:

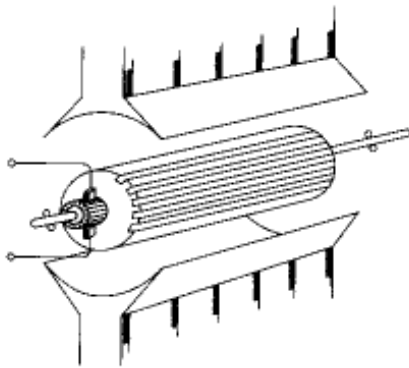
$$T_a(t) = k_a \cdot i(t)$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

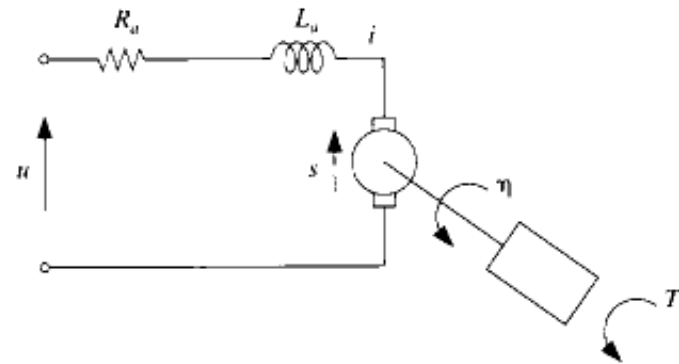
na osovini motora, na koji takodjer utiče i momenat opterećenja $T_l(t)$. Newton-ov zakon ravnoteže sila (momenata) daje:

$$J \frac{d^2}{dt^2} \eta(t) = T_a(t) - T_l(t) - f \frac{d}{dt} \eta(t) \quad (4.74)$$

gdje je J -moment inercije a f predstavlja viskozno trenje.



Slika br. 4.5 DC motor



Slika br. 4.6 Blok dijagram DC motora

Predpostavljajući da možemo zanemariti induktansu armaturnog kola , $L_a \sim 0$. prethodnu jednačinu možemo pisati u prostoru stanja kao:

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/\tau \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta/\tau \end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma'/\tau \end{bmatrix}T_L(t) \quad (4.75)$$

sa:

$$\eta(t) = [1 \ 0]x(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \eta(t) \\ \frac{d}{dt}\eta(t) \end{bmatrix}$$

$$\tau = \frac{J R_a}{f R_a + k_a k_v}, \quad \beta = \frac{k_a}{f R_a + k_a k_v}, \quad \gamma' = -\frac{R_a}{f R_a + k_a k_v}$$

Predpostavimo sada da je momenat opterećenja $T_L = 0$. Da bi odredili dinamiku motora, primjenićemo konstantan po segmentima ulaz, i uzorkovati izlaz, sa intervalom uzorkovanja T . Jednačina stanja (4.75) se sada može opisati sa:

$$x(t + T) = A_T(\theta)x(t) + B_T(\theta)u(t) \quad (4.76)$$

gdje:

$$\theta = \begin{bmatrix} \tau \\ \beta \end{bmatrix}$$

i u skladu sa (4.68):

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

$$A_T(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \tau(1 - e^{-T/\tau}) \\ 0 & e^{-T/\tau} \end{bmatrix}, \quad B_T(\theta) = \begin{bmatrix} \beta(\tau e^{-T/\tau} - \tau + T) \\ \beta(1 - e^{-T/\tau}) \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Takodjer, predpostavimo da je $y(t)$, stvarno mjerenje ugla $\eta(t)$ koje je realizovano sa greškom $v(t)$:

$$y(t) = \eta(t) + v(t) \quad (4.78)$$

Ova greška je uglavnom prouzrokovana ograničenom tačnošću potenciometarskog davača koji mjeri ugaonu poziciju rotora, i može se opisati kao sekvenca nezavisnih slučajnih varijabli, sa nultom srednjom vrijednošću i poznatom varijansom R_2 (koja se može izračunati iz greške zaokruživanja mjerenja). Imamo sada model:

$$y(t) = G_T(q, \theta)u(t) + v(t)$$

gdje je $v(t)$, bijeli šum. Prirodni prediktor je dakle:

$$\hat{y}(t|\theta) = G_T(q, \theta)u(t) = [1 \ 0][qI - A_T(\theta)]^{-1} B_T(\theta)u(t) \quad (4.79)$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Ovaj prediktor je parametriziran koristeći samo dva parametra β i τ . Primjetimo da ako koristimo fizikalnu sliku zaključićemo da je sistem drugog reda i da ćemo koristiti napr. ARX ili OE model drugog reda, koji sadrži 4 podesiva parametra.

Kao što ćemo kasnije vidjeti, koristeći manji broj parametara ima neke pozitivne efekte na proceduru procjene parametara, varijansa procjenjenih parametara će opadati. Međutim, cijena ovoga nije beznačajna. Prediktor (4.79) je mnogo komplikovanija funkcija sa dva parametra, nego odgovarajući ARX ili OE model sa svoja 4 parametra.

Jednačine (4.67) i (4.65) predstavljaju standardni model u prostoru stanja u diskretnom vremenu. Radi pojednostavljenja, mi ćemo najčešće uzimati da je $T=1$, i izostaviti odgovarajuće indekse. Mi također uvodimo arbitrarnu parametrizaciju matrice koja povezuje x i η : $H = C(\mathbf{q})$. Mi ćemo sada imati:

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

$$x(t + 1) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) \quad (4.80a)$$

$$y(t) = C(\theta)x(t) + v(t) \quad (4.80b)$$

što odgovara:

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + v(t) \quad (4.81)$$

$$G(q, \theta) = C(\theta) [qI - A(\theta)]^{-1} B(\theta) \quad (4.82)$$

Predstava šuma i vremenski invarijantan Kalmanov filter

U izrazu (4.80) i (4.81) mi možemo nadalje modelirati osobine člana šuma $\{v(t)\}$. Direktan pristup bi bio da formuliramo model šuma u obliku:

$$v(t) = H(q, \theta)e(t) \quad (4.83)$$

sa $\{e(t)\}$ kao bijelim šumom i varijansom šuma \mathbf{I} . \mathbf{q} parametri u $H(q, \mathbf{q})$ mogu biti djelomično u zajednici sa onim u $G(q, \mathbf{q})$ ili model parametri dodatnog šuma. Za opise u prostoru stanja, češće se razdvaja član šuma $v(t)$ u doprinose od šuma mjerenja $v(t)$ i procesnog šuma $w(t)$ koji djeluje na varijable stanja, tako

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

da se (4.80) može pisati kao:

$$\begin{aligned}x(t + 1) &= A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) + w(t) \\ y(t) &= C(\theta)x(t) + v(t)\end{aligned}\tag{4.84}$$

Ovdje $\{v(t)\}$ i $\{w(t)\}$ se pretpostavljaju da su sekvence od nezavisnih slučajnih varijabli sa nultom srednjom vrijednošću i kovarijansama:

$$\begin{aligned}Ew(t)w^T(t) &= R_1(\theta) \\ Ev(t)v^T(t) &= R_2(\theta) \\ Ew(t)v^T(t) &= R_{12}(\theta)\end{aligned}\tag{4.85}$$

Smetnje $w(t)$ i $v(t)$ mogu često biti signali čije fizikalno porjeklo je poznato. U prethodnom primjeru varijacije momenta opterećenja $T_1(t)$ su bile 'procesni šum', dok netačnost potencijometra koji je mjerio ugaoni položaj rotorske osovine $v(t)$ je bio smatran kao 'mjerni šum'. U takvim slučajevima, nije uvijek realistično pretpo-

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

staviti da su ovi signali bijeli šum.

Pogledajmo sada problem procjene $y(t)$ u (4.84). Ovaj opis prostora stanja je onaj na koji se može primjeniti i kalmanov filter. Uslovno očekivanje za $y(t)$, dato sa $y(s)$, $u(s)$, $s \leq 1$, (tj. od minus beskonačno do trenutka $t-1$), je dato sa, pod uslovom da su v i w Gaussovski procesi:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t+1, \theta) &= A(\theta)\hat{x}(t, \theta) + B(\theta)u(t) + K(\theta)[y(t) - C(\theta)\hat{x}(t, \theta)] \\ \hat{y}(t|\theta) &= C(\theta)\hat{x}(t, \theta)\end{aligned}\quad (4.86)$$

ovdje $K(\mathbf{q})$ je dato sa:

$$K(\theta) = [A(\theta)\bar{P}(\theta)C^T(\theta) + R_{12}(\theta)] [C(\theta)\bar{P}(\theta)C^T(\theta) + R_2(\theta)]^{-1} \quad (4.87a)$$

gdje $\bar{P}(\theta)$ se dobije kao pozitivno semidefinitno rješenje stacionarne Riccatijeve jednačine:

$$\begin{aligned}\bar{P}(\theta) &= A(\theta)\bar{P}(\theta)A^T(\theta) + R_1(\theta) - [A(\theta)\bar{P}(\theta)C^T(\theta) + R_{12}(\theta)] \\ &\quad \times [C(\theta)\bar{P}(\theta)C^T(\theta) + R_2(\theta)]^{-1} [A(\theta)\bar{P}(\theta)C^T(\theta) + R_{12}(\theta)]^T\end{aligned}\quad (4.87b)$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Prediktorski filter se sada može pisati u obliku:

$$\begin{aligned}\hat{y}(t|\theta) &= C(\theta)[qI - A(\theta) + K(\theta)C(\theta)]^{-1} B(\theta)u(t) \\ &\quad + C(\theta)[qI - A(\theta) + K(\theta)C(\theta)]^{-1} K(\theta)y(t)\end{aligned}\quad (4.88)$$

Matrica $\bar{P}(\theta)$ je kovarijantna matrica vektora procjene stanja:

$$\bar{P}(\theta) = \bar{E} [x(t) - \hat{x}(t, \theta)][x(t) - \hat{x}(t, \theta)]^T \quad (4.89)$$

Inovaciona predstava

Predikciona greška:

$$y(t) - C(\theta)\hat{x}(t, \theta) = C(\theta)[x(t) - \hat{x}(t, \theta)] + v(t) \quad (4.90)$$

u (4.86) se odnosi na onaj dio $y(t)$ koji ne može biti procjenjen iz prošlih vrijednosti :’inovacija’.

Označavajući ovu veličinu sa $e(t)$ kao i u (3.25), nalazimo da (4.86) se može pisati u obliku:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t + 1, \theta) &= A(\theta)\hat{x}(t, \theta) + B(\theta)u(t) + K(\theta)e(t) \\ y(t) &= C(\theta)\hat{x}(t, \theta) + e(t)\end{aligned}\quad (4.91a)$$

MODELI LINEARNIH VREMENSKI INVARIJANTNIH SISTEMA

Kovarijansa od $e(t)$ se može odrediti iz (4.90) a (4.89):

$$Ee(t)e^T(t) = \Lambda(\theta) = C(\theta)\bar{P}(\theta)C^T(\theta) + R_2(\theta) \quad (4.91b)$$

Pošto se $e(t)$ pojavljuje eksplicitno, ova predstava je poznata kao 'inovaciona forma' opisa u prostoru stanja. Koristeći operator pomaka q , možemo je pisati u obliku:

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)e(t) \quad (4.92a)$$

$$G(q, \theta) = C(\theta)[qI - A(\theta)]^{-1}B(\theta) \quad (4.92b)$$

$$H(q, \theta) = C(\theta)[qI - A(\theta)]^{-1}K(\theta) + I$$

pokazujući svoju vezu sa opštim modelom (4.4) i direktnim modeliranjem $v(t)$ kao u (4.83).