

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

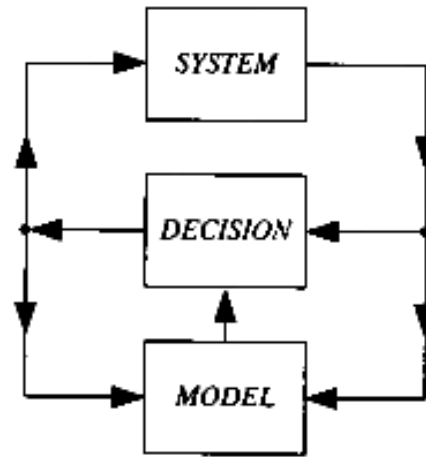
Uvod

U mnogim slučajevima je neophodno, ili korisno, imati model sistema online dok je sistem u radu. Model tada treba biti baziran na observacijama do tekućeg vremena. Potreba za konstrukcijom takvog online modela tipično se javlja kada se zahtjeva model da bi se donjele neke odluke vezane za sam sistem. Ovo može biti:

- kada treba primjeniti neku ulaz u slijedećem trenutku sampliranja?
- kako trebaju biti podešeni parametri filtera koji se uparuje sa procesom ?
- koje su najbolje procjene slijedećih nekoliko izlaza ?
- da li se desio otkaz i ako jeste , kavog tipa ?

Metode koje rješavaju ovakve probleme koristeći online podešavajući model se obično nazivaju adaptivnim , kako je prikazano na slijedećoj slici:

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE



Slika 11.1 Adaptivne metode

Sada govorimo o adaptivnom upravljanju, adaptivnom filtriranju, adaptivnom procesiranju signala i adaptivnoj predikciji.

Online računanje modela mora također biti realizovano na takav način da se procesiranje mjerenja jednog sampla može, sa sigurnošću, kompletirati unutar jednog intervala sampliranja. Inače izgradnja modela neće moći pratiti tok podataka iz sampliranja.

Identifikacione tehnike koje zadovoljavaju ove zahtjeve će se nazivati: *rekurzivne identifikacione metode*, pošto su izmjereće

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

ulazno-izlazne vrijednosti procesiraju rekurzivno kako postaju raspoložive. Neki drugi termini koji se koriste za ove tehnike su: on-line identifikacija, identifikacija u realnom vremenu, adaptivna procjena parametara ili sekvencijalna procjena parametara. Osim korištenja rekurzivnih metoda u adaptivnim šemama upravljanja, one su važne i zbog slijedeća dva razloga:

1. Tipično, ovi algoritmi će ostvarivati i svoju vlastitu procjenu varijanse parametara. Ovo znači da podaci se mogu skupljati iz sistema i procesirati sve dok se ne dostigne dovoljan stepen tačnosti modela.
2. Algoritmi koji se koriste za rekurzivne metode procjene mogu biti vrlo kompetentna alternativa metodama procjene parametara u off-line situacijama.

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

Format algoritma

Definisali smo opšti identifikacioni metod kao mapiranje iz skupa podataka Z^t u parametarski prostor kao:

$$\hat{\theta}_t = F(t, Z^t) \quad (11.1)$$

gdje funkcija F može biti implicitno definisana (napr. kao minimizirajući argument neke funkcije). Ovakav opšti izraz (11.1) se ne može koristiti u rekurzivnim algoritmima, pošto evaluacija F može uključiti nesagledivu količinu računanja, koja se ne mogu završiti do slijedećeg trenutka sampliranja.

Umjesto, rekurzivni algoritam mora zadovoljiti slijedeći format:

$$X(t) = H(t, X(t-1), y(t), u(t)) \quad (11.2)$$

$$\ddot{\theta}_t = h(X(t))$$

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

Ovdje $X(t)$ je vektor fiksne dimenzije koji predstavlja neko "informativno stanje". Funkcije H i h su eksplicitni izrazi koji se mogu evaluirati sa fiksnim i apriori poznatim iznosom računanja. Na taj način može biti osigurano da $\hat{\theta}_t$ može biti evaluirano u toku jednog intervala sampliranja.

Pošto informacioni sadržaj u posljednjem paru mjerenja : $y(t)$, $u(t)$ je normalno vrlo mali u poredjenju sa već akumuliranom informacijom iz prethodnih mjerenja, algoritam (11.2) tipično poprima specifičniji oblik:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_t &= \hat{\theta}_{t-1} + \gamma_t Q_\theta (X(t), y(t), u(t)) \\ X(t) &= X(t-1) + \mu_t Q_X (X(t-1), y(t), u(t))\end{aligned}\tag{11.3}$$

gdje su : γ i μ mali brojevi koji odražavaju relativnu informacionu vrijednost posljednjeg mjerenja.

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

Rekurzivni algoritam najmanjih kvadrata

Razmatraćemo metod najmanjih kvadrata kao jednostavan ali i standardan tip identifikacionih algoritama. Dobijeni algoritmi i uvid koji će se ostvariti bit će onda korišteni i za druge tipove rekurzivnih algoritama.

Otežani kriterij najmanjih kvadrata

Iz prethodnih poglavlja smo izračunali procjenu koja minimizira otežani kriterij najmanjih kvadrata kao:

$$\hat{\theta}_t = \arg \min_{\theta} \sum_{k=1}^t \beta(t, k) [y(k) - \varphi^T(k)\theta]^2 \quad (11.4)$$

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

Ovo se može pisati kao:

$$\hat{\theta}_t = \bar{R}^{-1}(t) f(t) \quad (11.5a)$$

$$\bar{R}(t) = \sum_{k=1}^t \beta(t, k) \varphi(k) \varphi^T(k) \quad (11.5b)$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^t \beta(t, k) \varphi(k) y(k) \quad (11.5c)$$

Da bi se izračunali izrazi u (11.5), mi treba da u trenutku t formiramo navedenu matricu i vektor iz Z^t i zatim riješimo (11.5a). Ako smo izračunali prije toga $\hat{\theta}_{t-1}$, ovo ne bi bilo od neke neposredne koristi. Međutim, jasno je da se to može iskoristiti iz izraza koji povezuju $\hat{\theta}_t$ i $\hat{\theta}_{t-1}$.

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

Rekurzivni algoritam

Predpostavimo da težinska sekvenca ima slijedeće osobine;

$$\begin{aligned}\beta(t, k) &= \lambda(t)\beta(t-1, k), & 0 \leq k \leq t-1 \\ \beta(t, t) &= 1\end{aligned}\tag{11.6}$$

Ovo znači da mi možemo pisati:

$$\beta(t, k) = \prod_{j=k+1}^t \lambda(j)\tag{11.7}$$

Ovo takodjer implicira i da:

$$\bar{R}(t) = \lambda(t)\bar{R}(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t)\tag{11.8a}$$

$$f(t) = \lambda(t)f(t-1) + \varphi(t)y(t)\tag{11.8b}$$

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

Sada

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_t &= \bar{R}^{-1}(t)f(t) = \bar{R}^{-1}(t)[\lambda(t)f(t-1) + \varphi(t)y(t)] \\ &= \bar{R}^{-1}(t)\left[\lambda(t)\bar{R}(t-1)\hat{\theta}_{t-1} + \varphi(t)y(t)\right] \\ &= \bar{R}^{-1}(t)\left\{\left[\bar{R}(t) - \varphi(t)\varphi^T(t)\right]\hat{\theta}_{t-1} + \varphi(t)y(t)\right\} \\ &= \hat{\theta}_{t-1} + \bar{R}^{-1}(t)\varphi(t)\left[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}_{t-1}\right]\end{aligned}$$

Mi sada imamo:

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \bar{R}^{-1}(t)\varphi(t)\left[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}_{t-1}\right] \quad (11.9a)$$

$$\bar{R}(t) = \lambda(t)\bar{R}(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t) \quad (11.9b)$$

što je rekurzivni algoritam, koji zadovoljava zahtjeve (11.2): U trenutku $t-1$ mi pohranjujemo samo konačno dimenzionalni vektor $X(t-1) = [\hat{\theta}_{t-1}, \bar{R}(t-1)]$.

Pošto je \bar{R} simetrično, dimenzija od x je $d+(d+1)/2$. U trenutku t ovaj vektor je ažuriran koristeći (11.9) što se realizuje sa datim fiksnim brojem operacija.

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

Verzija sa efikasnom matricnom inverzijom

Da se izbjegne invertiranje $\bar{R}(t)$ u svakom koraku, pogodno je uvesti :

$$P(t) = \bar{R}^{-1}(t)$$

i primjeniti lemu matricne inverzije:

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[DA^{-1}B + C^{-1}]^{-1}DA^{-1} \quad (11.10)$$

na (11.9b). Uzimajući da su : $A = \lambda(t)\bar{R}(t-1)$, $B = D^T = \varphi(t)$, and $C = 1$ daje:

$$P(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)}{\lambda(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \right] \quad (11.11)$$

Nadalje, mi imamo:

$$\begin{aligned} \bar{R}^{-1}(t)\varphi(t) &= \frac{1}{\lambda(t)}P(t-1)\varphi(t) - \frac{1}{\lambda(t)} \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)}{\lambda(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \\ &= \frac{P(t-1)\varphi(t)}{\lambda(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \end{aligned}$$

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

Sada možemo sumirati ovu verziju algoritma kao:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + L(t) \left[y(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1) \right] \quad (11.12a)$$

$$L(t) = \frac{P(t-1)\varphi(t)}{\lambda(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \quad (11.12b)$$

$$P(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)}{\lambda(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \right] \quad (11.12c)$$

U ovom izrazima smo koristili oznake $\hat{\theta}(t)$ a ne $\hat{\theta}_t$ da bi uzeli u obzir neke razlike koje postoje u početnim uslovima.

Verzija sa normaliziranim pojačanjem

“Veličina” matrice u (11.5b) i (11.9) će zavisiti od $\lambda(t)$. Da bi se jasno definisao obim modifikacije u $\hat{\theta}_{t-1}$ u (11.9a), preporučuje se normalizovati $\bar{R}(t)$ tako da:

$$R(t) = \gamma(t) \bar{R}(t), \quad \gamma(t) = \left[\sum_{k=1}^t \beta(t, k) \right]^{-1} \quad (11.13)$$

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

Primjetimo da:

$$\frac{1}{\gamma(t)} = \frac{\lambda(t)}{\gamma(t-1)} + 1 \quad (11.14)$$

u skladu sa (11.6), i sada $R(t)$ je otežana aritmetička sredina od $\varphi(k)\varphi^T(k)$. Iz (11.9b) i (11.14) imamo:

$$\begin{aligned} R(t) &= \gamma(t) \left[\lambda(t) \frac{1}{\gamma(t-1)} R(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t) \right] \\ &= R(t-1) + \gamma(t) [\varphi(t)\varphi^T(t) - R(t-1)] \end{aligned} \quad (11.15)$$

Sada (11.9) se može pisati u obliku:

$$\begin{aligned} e(t) &= y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \\ \hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + \gamma(t)R^{-1}(t)\varphi(t)e(t) \\ R(t) &= R(t-1) + \gamma(t) [\varphi(t)\varphi^T(t) - R(t-1)] \end{aligned} \quad (11.16)$$

Primjetimo da $\varepsilon(t)$ je greška predikcije u skladu sa tekućim modelom. Pošto $R(t)$ je normalizirana matrica, varijabla $\gamma(t)$ se može posmatrati kao ažurirani korak integracije ili

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

pojačanje u algoritmu (11.16).

Početni uslovi

Da bi se koristili rekurzivni algoritmi, potrebne su početne vrijednosti za njihovo startovanje. Korektni početni uslovi u (11.9) u trenutku $t=0$ bi bili $\bar{R}(0) = 0$, $\hat{\theta}_0$ arbitrarno, u skladu sa definicijom od \bar{R} . Medjutim, ovo ne može biti korišteno. Druga mogućnost je da se samo inicijalizira u trenutku t_0 kada $\bar{R}(t_0)$ postane invertabilno (tipično kod $t_0 \geq d$) i onda koristiti:

$$P^{-1}(t_0) = \bar{R}(t_0) = \sum_{k=1}^{t_0} \beta(t_0, k) \varphi(k) \varphi^T(k) \quad (11.17)$$

$$\hat{\theta}_{t_0} = P(t_0) \sum_{k=1}^{t_0} \beta(t_0, k) \varphi(k) y(k) \quad (11.18)$$

Jednostavnija alternativa je da se koristi $P(0) = P_0$ i $\hat{\theta}(0) = \theta_I$ u (11.12). Ovo će dati:

$$\hat{\theta}(t) = \left[\beta(t, 0) P_0^{-1} + \sum_{k=1}^t \beta(t, k) \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \times \left[\beta(t, 0) P_0^{-1} \theta_I + \sum_{k=1}^t \beta(t, k) \varphi(k) y(k) \right] \quad (11.19)$$

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

gdje je $\beta(t,0)$ definisano u (11.7). Jasno, ako P_0 je veliko ili t je veliko, tada razlika izmedju (11.19) i (11.5) je beznačajna.

Multivarijabilni slučaj

Posmatrajmo sada otežani multivarijabilni slučaj ((7.42) i (7.43)):

$$\hat{\theta}_t = \arg \min_{\theta} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t \beta(t, k) [y(k) - \varphi^T(k)\theta]^T \Lambda_k^{-1} [y(k) - \varphi^T(k)\theta] \quad (11.20)$$

gdje $\beta(t,k)$ je podvrgnuto (11.6). Potpuno analogna računanja kao i ranije daće multivarijabilni ekvivalent od (11.12)

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + L(t) [y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)]$$

$$L(t) = P(t-1)\varphi(t) [\lambda(t)\Lambda_t + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)]^{-1} \quad (11.21)$$

$$P(t) = \frac{P(t-1) - P(t-1)\varphi(t) [\lambda(t)\Lambda_t + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)]^{-1} \varphi^T(t)P(t-1)}{\lambda(t)}$$

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

i od (11.6):

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \\ \hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + \gamma(t)R^{-1}(t)\varphi(t)\Lambda_t^{-1}\varepsilon(t) \\ R(t) &= R(t-1) + \gamma(t) [\varphi(t)\Lambda_t^{-1}\varphi^T(t) - R(t-1)]\end{aligned}\tag{11.22}$$

primjetimo da su ovi izrazi korisni takodjer za skalarni sistem kada se koristi otežana norma sa :

$$\beta(t, k) = \alpha_k \prod_{j=k+1}^t \lambda(j)\tag{11.23}$$

u (11.4). Skalarni α_k tada korespondira sa Λ_k^{-1} .

Slučaj vremenski varijabilnih sistema

Važan razlog korištenja adaptivnih metoda i rekurzivne identifikacije u praksi je da osobine sistema mogu varirati u vremenu i mi želimo da identifikacioni algoritam prati ove varijacije. Ovo se može rješavati na prirodan način sa težinskim kriterijem (11.4) doznačavajući manje težine starijim mjerenjima koja više nisu dovoljno reprezentativna za sistem. Ovo znači da u terminima (11.6), da mi izabiremo da je $\lambda(j) \ll 1$.

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

Naročito ako je $\lambda(j) = \lambda$, tada:

$$\beta(t, k) = \lambda^{t-k} \quad (11.26)$$

i stara mjerenja u kriteriju se eksponencijalno manje vrednuju tj. otežuju. U tom slučaju, λ se često naziva "faktor zaboravljanja" (forgetting factor). Odgovarajući $\gamma(t)$ će tada, u skladu sa (11.14) biti:

$$\gamma(t) \equiv \gamma = 1 - \lambda \quad (11.27)$$

Ovi izbori imaju prirodan efekat na algoritam (11.12) ili (11.16) da korak integracije ili pojačanje neće se smanjiti na nulu.

Druga, formalnija alternativa da se tretiraju varijabilni parametri je da se postuliše da pravi vektor parametara u (11.25) nije konstantan, nego varira kao slučajni hod (random walk):

$$\theta(t+1) = \theta(t) + w(t), \quad Ew(t)w^T(t) = R_1(t) \quad (11.28) \quad 16$$

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

sa w kao bijelim Gaussovskim šumom i $Ev^2(t) = R_2(t)$. Kalman filter tada daje uvjetno očekivanje i kovarijansu od $\hat{\theta}(t)$ kao:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + L(t) [y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)] \quad (11.29a)$$

$$L(t) = \frac{P(t-1)\varphi(t)}{R_2(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \quad (11.29b)$$

$$P(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)}{R_2(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} + R_1(t) \quad (11.29c)$$

Vidimo da u ovoj formulaciji aditivni $R_1(t)$ član u (11.29) spriječava da pojačanje $L(t)$ ide na nulu.

Rekurzivni IV metod

IV procjena za fiksne (tj. nezavisne od modela) instrumente je data sa (7.118). Ako uključimo težinske koeficijente kao u (11.5) imaćemo:

$$\hat{\theta}_t^{IV} = \bar{R}^{-1}(t) f(t) \quad (11.30)$$

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

sa

$$\begin{aligned}\bar{R}(t) &= \sum_{k=1}^t \beta(t, k) \zeta(k) \varphi^T(k) \\ f(t) &= \sum_{k=1}^t \beta(t, k) \zeta(k) y(k)\end{aligned}\quad (11.31)$$

Ovo je blisko u relaciji sa formulacijom (11.5), i rekurzivno računanje $\hat{\theta}_t^{IV}$ je dosta analogno onom za $\hat{\theta}_t^{LS}$. Ekvivalent (11.12) je:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + L(t) \left[y(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1) \right] \quad (11.32a)$$

$$L(t) = \frac{P(t-1) \zeta(t)}{\lambda(t) + \varphi^T(t) P(t-1) \zeta(t)} \quad (11.32b)$$

$$P(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[P(t-1) - \frac{P(t-1) \zeta(t) \varphi^T(t) P(t-1)}{\lambda(t) + \varphi^T(t) P(t-1) \zeta(t)} \right] \quad (11.32c)$$

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

Rekurzivne metode sa predikcionim greškom

Analogno otežanom slučaju LS, posmatrajmo sada otežani kriterij sa predikcionom greškom:

$$V_t(\theta, Z^t) = \gamma(t) \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t \beta(t, k) \varepsilon^2(k, \theta) \quad (11.33)$$

sa β i γ datim sa (11.6) i (11.3). Primjetimo da:

$$\sum_{k=1}^t \gamma(t) \beta(t, k) = 1$$

i da gradijent zadovoljava:

$$\begin{aligned} V_t'(\theta, Z^t) &= -\gamma(t) \sum_{k=1}^t \beta(t, k) \psi(k, \theta) \varepsilon(k, \theta) \\ &= \gamma(t) \left[\lambda(t) \frac{1}{\gamma(t-1)} V_{t-1}'(\theta, Z^{t-1}) - \psi(t, \theta) \varepsilon(t, \theta) \right] \quad (11.34) \\ &= V_{t-1}'(\theta, Z^{t-1}) + \gamma(t) \left[-\psi(t, \theta) \varepsilon(t, \theta) - V_{t-1}'(\theta, Z^{t-1}) \right] \end{aligned}$$

kao i u izrazu (11.15).

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

Za pristup preko predikcione greške, razvijen je bio opšti algoritam traženja (10.40):

$$\hat{\theta}_t^{(i)} = \hat{\theta}_t^{(i-1)} - \mu_t^{(i)} \left[R_t^{(i)} \right]^{-1} V_t'(\hat{\theta}_t^{(i-1)}, Z^t) \quad (11.35)$$

Ovdje donji indeks t označava da je procjena bazirana na t podataka (tj. Z^t). Gornji indeks (i) označava i -tu iteraciju minimizacione procedure.

Predpostavimo sada da, za svaku iteraciju i , mi takodjer skupljamo jednu više tačku podatka. Ovo bi dalo slijedeći algoritam:

$$\hat{\theta}_t^{(i)} = \hat{\theta}_{t-1}^{(i-1)} - \mu_t^{(i)} \left[R_t^{(i)} \right]^{-1} V_t'(\hat{\theta}_{t-1}^{(i-1)}, Z^t) \quad (11.36)$$

Radi lakšeg označavanja uvešćemo:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}_t^{(i)}, \quad R(t) = R_t^{(i)} \quad (11.37)$$

Sada ćemo napraviti induciranu predpostavku da $\hat{\theta}(t-1)$ ustvari minimizira $V_{t-1}(\theta, Z^{t-1})$ tako da :

$$V_{t-1}'(\hat{\theta}(t-1), Z^{t-1}) = 0 \quad (11.38)$$

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

Saada, iz (11.34) imamo:

$$V_t'(\hat{\theta}(t-1), Z^t) = -\gamma(t)\psi(t, \hat{\theta}(t-1))\varepsilon(t, \hat{\theta}(t-1)) \quad (11.39)$$

Sa ovom aproksimacijom (i uzimajući u obzir $\mu(t)=1$), mi dolazimo da algoritma:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \gamma(t)R^{-1}(t)\psi(t, \hat{\theta}(t-1))\varepsilon(t, \hat{\theta}(t-1)) \quad (11.40)$$

Varijable $\psi(t, \hat{\theta}(t-1))$ i $\varepsilon(t, \hat{\theta}(t-1))$ su izvedene iz predikcije $\hat{y}(t|\hat{\theta}(t-1))$

Izračunavanje $\hat{y}(t|\theta)$ za bilo koju datu vrijednost od \mathcal{V} zahtjeva poznavanje svih podataka do Z^{t-1} . Za konačno dimenzionalne linearne modele, ovo znači da je $\hat{y}(t|\theta)$ dobijeno kao izlaz iz linearnog filtera čiji koeficijenti zavise od \mathcal{V} . To znači da $\psi(t, \hat{\theta}(t-1))$ i $\varepsilon(t, \hat{\theta}(t-1))$ ne mogu biti "rekurzivno" izračunati. Umjesto toga, mi treba da koristimo neku aproksimaciju ovih varijabli. Slijedeći pristup je prirodan:

U trenutku kada rekurzije koje definiraju $\psi(t, \theta)$ i $\hat{y}(t|\theta)$ iz Z^t za bilo koje dato \mathcal{V} , zamjeni , u trenutku k , parametar \mathcal{V} sa tekućom

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

raspoloživom procjenom $\hat{\theta}(k)$. Označiti rezultirajuću aproksimaciju od $\psi(t, \hat{\theta}(t-1))$ i $\hat{y}(t|\hat{\theta}(t-1))$ sa $\psi(t)$ i $\hat{y}(t)$ (11.41)

Za konačno dimenzionalni, linearni i vremenski invarijantni model (10.60), aproksimacija (11.41) poprima oblik:

$$\xi(t+1) = \mathcal{A}(\hat{\theta}(t))\xi(t) + \mathcal{B}(\hat{\theta}(t))z(t) \quad (11.42a)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} = C(\hat{\theta}(t-1))\xi(t) \quad (11.42b)$$

Za Gauss-Newtonov izbor (10.45) i (10.46) od $R(N)$, pravilo (11.41) sugerira slijedeću aproksimaciju:

$$R(t) = \gamma(t) \sum_{k=1}^t \beta(t, k) \psi(k) \psi^T(k) \quad (11.43)$$

Koristeći (11.41) i (11.43) u (11.40) daje rekurzivnu šemu:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (11.44a)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \gamma(t) R^{-1}(t) \psi(t) \varepsilon(t) \quad (11.44b)$$

$$R(t) = R(t-1) + \gamma(t) [\psi(t) \psi^T(t) - R(t-1)] \quad (11.44c)$$

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

Rezultirajuća shema (11.44) zajedno sa (11.42) je poznata kao : rekurzivni Gauss-Newtonov algoritam greške predikcije.

Sumarni pregled

Rekurzivni identifikacioni algoritmi su korisni za većinu šema adaptacije. Rekurzivni algoritam, se može izvesti iz off-line ekvivalenta koristeći filozofiju izvršenja jedne iteracije u numeričkom traženju u isto vrijeme kada novo opažanje (mjerjenje) je uključeno u kriterij. U nekim specijalnim slučajevima (napr. rekurzivni najmanji kvadrati i rekurzivna instrumentalna varijabla), ovo vodi ka algoritmima koji tačno izračunavaju offline procjene na rekurzivni način. U opštem slučaju, rekurzivna ograničenja znače da zapis pdataka nije maksimalno iskorišten.

Sa ovom filozofijom, tri osnovne zajedničke klase rekurzivnih metoda se mogu uočiti:

1. Rekurzivne metode greške predikcije (RPEM) (11.44)
2. Rekurzivne pseudolinearne regresije (RPLR) (11.57)
3. Rekurzivne metode instrumentalne varijable (RIV) (11-32)₂₃

11. REKURZIVNE METODE PROCJENE

Asimptotske osobine dobijene sa RPEM za konstantan sistem, koristeći Gauss-Newtonov pravac ažuriranja, koincidiraju sa off-line metodom predikcione greške.

Identifikacioni metod uključuje niz dizajn varijabli koje korisnik treba da izabere. Mnoge od ovih su zajedničke i za off-line i za rekurzivne metode. Rekurzivni algoritmi dodatno uključuju i još dvije važne veličine koje mogu imati značajne efekte na kvalitet procjena: to su smjer ažuriranja (update) i pojačanje.

Očito da je Gauss-Newtonov pravac dobar izbor pravca ažuriranja za konstantne sisteme, mada može da uključi i veći obim računanja nego drugi izbori.

Principi rekurzivne identifikacije koji su izloženi mogu se primjeniti i na "stohastičke" i "determinističke" sisteme.

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Dizajn identifikacionog eksperimenta uključuje nekoliko izbora, kao što je: koje signale mjeriti i kada ih mjeriti i sa kojim signalima manipulirati i kako manipulirati sa njima. Također uključuje neke praktičnije aspekte, kao napr. kako kondicionirati signale prije nego što se sampliraju (izbor predsamplirajućih filtera).

Na izvjestan način, dizajn varijable koje su pridržene sa eksperimentom identifikacije su bitnije od ostalih varijabli. Dok se promjena dizajn varijabli udruženih sa modelima i metodima može lako primjeniti i probati na računaru, promjena eksperimentalnih podataka je jedino moguća sa novim eksperimentom, što može biti skupa i vremenski zahtjevna procedura. Zbog toga eksperiment treba biti pažljivo dizajniran da bi se generisali podaci koji su dovoljno informativni.

Dizajn varijable

Kada smo suočeni sa fizikalnim sistemom koji treba biti identificiran, postoji niz pitanja na koja treba odgovoriti.

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Prvo, nije data definicija sistema: koji signali se smatraju izlazima a koji su ulazni signali? Ovo pitanje sa svodi na to da se odredi koji senzori se smještaju da bi se mjerili izlazi, i koji signali se mogu manipulirati da bi "pobudili" sistem tokom eksperimenta i time predstavljali njegove ulaze. Treba takodjer naglasiti da može biti signala koji su vezani za proces koji se korektno smatraju ulazima (u smislu da utiču na proces), mada nije moguće, ili dopustivo da se manipuliše sa njima. Ako su ovi signali mjerljivi, onda je još uvijek vrlo poželjno da se uključe u mjerljive ulazne signale i da se tretiraju kao takvi kada se grade modeli, mada, sa operative tačke gledišta, trebaju biti posmatrani kao (mjerljive) smetnje.

Kada je odlučeno gdje i šta mjeriti, slijedeće pitanje je kada mjeriti. Najčešće signali se uzorkuju koristeći konstantan interval sampliranja T , i treba izabrati iznos ovog vremena T .

Izbor ulaznih signala ima vrlo značajan uticaj na opservirane podatke. Ulazni signali određuju radnu tačku sistema, i koji dijelovi i modovi rada sistema se pobudjuju za vrijeme eksperimenta. Korisnikova sloboda u izboru ulaznih karakteri-

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

ka može značajno varirati sa aplikacijom. U procesnoj industriji, može biti nedozvoljeno da se manipulira sa sistemom u toku njegove kontinualne proizvodnje. Za druge sisteme, kao što su ekonomski i ekološki, nije moguće da se utiče na sistem u svrhe provodjenja identifikacionog eksperimenta. U laboratorijskim aplikacijama i za vrijeme faza razvoja nove opreme, izbor ulaza je najčešće ograničen sa ograničenjima raspoložive snage tj intenziteta ulaza.

Dva aspekta su pridružena sa izborom ulaza. Jedan aspekt je vezan za osobine drugog reda od u , kao što je spektar $\Phi_u(\omega)$ i kros spektar $\Phi_{ue}(\omega)$ između ulaza i šuma (ostvarenog putem izlazne povratne sprege). Drugi aspekt je "oblik" signala. Možemo raditi sa ulazima koji su suma sinusoida, ili filtrirani bijeli šum, ili pseudoslučajni signali, ili binarni signali (ako su samo dvije vrijednosti), itd.

Kao finalni izbor za identifikacioni eksperimentat, treba odrediti N , tj broj ulazno/izlaznih mjerenja koje treba prikupiti.

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Osnovni principi

Označimo sve dizajn varijable pridružene sa eksperimentom sa X . Asimptotske osobine rezultirajućih procjena se mogu opisati sa:

$$\theta^*(X) \quad (13.1)$$

tj. granična vrijednost kojoj konvergira $\hat{\theta}_N$ i sa:

$$P_\theta(X) \quad (13.2)$$

asimptotska kovarijantna matrica parametarske procjene. Ovi izrazi se mogu prevesti u druge veličine od interesa, kao napr. procjena prenosne funkcije.

Možemo reći slijedeće:

Model $\mathcal{M}(\theta^(X))$ je najbolja aproksimacija sistema za izabrani X .*

$\mathcal{M}(\theta^(X)) = S$ if \mathcal{M} je dovoljno veliko da sadrži S i X na takav način da nijedan drugi model nije ekvivalentan sistemu za to X . (13-4)*

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

a kovarijansna matrica je

$$P_{\theta}(X) \sim \lambda_0 \left[E \left(\frac{d}{d\theta} \hat{y}(t|\theta) \right) \left(\frac{d}{d\theta} \hat{y}(t|\theta) \right)^T \right]^{-1} \quad (13.5)$$

Bajes

Formulacija (13.3) sugerira da, kada bajes može biti značajan, pametno je da eksperiment liči na situaciju u kojoj model može biti korišten. Ovo naravno može biti teško postići, pošto je često cilj identifikacije da se nadju pogodni radni uslovi. Ako se sumnja da je stvarni sistem nelinearan, a traži se linearni model, tada rezultat (13.3) daje razumljivu preporuku da eksperiment treba biti realizovan oko nominalne radne tačke za postrojenje. Za linearni sistem, pitanje bajesovane distribucije i kako utiče na ulaz bit će kasnije razmatrano.

Informativni eksperimenti

Iskaz (13.4) se odnosi na koncept informativnih skupova podataka. Jasno, primarni cilj je da se dizajnira eksperiment koji će voditi ka podacima pomoću kojih ćemo biti u stanju da

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

razlikujemo različite modele u skupu modela.

Minimizacija varijansi

Kada je X izabrano tako da je granični model $\theta^*(X)$ prihvatljiv, tada postaje interesantno da se izaberu X tako da kovarijansna matrica $P_{\theta}(X)$ je minimizirana. Formalno, problem optimalnog dizajna ulaza se može iskazati kao:

$$\min_{X \in X} \alpha(P_{\theta}(X)) \quad (13.6)$$

gdje $\alpha(P)$ je skalarna mjera kako je velika matrica P , a X je skup dopustivih dizajna koji je podvrgnut ograničenjima koja mogu postaviti (13.3) i (13.4).

Uzmimo naprimjer da je:

$$\alpha(P) = \text{tr} C P$$

Izraz (13.5) ukazuje na moguće izbore za X :

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Mala varijansa u nekoj komponenti od \mathcal{V} rezultira ako je prediktor osjetljiv na tu komponentu. Zbog toga treba izabrati izlaze $y(t)$ i ulaze $u(t)$ tako da procjenjeni izlaz postaje osjetljiv u odnosu na parametre koji su važni za aplikaciju koja se razmatra.

Ovaj savjet može biti korišten kao opšta uputa za dizajn eksperimenta. On se može primjeniti na problem lokacije senzora, selekciju ulaznih varijabli kao i njihovih karakteristika kao i na druge aspekte dizajna.

Snaga validacije

Slijedeći ključni princip u dizajnu eksperimenta je da ulaz, tj. "signal probanja" (probing signal) treba biti bogat. On treba da pobudi sistem i prisili ga da pokaže svoje osobine, čak i one koje nam mogu biti nepoznate. Ova poželjna karakteristika može biti u konfliktu sa aspektima bajesa i varijanse. Naprimjer ako mi tražimo varijansno optimalni ulaz da bi identificirali sistem drugog reda, rješenje može biti signal koji se sastoji od dvije sinusoide. Takav signal neće nikad otkriti da li bi sistem mogao biti i višeg reda, tj. mi ne možemo³¹

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

obezvrijediti model sistema drugog reda. Slično, optimalni ulaz za linearni sistem može biti onaj koji prepostavlja samo dvije vrijednosti, i pomak između njih. Sa takvim ulazom, mi nećemo nikada biti u stanju da nadujemo da li postoji statička nelinearnost sa ulazne strane, pošto će ovo samo pomjeriti dva nivoa. Sve ovo ilustrira da ulaz mora imati mogućnost validacije (i invalidacije) da se pomoću njega mogu testirati moguće osobine od interesa za sistem.

Informativni eksperimenti

Primarni cilj je da se dizajniraju eksperimenti koji će nas odvesti do podataka pomoću kojih ćemo moći razlikovati različite modele u okviru izabranog skupa modela.

Eksperimenti u otvorenoj konturi

Posmatrajmo, još uvijek ne-specificirani skup modela sa jednim ulazom i izlazom (SISO):

$$\mathcal{M}^* = \{G(q, \theta), H(q, \theta) | \theta \in D_{\mathcal{M}}\} \quad (13.8)$$

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Predpostavimo da \mathcal{V}_1 i \mathcal{V}_2 korespondiraju različitim modelima u \mathcal{M}^* . Neka su $\varepsilon_i(t) = \varepsilon(u, \theta_i)$, $G_i(q) = G(q, \theta_i)$; $\Delta G(q) = G_2(q) - G_1(q)$ i H_i analogno. Tada:

$$\Delta \varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) = \frac{1}{H_1(q)} [\Delta G(q)u(t) + \Delta H(q)\varepsilon_2(t)]$$

sada:

$$\varepsilon_2(t) = \frac{1}{H_2(q)} [(G_0(q) - G_2(q))u(t) + H_0(q)e_0(t)]$$

gdje G_0 , H_0 su pravi opisi (8.7) sistema. Predpostavimo da se eksperiment provodi u otvorenoj konturi tako da su $\{u(t)\}$ i $\{e_0(t)\}$ nezavisne. Tada je:

$$\begin{aligned} \overline{E} [\Delta \varepsilon(t)]^2 = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|H_1(e^{i\omega})|^2} \left[\left| \Delta G(e^{i\omega}) + \frac{G_0(e^{i\omega}) - G_2(e^{i\omega})}{H_2(e^{i\omega})} \cdot \Delta H(e^{i\omega}) \right|^2 \Phi_{\varepsilon_2}(\omega) \right. \\ & \left. + |\Delta H(e^{i\omega})|^2 \cdot \left| \frac{H_0(e^{i\omega})}{H_2(e^{i\omega})} \right|^2 \lambda_0 \right] d\omega \end{aligned} \quad (13.9)$$

gdje je $\lambda_0 = \overline{E} e_0^2(t)$ u skladu sa standardnom pretpostavkom o invertibilnosti modela šuma, $|H_0(e^{i\omega})|^2 > 0, \forall \omega$. Predpostavimo sada

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

da podaci nisu dovoljno informativni u odnosu na \mathcal{M}^* tako da:

$$\overline{E} [\Delta \varepsilon(t)]^2 = 0 \quad (13.10)$$

mada $\Delta G(e^{i\omega})$ i $\Delta H(e^{i\omega})$ nisu obadvoje identično jednaki nuli. Jednačina (13.10) implicira da su obadva člana unutar uglastih zagrada u (13.9) su identično jednaki nuli, tako da:

$$\Delta H(e^{i\omega}) \equiv 0$$

što znači da prvi član poprima formu:

$$|\Delta G(e^{i\omega})|^2 \Phi_u(\omega) \equiv 0 \quad (13.11)$$

Ovo je krucijalni uslov na ulazni spektar otvorene konture $\Phi_u(\omega)$,

Ako (13.11) implicira da je $\Delta G(e^{i\omega}) \equiv 0$, tada slijedi da (13.10) implicira da su dva modela jednaka, i time da su podaci dovoljno informativni u odnosu na \mathcal{M}^* .

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Dizajn ulaza za eksperimente u otvorenoj konturi

Zahtjevi da podaci trebaju biti informativni znači da se kod rada u otvorenoj konturi ulaz se mora perzistentno pobudjivati, do izvjesnog reda, tj. da sadrži dovoljan broj različitih frekvencija. Ovo ostavlja značajan stepen slobode za stvarni izbor.

Za identifikaciju linearnih sistema, postoje tri osnovne činjenice koje utiču na ovaj izbor:

1. Asimptotske osobine procjena (bajes i varijansa) zavise samo od ulaznog spektra, ne i od stvarnog valnog oblika na ulazu
2. Ulaz mora imati ograničenu amplitudu: $\underline{u} \leq u(t) \leq \bar{u}$.
3. Periodični signali na ulazu mogu imati izvjesne prednosti.

Identifikacija u zatvorenoj konturi

Ponekad je potrebno provesti identifikacioni eksperiment sa zatvorenim povratnom spregom, tj. u zatvorenoj konturi.

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

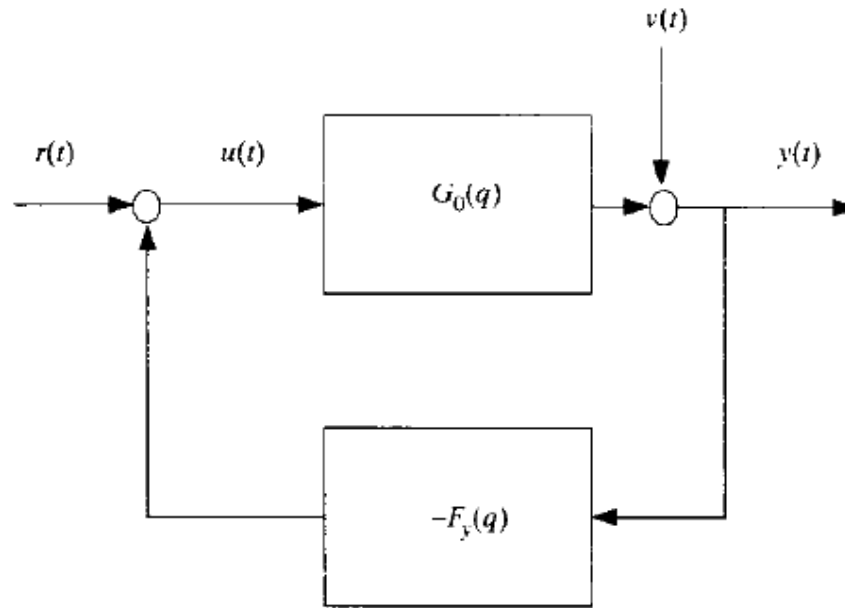
Razlog za ovo može biti zato što je objekat nestabilan u otvorenoj konturi, ili zato što zbog razloga kvaliteta upravljanja i vođenja procesa se ne može dozvoliti rad i provodjenje identifikacionih eksperimenata u otvorenoj konturi. Zato ćemo u nastavku ovog poglavlja analizirati mogućnosti identifikacije sa podacima iz zatvorenih kontura. U mnogim slučajevima neće biti potrebno da poznajemo mehanizam i strukturu povratne sprege, ali za neke od analitičkih pristupa i tretmana, mi ćemo prepostaviti slijedeći oblik linearne povratne sprege. Istinski (pravi) sistem je opisan sa:

$$y(t) = G_0(q)u(t) + v(t) = G_0(q)u(t) + H_0(q)e(t) \quad (13.40a)$$

Ovdje je $\{e(t)\}$ je bijeli šum sa varijansom λ_0 . Takodjer ćemo koristiti označavanje $v(t) = H_0(q)e(t)$. Regulator je prikazan blok shemom kao na slijedećoj slici.

$$u(t) = r(t) - F_y(q)y(t) \quad (13.40b)$$

13. DIZAJN EKSPERIMENTA



Blok dijagram tipičnog sistema sa povratnom spregom

U prethodnom izrazu $\{r(t)\}$ je referentni signal (tj filtrirana verzija zadate vrijednosti ili bilo kojeg vanjskog signala) koji je nezavistan od šuma $\{e(t)\}$. Model je :

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)e(t) \quad (13.40c)$$

Predpostavićemo da je zatvorena sprega dobro definisana u smislu da:

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

- Bilo $F_y(q)$ ili obadva člana $G(q, \vartheta)$ i $G_0(q)$ sadrže kašnjenje (13.40d)
- Sistem u zatvorenoj konturi je stabilan (13.40e)

Jednačine sistema sa povratnom spregom će sada biti:

$$y(t) = G_0(q)S_0(q)r(t) + S_0(q)v(t) \quad (13.41a)$$

$$u(t) = S_0(q)r(t) - F_y(q)S_0(q)v(t) \quad (13.41b)$$

gdje je $S(q)$ je funkcija osjetljivosti:

$$S_0(q) = \frac{1}{1 + F_y(q)G_0(q)} \quad (13.42)$$

U nastavku izvodjenja ćemo izostaviti argumente $\omega, q, e^{i\omega}$, i t kada god nema rizika od zabune oko izraza.

Ulazni spektar je:

$$\Phi_u = |S_0|^2\Phi_r + |F_y|^2|S_0|^2\Phi_v \quad (13.43)$$

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Ovdje su Φ_r i Φ_v spektri referentnog signala i šuma. Koristićemo slijedeće označavanje:

$$\Phi_u^r = |S_0|^2 \Phi_r, \quad \Phi_u^e = |F_y|^2 |S_0|^2 \Phi_v \quad (13.44)$$

da pokažemo dvije komponente ulaznog spektra, koje potiču od referentnog signala i šuma.

Neke dobre vijesti ovakve identifikacije

Većina analitičkih metoda koje su razvijene u ranijom poglavlju je razvijena pod pretpostavkom da se može primjeniti i na eksperimentalne podatke iz zatvorenih kontura regulacije.

Tako napr. metodi su razvijeni pod pretpostavkom da:

- podaci su informativni

- skup modela koji je izabran da opiše eksperimentalne podatke sadrži pravi (tj tačan model sistema)

- bez obzira da li su podaci $\{u,y\}$ prikupljeni u otvorenoj ili zatvorenoj konturi.

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Neki problemi sa identifikacijom u zatvorenoj konturi

Postoje izvjesni nedostaci koji se pojavljuju sa podacima iz zatvoreno sprežnih kontura:

- Eksperiment u zatvorenoj sprezi može biti nedovoljno informativan čak ako ulaz se perzistentno pobudjuje. Razlog može biti da je regulator suviše jednostavan. (vidjeti naredni primjer).
- Spektralna analiza direktno primjenjena će dati pogrešne rezultate.
$$Eu(t)v(t - \tau) = 0$$
- Korelaciona analiza, će dati bajesovane procjene impulsnog odziva pošto je pretpostavka narušena.
- Za podatke u otvorenoj konturi, modeli izlazne greške će dati konzistentne procjene G , čak ako dodatni šum nije bijeli.
- Metode podprostora stanja neće dati konzistentne procjene kada se primjene na podatke iz zatvorenih kontura.

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Prvi pomenuti nedostatak je da eksperiment u zatvorenoj sprezi može biti nedovoljno informativan čak ako ulaz se perzistentno pobudjuje. Razlog može biti da je regulator suviše jednostavan kao u ovom primjeru sa proporcionalnim feedbackom.

Primjer sa proporcionalnom povratnom spregom

Razmatrajmo strukturu modela prvog reda:

$$y(t) + ay(t - 1) = bu(t - 1) + e(t) \quad (13.45)$$

i pretpostavimo da se sistem kontroliše sa proporcionalnim regulatorom za vrijeme eksperimenta:

$$u(t) = -fy(t) \quad (13.46)$$

Ubacujući povratnu spregu u model imaćemo:

$$y(t) + (a + bf)y(t - 1) = e(t) \quad (13.47)$$

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

što je model sistema sa zatvorenom povratnom spregom. Odavde, zaključujemo da svi modeli (\hat{a}, \hat{b}) koji su podvrgnuti sa:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= a + \gamma f \\ \hat{b} &= b - \gamma\end{aligned}\tag{13.48}$$

gdje je γ arbitrarni skalar, daje isti ulazno/izlazni opis sistema kao i model (a, b) sa povratnom spregom (13.46). Kao posljedica toga, nemamo mogućnosti da napravimo razlike između ovih modela. Primjetimo također da ne pomaže ni to što znamo parametar regulatora f . Eksperimentalni uslov (13.46) stoga nije dovoljno informativan u odnosu na strukturu modela (13.45). Istina je, međutim da ulazni signal $u(t)$ je perzistentno pobudjivan pošto se on sastoji od filtriranog bijelog šuma. Perzistentnost pobude prema tome nije dovoljan uslov na ulazu kod eksperimenata sa zatvoreno sprežnim sistemima.

Ako je struktura modela (13.45) ograničena, naprimjer sa ograničenjem b da bude 1, tada:

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

$$y(t) + ay(t - 1) = u(t - 1) + e(t)$$

i jasno je da podaci koji su generisani sa (13.46) su dovoljno informativni da razlikuju izmedju vrijednosti α parametra.

Pristupi identifikaciji u zatvorenoj konturi

Direktno primjenjeni metod predikcije greške- primjenjen kao da povratna sprega i ne postoji- će raditi zadovoljavajuće i dati optimalnu tačnost ako stvarni sistem može biti opisan unutar izabrane strukture modela (i to obzirom i na model šuma i dinamički model). Ipak, zbog problema u identifikaciji zatvoreno sprežnih sistema, sugerisano je i nekoliko alternativnih metoda.

Može se napraviti razlika izmedju metoda koji :

1. Ne predpostavljaju nikakvo prethodno znanje o prirodi povratne sprege, i ne koriste r čak i ako je poznato.
2. Predpostavljaju da su signal r i regulator poznati (i tipično

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

su linearni (13.40b).

3. Prepostavljaju da je regulator nepoznat. Koristiti mjereno r da se zaključi o njegovoj vrijednosti, i koristiti procjenu regulatora da se dobiju podaci o sistemu.

Ako regulator zaista ima oblik (13.40b), nema mnogo razlike između (1), (2) i (3). Ova relacija bez šuma se može egzaktno odrediti na bazi kratkog zapisa podataka, i r također nema neku dopunsku informaciju o sistemu, ako je u mjerljivo. Problem u industrijskoj praksi je da regulator nema ovako jednostavan linearan oblik, različiti limiteri, anti-windup funkcije i druge nelinearnosti će učiniti da ulaz odstupa od (13.40b), čak ako i parametri regulatora (tj. PID koeficijenti) su poznati. Ovo značajno diskvalificira drugi pristup. Metodi će prema tome biti razvrstani u jednu od slijedećih grupa:

1. **Direktni pristup:** Primjeniti osnovni predikcioni metod (7.12) na direktan način; koristiti izlaz y procesa i ulaz u na isti način kao i kod otvorene konture, ignorišući bilo kakav feedback i ne koristeći referentni signal r .

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

2. Indirektni pristup: Identificirati sistem sa zatvorenom povratnom spregom iz referentnog ulaza r na izlaz y , i restaurirati iz toga sistem u otvorenoj konturi, koristeći podatke o poznatom regulatoru.

3. Objedinjeni ulazno/izlazni pristup: Posmatrajmo y i u kao izlaze iz sistema vodjenog sa r (ako se mjeri) i šumom. Restaurirati znanje o sistemu i o regulatoru iz ovog objedinjenog modela.

Direktna identifikacija

Direktni identifikacioni pristup treba biti posmatran kao prirodan pristup analizi podataka u zatvorenoj konturi. Glavni razlozi za ovo su:

- Radi bez obzira na kompleksnost regulatora, i ne zahtjeva znanje o karakteru povratne sprege.
- Ne zahtjeva se nikakav poseban algoritam ili softver.
- Konzistentnost i optimalna tačnost su dobijene ako struktura modela sadrži stvarni sistem (uključujući i osobine šuma).

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

- Sa nestabilnim sistemima se može raditi bez problema, sve dok je zatvoreno sprežni sistem stabilan i prediktor je stabilan. Ovo znači da bilo koji nestabilni polovi od G moraju biti djeljeni sa H , kao u ARX, ARMAX i u modelima prostora stanja.

Jedina mana direktnog pristupa je da će trebati dobre modele šuma. U radu u otvorenoj konturi, mi možemo koristiti modele izlazne greške (i druge modele sa fiksnim ili nezavisno parametriziranim modelima šuma) da se dobiju konzistentne procjene (ali ne i optimalna tačnost) od G , čak i kada model šuma H nije dovoljno fleksibilan.

Ovo se pokazuje kada jednostavni model se traži koji može aproksimirati dinamiku sistema u predspecificiranoj frekventnoj normi. U otvorenoj konturi mi to možemo uraditi sa metodom izlazne greške i fiksirati predfilter/šum model koji se uparuje sa specifikacijama. Za podatke u zatvorenim konturama, model predfilter/šum koji značajno odstupa od stvarnih karakteristika će uvesti bajes.

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

• Sve ovo znači da mi ne možemo rješavati problem aproksimativnog modela sa punom kontrolom u slučaju sistema sa zatvorenom povratnom spregom. Medjutim, konzistentnost i optimalna tačnost je garantirana, isto kao i u slučaju otvorene konture, ako je stvarni sistem sadržan u strukturi modela.

Prirodno rješenje za ovo bi bilo da se prvo izgradi model višeg reda G koristeći direktni pristup, sa malim bajesom, a zatim reducirati ovaj model na niži red sa odgovarajućim težinskim koeficijentima za frekvencije. Mada mnoge redukcione šeme modela postoje, bazirane na balansiranim realizacijama i sličnim principima, jedan identifikaciono bazirani način da se ovo postigne je slijedeći:

Prvo simularati model sa ulazom u sa periodnim spektrom, i na taj način generišući izlaz bez šuma $\hat{y} = \hat{G}u$. Zatim, treba podvrgnuti ulazno/izlazne podatke od \hat{y} i u , na model izlazne greške željene kompleksnosti. Ovo daje model:

$$G^* = \arg \min_{\hat{G}} \int \left| \hat{G}(e^{j\omega}) - \hat{G}(e^{j\omega}) \right|^2 \Phi_u(\omega) d\omega \quad (13.56)$$

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Primjetimo ipak da redukcija nestabilnih modela može sadržavati niz poteškoća.

Indirektna identifikacija

Zatvoreno sprežni sistem dat sa (13.40b) je:

$$\begin{aligned} y(t) &= G_{cl}(q)r(t) + v_{cl}(t) \\ &= \frac{G_0(q)}{1 + F_y(q)G_0(q)}r(t) + \frac{1}{1 + F_y(q)G_0(q)}v(t) \end{aligned} \quad (13.57)$$

Indirektni pristup znači da G_{cl} se procjenjuje iz mirenih y i r , dajući \hat{G}_{cl} , i zatim procjena prenosne funkcije \hat{G} u otvorenoj konturi se restaurira iz jednačine:

$$\hat{G}_{cl} = \frac{\hat{G}}{1 + \hat{G}F_y} \quad (13.58)$$

Prednost indirektnog pristupa je da identifikacioni metod se može primjeniti na (13.57) da se procjeni \hat{G}_{cl} . Dakle, metode kao spektralna analiza, instrumentalne varijable, metodi podprostora, koji mogu imati problema sa podacima iz zatvorenog

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

rene konture se takodjer mogu koristiti.

Glavni nedostatak kod indirektno identifikacije je da bilo koja greška u F_y uključujući i devijacije od linearnog regulatora, (napr. zbog ulaznih zasićenja ili mjera anti-windupa) će biti direktno prenesena u \hat{G} .

Za metode kao što je metod predikcije greške, koji dozvoljava arbitrarnu parametrizaciju $G_{cl}(q, \theta)$, prirodno je da se dozvoli da parametri θ budu u relaciji sa osobinama sistema u otvorenoj konturi G , tako da:

$$G_{cl}(q, \theta) = \frac{G(q, \theta)}{1 + F_y(q)G(q, \theta)} \quad (13.59)$$

Ovo će učiniti da je zadatak restauracije sistema u otvorenoj konturi iz zatvoreno sprežnog sistema direktniji i lakši.

Sada ćemo pretpostaviti da je G_{cl} procjenjeno koristeći metod predikcije greške sa fiksnim šumom u model/predfilter bloku H_*

$$y(t) = G_{cl}(q, \theta)r(t) + H_*(q)e(t) \quad (13.60) \quad 49$$

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Parametrizacija može biti arbitrarna. Vrlo važno je uočiti da sve dok parametrizacija opisuje isti skup od G , rezultirajuća prenosna funkcija $\hat{G}(q, \hat{\theta}_N)$ će biti ista, bez obzira na parametrizaciju.

Izbor parametrizacije može biti važan za numeričke i algebarske probleme, ali ne utiče na statističke osobine procjenjene prenosne funkcije.

Diskutujmo sada aspekte bajesa i varijanse od \hat{G} procjenjeno iz (13.60) i (13.59). Počecemo sa varijansom. U skladu sa rezultatima za otvorenu konturu (9.63), asimptotska varijansa od $\hat{G}_{cl,N}$ će biti:

$$\text{Cov } \hat{G}_{cl,N} = \frac{n}{N} \frac{\Phi_{v,cl}(\omega)}{\Phi_r(\omega)} = \frac{n}{N} \frac{|S_0|^2 \Phi_v}{\Phi_r} \quad (13.61)$$

bez obzira na model šuma H_* . Ovdje $\Phi_{v,cl}$ je spektar aditivnog šuma v_{cl} u zatvoreno sprežnom sistemu (13.57), što je jednako aditivnom šumu otvorene konture, filtriranom kroz stvarnu funkciju osjetljivosti. Da bi transformisali ovaj rezultat u varijansu od prenosne funkcije otvorenog sistema, ⁵⁰

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

koristimo Gaussovu aproksimacionu formulu (vidjeti (9.56)):

$$\text{Cov } \hat{G} = \frac{dG}{dG_{cl}} \text{Cov } \hat{G}_{cl} \left(\frac{dG}{dG_{cl}} \right)^* \quad (13.62)$$

lako je verificirati da:

$$\frac{dG}{dG_{cl}} = \frac{1}{|S_0|^2}, \quad \text{so} \quad \text{Cov } \hat{G}_N = \frac{n}{N} \frac{\Phi_r}{|S_0|^2 \Phi_r} = \frac{n}{N} \frac{\Phi_r}{\Phi_r}$$

što nije iznenadjujuće, je jednako onom što je dobijeno direktnim metodom, tj. (13.55).

Za bajes, znamo iz (8.71) da procjena ograničenja ϑ^* je data sa (gdje G_ϑ je skraćeni način pisanja za $G(e^{i\omega}, \theta)$):

$$\begin{aligned} \theta^* &= \arg \min_{\theta} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{G_0}{1 + F_y G_0} - \frac{G_\theta}{1 + F_y G_\theta} \right|^2 \frac{\Phi_r}{|H_*|^2} d\omega \\ &= \arg \min_{\theta} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{G_0 - G_\theta}{1 + F_y G_\theta} \right|^2 \frac{|S_0|^2 \Phi_r}{|H_*|^2} d\omega \end{aligned}$$

Sada, ovo nije jasna minimizacija distance $G_0 - G_\theta$. Procjena će biti kompromis izmedju toga da se napravi G_ϑ blisko G_0 i

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

i da napravimo $1/(1 + F_y G_{cl})$ (model funkcije osjetljivosti) malim. Dakle bit će neko malo “bajes navlačenje” prema prenosnim funkcijama koje daju malu osjetljivost za dati regulator, ali za razliku od (13.53) nije lako kvantificirati ovu bajes komponentu. Međutim, ako stvarni sistem se može opisati unutar ovog skupa modela, ovo će uvijek biti minimizirajući model, tako da nema bajesa u ovom slučaju.

Parametrizacija

Gornji rezultati su nezavisni od toga kako je parametriziran sistem sa zatvorenom konturom.

Indirektna identifikacija sa nelinearnim, poznatim regulatorom

Indirektna tehnika se može također primjeniti kada je regulator nelinearan, ali sa značajno više rada: moraće se izračunati izlaz iz modela $\hat{y}(t|\theta) = f(\theta, \mathcal{R}, r^t)$ kao funkcija od dinamičkih parametara θ otvorenog sistema, poznatog regulatora \mathcal{R} , i prošlih vrijednosti referentnog signala r^t , i na taj način formirati kriterij izlazne greške.

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Objedinjena ulazno/izlazna identifikacija

Predpostavimo da postoji nemjerljivi signal w u regulatoru osim vrijednosti r :

$$u(t) = r(t) + w(t) - F_y(q)y(t) \quad (13.63)$$

Predpostavljamo da je w nezavisno od r i v . Zatvorena kontura od v, w i r se može pisati slično (13.41) kao:

$$y = G_0 S_0 r + S_0 v + G_0 S_0 w = G_{cl} r + v_1 \quad (13.64a)$$

$$u = S_0 r - F_y S_0 v + S_0 w = G_{ru} r + v_2 \quad (13.64b)$$

Identifikacioni metodi koji koriste modele o tome kako su y i u generisani se nazivaju objedinjene ulazno/izlazne tehnike.

Ovo otvara niz varijanti koje pripadaju jednoj od slijedećih grupa:

1. Dozvoljava korelaciju između v_1 i v_2 i radi sa modelom :

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = G r + H v \quad (13.65)$$

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

2. Zanemaruje korelaciju izmedju izvora šuma, i tretira (13.64a) i (13.64b) kao odvojene modele.

Prvi pristup radi takodjer kada nema mjerljivog referentnog signala r . Može se pokazati da ovaj pristup u suštini je ekvivalentan direktnom pristupu procjene G u (13.40a) i F_y u (13.63).

Drugi pristup ima nekoliko varijanti, ali one sve imaju zajedničko to da je dinamika sistema procjenjena sa:

$$\hat{G} = \frac{\hat{G}_{cl}}{\hat{G}_{ru}} \quad (13.66)$$

gdje su \hat{G}_{cl} i \hat{G}_{ru} procjenjene iz dva otvoreno sprežna sistema (13.64). Iz ovog izraza vidimo da:

$$G_{cl} = G_0 G_{ru} \quad (13.67)$$

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

dakle, poništenja će se desiti kada je (13.66) formirano. Ovo se pak neće desiti za procjenjene modele, zbog modelnih nesigurnosti, tako da \hat{G} će biti nepotrebno visokog reda. Zbog toga je prirodno da prisilimo (13.67) u modelnu parametrizaciju:

$$G_{cl}(q, \Theta) = G(q, \theta)S(q, \eta), \quad G_{ru}(q, \Theta) = S(q, \eta), \quad \Theta = \begin{bmatrix} \theta \\ \eta \end{bmatrix} \quad (13.68)$$

Ako pretpostavimo da su v_1 i v_2 nezavisni bijeli šumovi sa varijansama 1 i $1/\alpha$, dobijemo slijedeće identifikacione kriterije za (13.64),(13.68):

$$V(\Theta) = \sum |y(t) - G(q, \theta)S(q, \eta)r(t)|^2 + \sum \alpha |u(t) - S(q, \eta)(t)|^2 \quad (13.69)$$

Još uvijek ostaje pitanje kako da parametriziramo G i S.

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Dvostepeni metod

Okrenućemo se slučaju kada $\alpha \rightarrow \infty$ u (13.69). Ako je α vrlo veliko, drugi sumand će dominirati nad kriterijem kada je η određeno da daje \hat{S} . Pošto v ulazi samo u prvi sumand, i S je dato iz drugog sumanda, ova procedura je ista kao prva procjena \hat{S} u (13.46b), i onda koristimo:

$$\hat{u}(t) = S(q, \hat{\eta})r(t) \quad (13.70)$$

u

$$y(t) = G(q, \theta)\hat{u}(t) + v_1(t) \quad (13.71)$$

da procjenimo G . Ovo je dakle dvostepeni metod.

Sumarne karakteristike metoda identifikacije u zatvorenoj konturi

Ove karakteristike su:

- Osnovni problem sa podacima u zatvorenoj konturi je da tipično imaju manje informacija o otvoreno sprežnom sistemu - jedna važna namjena zatvorene povratne sprege da učini zatvoreno sprežni sistem manje osjetljivim na promjene u

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

otvoreno sprežnom sistemu.

- Metodi predikcije greške, primjenjeni na direktan način, sa modelom šuma koji može opisati stvarne osobine šuma, još uvijek daje konzistentne procjene i optimalnu tačnost. Nije potrebno znanje o karakteru feedback-a. Ovaj metod treba smatrati kao primarni koji se koristi.
- Nekoliko metoda koji daju konzistentne procjene za podatke u otvorenoj konturi, mogu biti neuspješne kada se primjene na direktan način na identifikaciju u zatvorenoj konturi. Ovo uključuje spektralnu i korelacionu analizu, metod instrumentalne varijable, metode podprostora i metode izlazne greške sa nekorektnim modelom šuma.
- Ako je mehanizam djelovanja regulatora korektno poznat, indirektna identifikacija se može primjeniti. Njena osnovna prednost je da dinamički model G se može korektno procjeniti bez procjenjivanja bilo kakvog modela šuma, čak i kada je G_0 nestabilno. Međutim, bilo koja greška u pretpostavljenom regulatoru će direktno prouzrokovati odgovarajuću grešku u procjeni G . Pošto većina regulatora sadrži nelinearnosti, ovo⁵⁷

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

znači da indirektna identifikacija ima nedostataka.

- Objedinjeni ulazno/izlazni pristup u dvostepenoj varijanti nudi prednost da aproksimacija modela u poznatoj i izabranoj od strane korisnika normi otežavanja frekvencija, se može postići (vidjeti (13.72)), po cijenu veće varijanse.

Izbor intervala sampliranja i predsamplirajućih filtera

Procedura sampliranja podataka koji se nalaze u sistemu je inherentna svakom računarski baziranom sistemu za prikupljanje podataka. Neizbježno je da sampliranje samo po sebi vodi gubitku informacija, ali je važno izabrati trenutke sampliranja tako da su ovi gubici zanemarljivi. Predpostavićemo da se sampliranje izvršava u jednakim vremenskim intervalima, i diskutovaćemo izbor intervala sampliranja T .

Alijasiranje

Gubitak informacija uzrokovan sampliranjem se najbolje opisuje u frekventnom domenu. Predpostavimo da je signal $s(t)$

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

uzorkovan sa intervalom T :

$$s_k = s(kT), \quad k = 1, 2, \dots$$

Označimo sa $\omega_s = 2\pi/T$ frekvenciju sampliranja, a sa $\omega_N = \omega_s/2$ Nyquist-ovu frekvenciju. Sada je dobro poznato da sinusoida sa frekvencijom iznad ω_N , kada se samplira, se ne može razlikovati od one unutar intervala $[-\omega_N, \omega_N]$:

Sa $|\omega| > \omega_N$ postoji $\bar{\omega}$: $-\omega_N \leq \bar{\omega} \leq \omega_N$ tako da:

$$\begin{aligned} \cos \omega kT &= \cos \bar{\omega} kT \\ \sin \omega kT &= \sin \bar{\omega} kT \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots \quad (13.84)$$

Ovo slijedi iz jednostavnih manipulacija sa trigonometrijskim formulama. Kao posljedica ovoga, dio spektra signala koji korespondira frekvencijama iznad ω_N će biti interpretiran kao doprinosi od nižih frekvencija. Ovo je fenomen *alijasiranja*, frekvencije se pojavljuju pod udvojenim imenima. To takodjer znači da spektar uzorkovanog signala će biti superpozicija od

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

različitih dijelova originalnog spektra:

$$\Phi_s^{(T)}(\omega) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Phi_s^c(\omega + r\omega_s) \quad (13.85)$$

Ovdje, Φ_s^c je spektar spektra kontinualnog vremena, definisan sa (13.36) i $\Phi_s^{(T)}(\omega)$ je spektar sampliranog signala:

$$R_T(\ell T) = \overline{E s_k s_{k+\ell}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E s(kT) s(kT + \ell T) \quad (13.86)$$

$$\Phi_s^{(T)}(\omega) = T \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} R_T(\ell T) e^{-i\omega \ell T}$$

Efekat (13.85) se često naziva “presavijanje” (folding): originalni spektar je “presavijen” i dodat da se dobije samplirani spektar.

Antialijasing presamplirajući filteri

Informacija o frekvencijama iznad Nyquistove je dakle izgubljena sa sampliranjem. Važno je da se stvari ne pogorša-
√60

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

vaju time što bi presavijanje deformisalo interesantni dio spektra ispod Nyquistove frekvencije. Ovo se postiže time da se koristi predsamplirajući filter $\kappa(p)$

$$s_F(t) = \kappa(p)s(t) \quad (13.87)$$

(p je ovdje operator diferenciranja). Spektar filtriranog signala $s_F(t)$ će sada biti:

$$\Phi_{s_F}^c(\omega) = |\kappa(i\omega)|^2 \Phi_s^c(\omega) \quad (13.88)$$

Idealno, $\kappa(i\omega)$ treba imati karakteristiku takvu da je:

$$\begin{aligned} |\kappa(i\omega)| &= 1, & |\omega| &\leq \omega_N \\ |\kappa(i\omega)| &= 0, & |\omega| &> \omega_N \end{aligned} \quad (13.89)$$

Ovo se može realizirati samo aproksimativno. U idealnom slučaju (13.89), ćemo imati:

$$\Phi_{s_F}^c(\omega) = \begin{cases} \Phi_s^c(\omega), & \omega \leq |\omega_N| \\ 0, & \omega > |\omega_N| \end{cases}$$

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

što znači da samplirani signal:

$$s_k^F = s_F(kT)$$

će imati spektar u skladu sa (13.85):

$$\Phi_{s_F}^{(T)}(\omega) = \Phi_s^c(\omega), \quad -\omega_N \leq \omega \leq \omega_N \quad (13.90)$$

Sa filterom (13.87) i (13.89) ćemo postići samplirani spektar bez efekata alijasiranja. Zbog toga, ovaj filter se naziva *antialijasirajući filter*. Takav filter treba uvijek biti primjenjen prije sampliranja ako sumnjamo da signal ima zanemarljiv sadržaj energije iznad Nyquistove frekvencije.

Efekti redukcije šuma antialijasirajućih filtera

Tipična situacija je da se signal sastoji od korisnog dijela i dijela smetnje, i da je spektar smetnji šireg opsega nego od signala. Tada interval sampliranja se obično bira tako da većina spektra korisnog dijela je ispod ω_n . Antialijasirajući filter tada odsjeca doprinos šuma visoke frekvencije. Predpostavimo da imamo :

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

$$s(t) = m(t) + v(t)$$

gdje $m(t)$ je korisni signal a $v(t)$ je šum. Neka $\Phi_v^v(\omega)$ je spektar od $v(t)$. Samplirani, predfiltrirani signal je sada:

$$s_k^F = m_k^F + v_k^F, \quad s_k^F = s_F(kT)$$

gdje je varijansa šuma:

$$E(v_k^F)^2 = \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \Phi_{v_F}^{(T)}(\omega) d\omega = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \Phi_v^c(\omega + r\omega_s) d\omega$$

Iz ovog izraza vidimo kako efekti šuma iz visokih frekvencija se presavijaju u region $[-\omega_N, \omega_N]$ i time doprinose snazi šuma.

Eliminiranjem visokofrekventnog šuma pomoću antialiasirajućeg filtera (13.89), varijansa v_k^F se reducira za iznos:

$$\sum_{r \neq 0} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \Phi_v^c(\omega + r\omega_s) d\omega = \int_{|\omega| > \omega_N} \Phi_v^c(\omega) d\omega$$

u poredjenju sa onim da nemamo predaliasirajućeg filtera. Ovo je značajno smanjenje šuma ukoliko spektar šuma ima ⁶³

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

nivo energije iznad Nyquistove frekvencije.

Antialiasirajući filteri za vrijeme akvizicije podataka

Predpostavimo prvo da sistem je bez uzorkovanja signala tj. da je riječ o kontinualnom sistemu upravljanja. Ako je ulaz u sistem ograničenog opsega i nema energije iznad ω_B . to znači da sva korisna informacija o izlazu takodjer leži ispod ω_B ., pod pretpostavkom da je proces linearan. Mi bi tada mogli promjeniti antialiasirajući filter sa frekvencijom odsjecanja ω_B . i samplirati sa $T = \pi/\omega_B$ bez gubitka informacije. Ako ulaz nije ograničenog opsega, antialiasirajući filter će uništiti korisnu informaciju u isto vrijeme kada je reduciran i šum. Ako je T izabrano tako da Nyquistova frekvencija ($=$ frekvenciji odsjecanja filtera), je iznad propusnog opsega sistema, gubitak korisne informacije je beznačajan. Primjetimo da u ovom slučaju antialiasirajući predsamplirajući filter treba biti primjenjen i na ulazni signal.

Posmatrajmo sada slučaj da je ulaz konstantan po segmentima, i da se ne koristi predsamplirajući filter u sekvenci. Stepnaste promjene u procesnom ulazu sadrže ⁶⁴

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

visoke frekvencije koje mogu putovati kroz proces do izlaza. Antialiasirajući filter primjenjen na izlazu mogao bi deformirati korisnu informaciju. Postoje tri načina da se tretira ovaj problem:

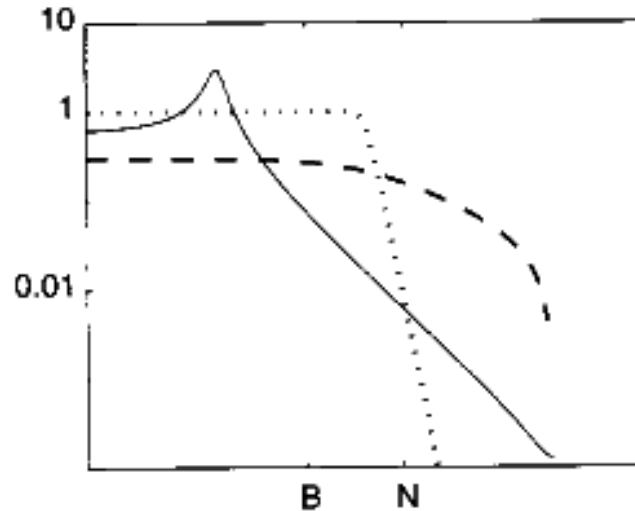
1. Dovoljno brzo samplirati tako da je proces dobro prigušen iznad Nyquistove frekvencije. Tada visokofrekventne komponente u izlazu koje dolaze sa ulaza su beznačajne.

2. Posmatrati antialiasirajući izlazni filter kao dio procesa i modelirati sistem od ulaza do filtriranog izlaza (ovo može dovesti do povećanja reda modela)

3. Pošto je antialiasirajući filter poznat, uključiti ga kao poznati dio modela, i dozvoliti da procjenjeni izlaz prođe kroz filter prije nego što se koristi u identifikacionom kriteriju (ovaj pristup je ilustriran u (13.95) i (13.96)).

Riješenje pod 1. je najprirodnije; i konceptualno je prikazano na slijedećoj slici.

13. DIZAJN EKSPERIMENTA



Sampliranje prikazano u frekventnom domenu; Puna linija: frekventna karakteristika procesa, crtkana linija: spektar šuma, tačkasta linija: frekventna karakteristika antialijasirajućeg filtera. N: Nyquistova frekvencija, B – bandwidth (prop- opseg)

Neki opšti aspekti izbora T i N

Ako je ukupno vrijeme eksperimenta $0 \leq t \leq T_N$ limitirano, ali je prikupljanje podataka unutar ovog vremena bez troškova, onda je zasigurno prednost da, sa informacione tačke gledišta, se samplira sa što je moguće većom brzinom. Sporije sampliranje vodi ka skupovima podataka koji su podskupovi od nekog maksimalno mogućeg, i time manje informativni. Troškovna efektivnost novih informacija će tipično opadati kako

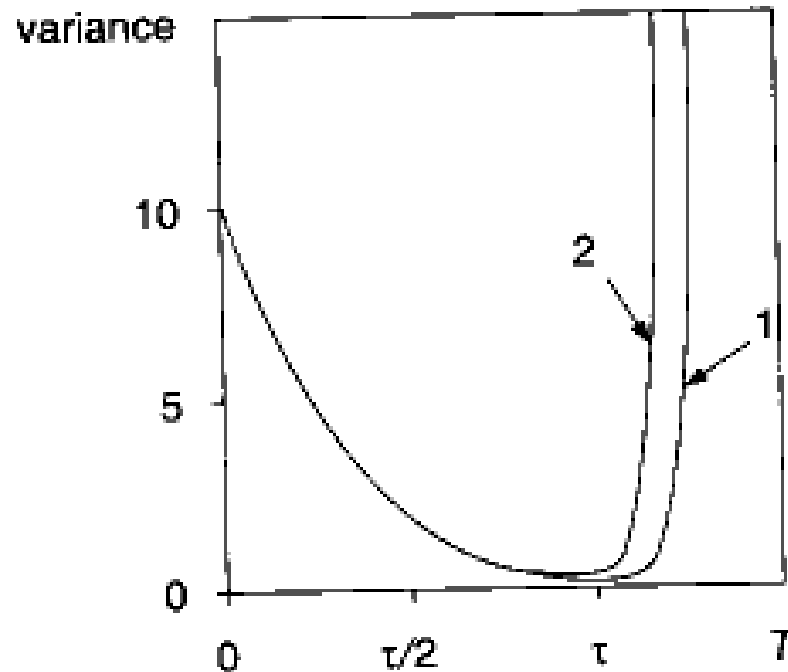
13. DIZAJN EKSPERIMENTA

brže i brže sampliramo (vidjeti narednu sliku). U ovom idealiziranom slučaju, gdje je dodavanje novih tačaka podataka bez troška, postoje samo dva aspekta koja nas mogu spriječiti da ne sampliramo sa najvećom mogućom brzinom koja je tehnički moguća; Jedan je da gradnja samplovanih modela sa vrlo malim intervalom sampliranja u poredjenju sa prirodnim vremenskim konstantama je numerički osjetljiva procedura (svi se polovi grupišu oko tačke 1). Drugi razlog je da uklapanje (fitovanje) modela može biti koncentrisano na visokofrekventni opseg. Ovaj drugi problem treba biti riješavan sa prefiltriranjem podataka da bi se preraspodjelo bajes. Prvi problem bi se trebao rješavati sa uklapanjem kontinualnog modela direktno sa brzo samplirajućim podacima sa modelom tipa (2.23).

Druga idealizovana situacija je da je vrijeme eksperimenta $0 \leq t \leq T_N$ kao takvo besplatno, i sav trošak je pridružen sa prikupljanjem i obradom podataka. U tom slučaju mi bi se mogli odlučiti za napr. prikupljanje N podataka i izabrati T (i time $T_N = N * T$) tako da skup podataka postane što je moguće više informativan. T koje je mnogo veće nego interesantne

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

vremenske konstante sistema, bi onda dalo podatke sa malo informacija o dinamici. Malo T , sa druge strane, ne bi dozvolilo mnogo smanjenje šuma, i podaci bi zbog toga mogli biti manje informativni. Dobar izbor T treba biti dakle kompromis izmedju smanjenja šuma, i relevantnosti za dinamiku.



Varijansa od \hat{a}_N crtana u funkciji intervala sampliranja T ($w_0 = 1/\tau$); 1. izraz (13.99); 2. izraz (13.96)

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Ako model treba biti korišten za svrhe upravljanja, onda treba uzeti u obzir i neke druge aspekte. Interval sampliranja za koji gradimo model treba biti isti kao i za kontrolnu aplikaciju (izuzev ako hoćemo da ga izračunavamo od jednog do drugog intervala sampliranja). Model sa brzim sampliranjem će često biti neminimalno fazni, a sistem sa mrtvom zonom, može biti modeliran sa kašnjenjem mnogo perioda sampliranja. Takvi efekti mogu prouzrokovati probleme za dizajn sistema upravljanja i zbog toga će uticati na izbor T.

Za izbor N, korisno je imati u vidu asimptotski rezultat (9.92). On opisuje koliko mali red modela treba biti u odnosu na veličinu broja uzoraka, da bi se postigla određena tačnost, za dati dizajn i spektar šuma.

Razmatranja bajesa

Poznato je da uklapanje (fit) između prenosne funkcije modela i stvarne, je zavisno od kvadratne norme:

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |G_0(e^{i\omega T}) - G(e^{i\omega T}, \theta)|^2 Q(\omega, \theta) d\omega \quad (13.91)$$

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Ovdje $Q(\omega, \theta)$ je filtrirani ulazni spekatar podijeljen sa spektrom šuma:

$$Q(\omega, \theta) = \frac{\Phi_u(\omega)}{|H(e^{i\omega T}, \theta)|^2}$$

Kako T teži ka nuli, frekventni opseg nad kojim uklapanje je ostvareno u (13.91) se povećava. Normalno, prirodna dinamika sistema i modela su takve da $G_0(e^{i\omega T}) - G(e^{i\omega T}, \theta)$ je dobro prigušeno za visoke frekvencije tako da doprinos od većih vrijednosti ω u (13.91) će biti zanemarljiv čak ako je ulaz širokopojasni. Jedan važan izuzetak je kada je model šuma kuplovan s dinamikom, kao kod ARX strukture (4.9), gdje $H(e^{i\omega T}) = 1/A(e^{i\omega T})$. Tada proizvod:

$$\frac{|G_0(e^{i\omega T}) - G(e^{i\omega T}, \theta)|^2}{|H(e^{i\omega T}, \theta)|^2}$$

ne teži ka nuli kako ω se povećava u visoke frekvencije da bi se uklopilo u (13.91), dok T opada. Efekti mogu biti smanjeni sa odgovarajućim prefiltriranjem. U svakom slučaju, je važno da se ima u vidu uticaj T na raspodjelu bajesa.

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Razmatranja varijanse

Varijansa procjenjenog parametra bazirana na datom broju podataka će zavisiti od prosječne informacije po uzorku. Ovo je kompromis između smanjenja šuma kojeg nudi sporije sampliranje i male informativnosti o dinamici koju sporije uzorkovani podaci sadržavaju. Da bi ukazali na ovaj kompromis, razmotrimo jednostavan primjer:

Primjer: Optimalno sampliranje

Razmotrimo kontinualni sistem:

$$y(t) = \frac{1}{1 + p\tau} u(t) + v(t)$$

ili:

$$\tau \dot{x}(t) + x(t) = u(t)$$

$$y(t) = x(t) + v(t)$$

(13.92)

gdje $v(t)$ je šum širokog opsega (= "skoro bijelom šumu"), sa varijansom λ / T_0 , gdje $1/T_0$ je propusni opseg (tj. T_0 je najmanji interval sampliranja pri kojem je samplirana verzija od $v(t)$ istinski bijela). Kao jednostavan predsamplirajući filter, mi ćemo koristiti integrator:

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

$$y_k = \bar{y}(kT) = \frac{1}{T} \int_{t=(k-1)T}^{kT} y(t) dt = \bar{x}(kT) + v_T(kT) \quad (13.93)$$

Ovdje $\bar{x}(kT)$ je srednja vrijednost korisnog signala $x(t)$ nad intervalom sampliranja i $\{v_T(kT)\}$ je sekvenca nezavisnih slučajnih varijabli sa varijansom λ / T (ako je $T > T_0$). Mi ćemo koristiti skup modela izlazne greške:

$$x(kT + T) = e^{-aT} x(kT) + (1 - e^{-aT}) u(kT) \quad (13.94a)$$

$$\hat{y}(kT + T | kT, a) = x(kT + T) = \frac{q(1 - e^{-aT})}{q - e^{-aT}} u(kT) \quad (13.94b)$$

Ovdje parametar modela a korespondira sa $1/\tau$ sa τ kao u (13.92). Mi ćemo uzeti da je ulazni signal sinusoida (segmentno konstantna) sa frekvencijom ω_0 :

$$u(kT) = \alpha \cdot \cos(\omega_0 kT)$$

Kada izračunavamo prediktor (13.94), ignorišemo predsamplirajući filter, koji može biti razuman kada je T malo. Da dozvolimo za korektan tretman i za veće vrijednosti T , mogli bi uzeti predsamplirajući filter (13.93) u obzir i pustiti da

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

procjena bude:

$$\frac{d}{dt}x(t, a) = ax(t, a) + au(t) \quad (13.95a)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_T(kT + T|kT, a) &= \frac{1}{T} \int_{t=kT}^{(k+1)T} x(t, a) dt \\ &= \frac{\beta q - e^{-aT} [1 - (1/aT)(1 - e^{-aT})]}{q - e^{-aT}} u(kT) \end{aligned} \quad (13.95b)$$

$$\beta = \left(1 - \frac{1}{aT}(1 - e^{-aT}) + \frac{1}{aT}(1 - e^{-aT})^2 \right) \quad (13.96)$$

(Primjetimo da je drugi član u brojniku $\approx aT/2$ za malo T).
Asimptotska varijansa od \hat{a}_N je data sa :

$$E(\hat{a}_N - 1/\tau)^2 \sim \frac{1}{N} \frac{\text{Var } \bar{v}_T(t)}{\bar{E}(\psi_T(t))^2} \quad (13.97)$$

gdje:

$$\text{Var } \bar{v}_T(t) = \frac{\lambda}{T} \quad \text{and} \quad \psi_T(t) = \frac{d}{da} \hat{y}_T(kT + T|kT, a)|_{a=(1/\tau)}$$

Za pojednostavljeni izraz (13.94)

imamo:

$$\psi_T(t) = \frac{T e^{-T/\tau} (q - 1)}{(q - e^{-T/\tau})^2} \alpha \cos \omega_0 t$$

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

i

$$\overline{E}(\psi_T(t))^2 = \alpha^2 \frac{T^2 e^{-2T/\tau} (2 - 2 \cos \omega_0 T)}{[1 - 2e^{-T/\tau} \cos \omega_0 T + e^{-2T/\tau}]^2} \quad (13.98)$$

Mi dakle imamo

$$\text{Var } \hat{a}_N \sim \frac{\lambda}{NT \cdot \overline{E}(\psi_T(t))^2} \quad (13.99)$$

Ovaj izraz teži ka beskonačnosti kao

$$\frac{1}{T^3} e^{2T/\tau}$$

dok T teži ka beskonačnosti, ovo je efekat loše informacije o τ sa sporim sampliranjem. Takodjer neke kalkulacije otkrivaju da teži ka beskonačnosti kao $1/T$ kako T teži ka nuli; ovo je efekat lošeg odbacivanja šuma kod brzog sampliranja. Na taj način smo formalizirali pomenuti kompromis.

Tačan prediktor (13.96) daje slične, ali komplikovanije izraze. Na prethodnoj slici izraz (13.99) i tačan analog su nacrtani kao funkcije od T za $\omega_0 = 1/\tau$. Slika otkriva dvije stvari:

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

1. Optimalan izbor intervala sampliranja leži oko vremenske konstante sistema.
2. Mnogo je gore koristiti suviše veliko T nego suviše malo: $T = 10\tau$ daje varijansu više od 10^5 puta veću od optimalne; dok $T = 0.1\tau$ daje varijansu koja je samo 10 puta od optimalne kod $T = \tau$

Zaključci

- Vrlo brzo sampliranje vodi ka numeričkim problemima, model se uklapa u opsegu većih frekvencija, i skroman je povrat uloženog truda.
- Kako se povećava interval sampliranja, i iznad prirodnih vremenskih konstanti sistema, varijansa se drastično povećava.
- Optimalan izbor T za fiksni broj samplova leži u opsegu vremenskih konstanti sistema. Ove su, pak, uglavnom nepoznate, i ako se precijene, može voditi ka vrlo lošim rezultatima.

13. DIZAJN EKSPERIMENTA

Svi ovi aspekti vode ka savjetu da frekvencija sampliranja koja je oko 10 puta veća od propusnog opsega sistema treba biti dobar izbor u najvećem broju slučajeva. Primjetimo da ova diskusija se tiče brzine sampliranja izabrane za gradnju modela. Sa "jeftinom" akvizicijom podataka, mi možemo uvijek samplirati što je moguće brže, za vrijeme eksperimenta, i ostaviti stvarni izbor T za kasnije, sa digitalnim prefiltriranjem i decimacijom iz originalnog zapisa podataka.

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

Kada su podaci prikupljeni iz identifikacionog eksperimenta, oni najvjerojatnije neće biti u obliku pogodnom za neposredno korištenje u identifikacionim algoritmima. Postoji nekoliko mogućih nedostataka u podacima o kojima treba povesti računa:

1. Visoko frekventne smetnje u podacima, koje su iznad frekvencija od interesa za dinamiku sistema.
2. Povremeni prolomi kao i nedostajući podaci , ili zapisi podataka koji nisu kontinualni.
3. Driftovi i ofseti, nisko frekventne smetnje koje mogu imati i periodični karakter.

Potrebno je naglasiti da u off-line aplikacijama, je potrebno prvo iscrtati podatke da bi se pregledali na pomenute nedostatke.

U nastavku ćemo diskutovati kako treba predprocesirati podatke da bi se izbjegli problemi kasnije u identifikacionim

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

procedurama.

Driftovi i detrendiranje

Nisko frekventne smetnje, ofseti, trendovi, drift i periodične (sezonske) varijacije su česte u podacima. One su najčešće uzrokovane iz vanjskih izvora koje možda želimo, ili ne želimo da uključimo u modeliranje. Postoje u suštini dva pristupa u tretiranju ovih problema:

1. Otklanjanje smetnji eksplicitnim predtretmanom podataka
2. Dopuštajući da model šuma preuzme brigu o ovim smetnjama.

Prvi pristup uključuje otklanjanje trendova i ofseta direktnim oduzimanjem iz podataka, dok se drugi oslanja na modele šuma sa polovima ili na samom ili bliskim jediničnom krugu, kao kod ARIMA modela (gdje je I za integraciju), koji se dosta koriste kod Box Jenkinsovog pristupa.

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

Ofseti u signalima

Ilustriraćemo dva pristupa na primjeru problema ofseta. Standardni linearni modeli koje koristimo kao napr. :

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + v(t) \quad (14.1)$$

opisuju vezu između u i y . Ovo pokriva dinamičke osobine tj. kako promjena u u prouzrokuje promjene u y , kao i statičke osobine tj. statički odnos između konstantnog $u(t) \equiv \bar{u}$ i rezultirajuće stacionarne vrijednosti od $y(t)$, tj. \bar{y} :

$$A(1)\bar{y} = B(1)\bar{u} \quad (14.2)$$

U praksi, sirovi ulazno-izlazni podaci mjerenja, napr. $u^m(t)$, $y^m(t)$ se prikupljaju i zapisuju u inženjerskim jedinicama, čiji nivoi mogu značajno varirati jedni od drugih. Jednačina (14.1) koja opisuje dinamičke osobine može zbog toga imati vrlo malo

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

zajedničkog sa jednačinom (14.2) koja daje odnose medju signalima. Drugim riječima, jednačina (14.2) je jedno nepotrebno ograničenje za (14.1). Postoji najmanje 6 načina da se tretira ovaj problem:

1. Neka $y(t)$ i $u(t)$ budu devijacije od fizikalnog ravnotežnog stanja:

U ovom slučaju najprirodniji pristup je da odredimo nivo \bar{y} koji korespondira konstantnom $u^m(t) \equiv \bar{u}$ sko željenoj radnoj tački. Nakon toga definirajmo :

$$y(t) = y^m(t) - \bar{y} \quad (14.3a)$$

$$u(t) = u^m(t) - \bar{u} \quad (14.3b)$$

kao odstupanja od ravnoteže. Ove translirane varijable će automatski zadovoljavati (14.2), čineći obadva člana jednakim nuli, i (14.2) neće uticati na fitovanje u (14.1). Ovaj pristup naglašava fizikalnu interpretaciju od (14.1) kao linearizaciju

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

oko ravnotežnog stanja.

2. Oduzimanje srednje vrijednosti samplova

Drugi pristup je da se definiše:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y^m(t), \quad \bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u^m(t) \quad (14.4)$$

a onda koristiti (14.3). Ako neki ulaz $u^m(t)$ koji varira oko \bar{u} vodi ka izlazu koji varira oko \bar{y} , onda je vjerovatno da će (\bar{u}, \bar{y}) biti blisko tački ravnoteže sistema. Time je i ovaj drugi pristup usko povezan sa prvim pristupom.

3. Procjeniti ofset eksplicitno

Može se takodjer modelirati sistem koristeći varijable u originalnim inženjerskim jedinicama i dodati konstantu koja uzima brigu o ofsetima:

$$A(q)y^m(t) = B(q)u^m(t) + \alpha + v(t) \quad (14.5)$$

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

Poredeći sa (14.1) do (14.3), vidimo da α korespondira sa $A(1)\bar{y} - B(1)\bar{u}$. Vrijednost je onda uključena u vektor parametara ϑ i procjenjena iz podataka. Pokazuje se da ovaj pristup je mala varijanta drugog pristupa.

4. Korištenje modela šuma sa integracijom ili diferencijacijom podataka.

U izrazu (14.5) konstanta α se može posmatrati kao konstantna smetnja, koja se može modelirati kao:

$$\frac{\alpha}{1 - q^{-1}} \delta(t) \quad (14.6)$$

gdje $\delta(t)$ je jedinični impuls u trenutku 0. Tada će model biti:

$$y^m(t) = \frac{B(q)}{A(q)} u^m(t) + \frac{1}{(1 - q^{-1})A(q)} w(t) \quad (14.7)$$

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

gdje je $\omega(t)$ kombinovani izvor šuma $\alpha\delta(t) + v(t) - v(t-1)$. Ofset α se sada može opisati sa promjenom modela šuma sa $1/A(q)$ na $1/[(1-q^{-1})A(q)]$. U skladu sa onim što smo primjetili u (7.14), ovo je ekvivalentno sa prefiltriranjem podataka kroz filter $L(q) = 1 - q^{-1}$, to jest diferencirajući podatke:

$$\begin{aligned}y_F^m(t) &= L(q)y^m(t) = y^m(t) - y^m(t-1) \\u_F^m(t) &= L(q)u^m(t) = u^m(t) - u^m(t-1)\end{aligned}\tag{14.8}$$

5. Proširenje modela šuma:

Primjetimo da model (14.7) postaje specijalni slučaj od (14.1) ako redovi od A i polinoma u (14.1) se povećaju za 1. Tada zajednički faktor $1-q^{-1}$ se može uključiti u $A(q)$ i $B(q)$. Ovo znači da model višeg reda, kada se primjeni na sirove podatke y^m , u^m će konvergirati na model kao u (14.7).

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

6. Visoko propusno filtriranje

Diferenciranje podataka je prilično drastičan filter za otklanjanje statičke komponente. Bilo koji visokopropusni filter koji ima pojačanje blisko nuli na frekvencijama oko nule će imati isti efekat.

Evaluacija pristupa

Kod off-line aplikacije sa ofsetima, pristup koji se preporučuje je prvi navedeni pod 1 ili , ako izvodjenje stacionarnog eksperimenta nije ostvarivo, onda drugi pristup. Procjenjivanje ofseta eksplicitno kao u pristupu 3 je nepotrebno komplikovani način da se odbije srednja vrijednost sampla. Diferenciranje podataka kao u (14.8) korespondira sa prefilterom (inverzni model šuma) koji ima vrlo visoko pojačanje na visokim frekvencijama. Ovo će gurnuti fitovanje modela ka visokim frekvencijama, koji nije prikladan za mnoge aplikacije. Pristup 5 ima dodatnu lošu stranu da se mora procjeniti još više parametara. Pristup 6 može biti vrlo korisna alternativa , naroč

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

čito ako je ofset sporo varirajući.

Naročito je važno otkloniti ofsete (trendove i driftove) kada se koriste modeli izlazne greške. Ova razlika u nivoima će tada biti dominantna u kriteriju fitovanja, i dinamičke osobine će postati sekundarne. Za metode koje koriste fleksibilni model šuma (kao što su modeli najmanjih kvadrata), problem je manje izražen, pošto efekti pristupa 5 će automatski smanjiti važnost nivoa signala.

Drift, trendovi, sezonske varijacije

Metodi za tretman drugih sporih smetnji u podacima su potpuno analogni pristupima koji su već razmatrani. Drift i trendovi se mogu posmatrati kao vremenski varirajuća stanja ravnoteže. Prave linije ili segmentne krive se mogu fitovati u podatke na isti način kao konstantni nivoi ofseta u (14.4), i posmatrati varijacije oko ovih vremenski varirajućih srednjih vrijednosti. Za sezonske varijacije, razvijeno je nekoliko tehnika za ekonomske vremenske serije. Periodični signali se prilagođavaju uz podatke, i onda oduzimaju od njih.

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

Drugi pristup bi bio da se diferenciraju podaci, analogno onom u (18.4), ili ekvivalentno, koristiti ARIMA modelne strukture, koje uključuju integrator u model šuma. Alternativno, modelu šuma se može dati dodatna fleksibilnost da se nadje integrator ili kompleksan par polova na jediničnom krugu da se ovim uzmu u obzir periodične varijacije.

Sa izvjesnim znanjem o frekvencijama ovih sporih varijacija, bolja alternativa bi bila da se podaci propuste kroz visoko propusni filter. Ovo ima isti efekat kao i otklanjanje ofseta i sporih driftova, ali ne gura fitovanje modela u opseg visokih učestanosti kao kod slučaja diferenciranja.

Iskačući i nedostajući podaci

U praksi, akvizicioni sistemi i računarski I/O podsistemi nisu perfektni. Može se desiti da nedostaju pojedinačne vrijednosti ili dio nekih vrijednosti u kanalima mjerenja i akvizicije, zbog grešaka u senzorima ili komunikacionim kanalima. Može se takodjer desiti da su izvjesni podaci sa očitim greškama zbog

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

otkaza u mjerenjima. Takve loše vrijednosti se nazivaju “iskačućim” (engleski outliers), i mogu imati značajan negativan efekat na procjene. Ove loše vrijednosti je često mnogo lakše detektovati u plotu reziduala.

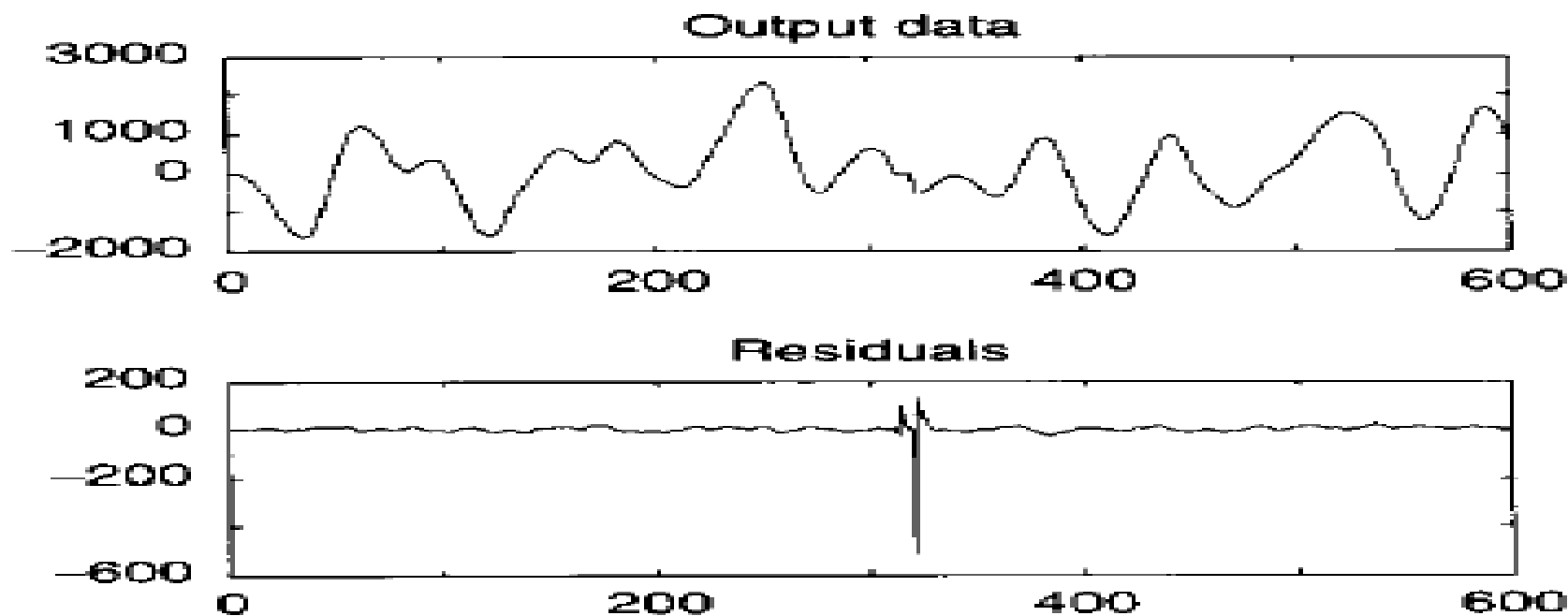
Primjer 14.1 Iskačuće vrijednosti (Outliers)

Posmatrajmo simulirane vrijednosti iz sistema :

$$\begin{aligned} y(t) &= 2.85y(t-1) + 2.717y(t-2) - 0.865y(t-3) \\ &= u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + e(t) + 0.7e(t-1) + 0.2e(t-3) \end{aligned} \quad (14.9)$$

Vrijednosti $y(313) \dots y(320)$ su zatim namjerno promjenjene na nule. Rezultirajući izlaz je nacrtan na slijedećoj slici br. 14.1. Mada vizuelna inspekcija pokazuje mogući glitch (iznenadnu promjenu) oko ovih vrijednosti, ne izgleda da ima nekih ozbiljnijih grešaka. ARMAX model sa korektnim redom je procjenjen dajući procjenu za $\hat{\theta}_1$.

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA



Slika 14.1 Podaci sa outlierima. Gornja slika su podaci sa outlierima. Donja slika su reziduali iz modela $\hat{\theta}_1$.

Reziduali (predikcione greške) iz ovog modela su takodjer pokazani na slici 14.1. Sada sa slike reziduala jasno je vidljivo da postoje problemi sa podacima oko $t=318$. Dalje, je drugi model procjenjen sa samo 300 prvih podataka i označen sa $\hat{\theta}_2$.

Konačno cjelokupan set podataka je korišten da se procjeni ARMAX model primjenjujući robustnu normu , što je dalo

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

procjenu $\hat{\theta}_3$. Procjene A i B polinoma su sumirane u narednoj tabeli u kojoj θ_0 označava tačne vrijednosti parametara:

θ_0	-2.8500	2.7170	-0.8650	1.0000	1.0000	1.0000	
$\hat{\theta}_1$	-2.8523	2.7200	-0.8668	-0.1669	2.6418	0.4159	(14.10)
$\hat{\theta}_2$	-2.8504	2.7165	-0.8652	0.9726	1.0496	1.0221	
$\hat{\theta}_3$	-2.8557	2.7267	-0.8701	1.0250	1.0185	0.8842	

Vidimo da je nekoliko outliera napravilo procjenu B polinoma u $\hat{\theta}_1$ vrlo lošom.

Treba dodati da su procjene "svjesne" ovoga: Procjenjene standardne devijacije od 3 B-parametara u $\hat{\theta}_1$ su date kao : 0.9997, 1.7157 i 1.1421, dok one za $\hat{\theta}_2$ imaju standardnu devijaciju : 0.0602, 0.0750 i 0.0611.

Za tretman outliera i nedostajućih podataka ima nekoliko mogućnosti. Jedna od njih je da se isjeku segmenti sekvence podataka sa tim dijelovima loših podataka da bi se izbjegli. 89

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

Segmenti se nakon toga mogu objediniti i na njima nastaviti procesiranje. Za setove podataka sa mnogo ulaza i izlaza može biti teško – u nekim aplikacijama - naći segmente podataka koji su “čisti” u svim varijablama. U takvim slučajevima je bolje tretirati outliere u ulazima i izlazima, kao nedostajuće podatke i posmatrati ih kao nepoznate parametre.

Tretman nedostajućih podataka

Predpostavimo, za trenutak, da imamo model $\mathcal{M}(\theta)$ koji opisuje odnos između ulazno-izlaznih podataka. U osnovnoj linearnoj prediktorskoj formi, prediktor je dat sa:

$$\hat{y}(t|\theta) = \sum_{k=1}^t g(t-k, \theta)u(k) + \sum_{k=1}^t h(t-k, \theta)y(k) \quad (14.11)$$

Predpostavimo sada da neki ulazno-izlazni podatci nedostaju. Pri tome moramo da pravimo razliku između nedostajućih ulaznih i izlaznih podataka jer se ovi slučajevi različito tretiraju.

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

Nedostajući ulazni podaci

Ako je ulaz deterministička sekvenca, prirodno je smatrati nedostajuće ulaze kao nepoznate parametre. Pošto je gornji izraz linearan po podacima, jasno je da za dati model $\mathcal{M}(\theta)$, nedostajući podaci se mogu procjeniti koristeći linearnu regresiju i proceduru najmanjih kvadrata. Ako označimo nedostajuće podatke sa vektorom η imaćemo:

$$\hat{y}(t|\theta, \eta) = \sum_{k \in K_u} g(t-k, \theta)u(k) + \varphi^T(t, \theta)\eta + \sum_{k=1}^t h(t-k, \theta)y(k) \quad (14.12)$$

gdje $k \in K_u$ je skup ne-nedostajućih ulaza $u(k)$, a $\varphi(t, \vartheta)$ je sačinjen od $g(t-k_i, \vartheta)$, $k_i \notin K_u$ na jasan način. Parametri ϑ i η se mogu sada procjeniti pomoću kriterija procjene greške, na uobičajeni način. Primjetimo da za fiksni ϑ (14.12) je linearna regresija za η , tako da se nedostajući ulazni podaci mogu lako procjeniti za bilo koji dati model. Nakon toga je prirodno da se prave iteracije između procjene nedostajućih podataka,

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

koristeći tekući model, tj onaj kojim se procjenjuje η za fiksno ψ , i procjenjujući model za ψ sa tekućim rekonstruiranim nedostajućim podacima. Da bi se startale ove iteracije, prvi model se može izgraditi koristeći linearno interpolisane vrijednosti za nedostajuće podatke.

Nedostajući izlazni podaci

Nije prirodno posmatrati nedostajuće izlazne podatke kao nepoznate parametre, pošto se oni tretiraju kao slučajne varijable u okviru predikcionog frameworka(okvira). Korektan kriterij predikcione greške bi bio da se minimizira greška između $y(t)$ i $\hat{y}(t|\theta, Y_{K_y})$, gdje je predikcija bazirana na onim prethodnim $y(k)$ koji su ustvari i bili observirani ($k \in K_y$). Da bi se korektno izračunala ova predikcija možemo koristiti vremenski varirajući Kalmanov filter i tretirati nedostajuće sample kao nepravilno sampliranje podataka.

Konkretno, pretpostavimo da diskretni vremenski model je dat u inovacionoj formi kao:

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

$$x(t + 1, \theta) = A(\theta)x(t, \theta) + B(\theta)u(t) + K(\theta)e(t) \quad (14.13)$$

$$y(t) = C(\theta)x(t, \theta) + e(t) \quad (14.14)$$

Kros kovarijansa između procesnog šuma i mjernog šuma će biti $R_{12}(\theta) = K(\theta)R_2$. Sada, ako neka ili sve komponente od $y(t)$ su nedostajuće u datom trenutku vremena t , ovo se tretira kao vremenski varirajući $C_t(\theta)$ i $R_{t,12}(\theta)$, gdje samo oni redovi od C i R_{12} se ekstrahiraju koji korespondiraju sa mjerenim izlazima. Ako svi izlazi su nedostajući u vremenu t , $C_t(\theta)$ i $R_{t,12}(\theta)$ će biti prazne matrice. Vremenski varirajući Kalmanov filter sa $C_t(\theta)$ i $R_{t,12}(\theta)$ će proizvesti korektne prediktore:

$$\hat{y}(t|\theta) = C(\theta)\hat{x}(t, \theta) = \hat{y}(t|\theta, Y_{K_t})$$

Rad sa vremenski varirajućim prediktorom naravno vodi ka mnogo većem obimu računanja, i neke alternative ovom pristupu se preferiraju.

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

Jedna aproksimacija bi bila da se zamjene sve nedostajuće $y(k)$ u (14.11) sa $\hat{y}(k|\theta)$, tj. prediktorom baziranim na podacima do trenutka $k-1$. Druga aproksimacija bi bila da se tretiraju nedostajući izlazi kao nepoznati parametri. Ovo korespondira sa zamjenom nedostajućih $y(k)$ u (14.11) sa njihovim izglađenim procjenama (smoothed estimates), koristeći ukupan set podataka. Treća mogućnost je da se provede minimizacija kriterija predikcione greške, sa EM-metodom.

Selekcija segmenata podataka i objedinjavanje (merging) eksperimenata

Selekcija segmenata podataka

Kada se iscrtavaju podaci iz identifikacionog eksperimenta, ili normalnog zapisa, često se desi da postoje dijelovi loših podataka ili podataka koji nisu relevantni. Razlozi mogu biti u tome što u zapisu postoje dugi dijelovi u kojima nedostaju podaci, koje bi bilo teško, ili sa stanovišta obima računanja suviše skupo rekonstruirati. Takodjer mogu biti dijelovi zapisa

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

sa smetnjama koje se smatraju da su nereprezentativne, ili pak vode proces u radne tačke koje su od manjeg interesa. Također, za mnoge normalne zapise, mogu također postojati dugi periodi "bez informacija", tj. izgleda da se ništa ne dešava što bi nosilo neku informaciju o dinamici procesa. U ovim slučajevima, je sasvim prirodno da se izaberu segmenti iz originalnih podataka za koje se smatra da sadrže relevantne podatke o dinamici procesa od interesa za analizu. Procedura kako selektirati takve segmente će u suštini biti subjektivna i moraće se oslanjati na intuiciju, i uvid u proces koji proizlazi iz apriori znanja ili iskustva.

Objedinjavanje (merging) skupova podataka

Vrlo je česta situacija u praksi da se provede niz odvojenih eksperimenata. Razlozi za ovo mogu biti razni: napr. postrojenje nije raspoloživo za duge kontinualne eksperimente, ili se dozvoljava da se može manipulirati samo jednim ulazom u svakom trenutku, i u svakom od eksperimenata. Daljni razlog može biti da su nas loši podaci prisilili da razdijelimo zapis podataka u nekoliko odvojenih segmenata zapisa.

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

Kako ćemo tretirati ovakve odvojene zapise podataka? Mi ne možemo samo jednostavno sastaviti (konkatenirati) segmente podataka, jer bi konekcione tačke ovih segmenata proizrokovale tranzijente koji bi mogli uništiti procjene.

Predpostavimo da gradimo model za svaki segmenat podataka, i svi su iste strukture. Neka procjena parametara za segment i je označena sa $\hat{\theta}^{(i)}$ i neka je njena procjenjena kovarijantna matrica $P^{(i)}$. Predpostavimo također da su segmenti tako dobro razdvojeni da različite procjene se mogu posmatrati kao nezavisne. Tada je dobro poznato iz osnova statistike, da optimalan način je da se kombinuju ove procjene (što će dati rezultirajuću procjenu sa najmanjom varijansom), je da se one otežaju u skladu sa njihovim inverznim kovarijansnim matricama.

$$\hat{\theta} = P \sum_{i=1}^n [P^{(i)}]^{-1} \hat{\theta}^{(i)}, \quad P = \left[\sum_{i=1}^n [P^{(i)}]^{-1} \right]^{-1} \quad (14.15)$$

P će sada također biti kovarijansna matrica rezultirajuće procjene $\hat{\theta}$

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

Možemo se upitati da li bi ova procjena se mogla dobiti direktno iz segmenata podataka. Da bi ovo provjerili, potražimo ideju za ovo iz slučaja linearne regresije. Predpostavimo da tretiramo model:

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta \quad (14.16)$$

Procjena za bili koji segment će biti:

$$\hat{\theta}^{(i)} = \left[\sum_{t \in T^i} \varphi(t)\varphi^T(t) \right]^{-1} \sum_{t \in T^i} \varphi(t)y(t), \quad P^{(i)} = \hat{\lambda}^{(i)} \left[\sum_{t \in T^i} \varphi(t)\varphi^T(t) \right]^{-1}$$
$$\hat{\lambda}^{(i)} = \frac{1}{|T^i|} \sum_{t \in T^i} \left(y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}^{(i)} \right)^2$$

Ovdje je T^i je indeksni set od i -tog segmenta, izuzimajući one t za koje $\varphi(t)$ nije u potpunosti poznato. Ovo znači da će prvih $\max(n_a, n_b)$ smplova biti isključeno iz svakog segmenta za ARX model.

Ako primjenimo (14.15) na ove procjene, i predpostavimo da su $\hat{\lambda}^{(i)}$ nezavisni od i , lako je vidjeti da rezultirajuće procjene kao one koje će dati (14.16) ako bi se sumiranje izvršilo nad⁹⁷

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

unijom U_i T_i segmenata.

Primjetimo medjutim, da za dinamički model, ovo nije isto kao kad bi prvo konkatenirali segmente podataka a zatim primjenili ARX model. Isjecanjem prvih observacija u svakom segmentu, mi eliminišemo probleme tranzijenata u tačkama spajanja.

Za opšti slučaj, sa prediktorskim modelima koji imaju konačne impulsne odzive, ovo sugeriše da bi se kriterij mogao formirati kao:

$$V(\theta) = \sum_{t \in T^1} (y(t) - \hat{y}(t|\theta))^2 + \dots + \sum_{t \in T^n} (y(t) - \hat{y}(t|\theta))^2 \quad (14.17)$$

gdje filteri koji računaju $\hat{y}(t|\theta)$ za svaki od segmenata trebaju biti reinicijalizirani sa nultim početnim uslovima (ili udruženi sa odvojenim setom početnih uslova koje treba procjeniti).

Koje su prednosti (14.17) u poredjenju sa (14.15)? Na prvom mjestu, efikasnije je koristiti samo jednu minimizacionu petlju nego n odvojenih. Drugo, ako svaki od eksperimenata (tj. segmenata) loše pobudjeni, ali imaju dobru pobudu kada se uzmu svi $\hat{y}(t|\theta)$ skupa, tada minimizacija (14.17) će biti bolje kondicionirana nego minimizacija svake od pod suma.

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

Ovakva situacija će se pojaviti kada razlozi sigurnosti ili proizvodnje zahtjevaju odvojene eksperimente, i kada se može manipulirati sa samo po jednim ulazom u svakom eksperimentu.

Usrednjavanje nad periodičnim podacima

Različiti slučaj objedinjavanja (merging) podataka će se javiti kod eksperimenta koji se provodi sa periodičnim ulaznim signalom. U tom slučaju je dobro da se usrednji izlazni signal nad ovim periodima, tako da kondezovani set podataka se sastoji samo od jednog perioda ulazno-izlaznih podataka. Ovo dozvoljava kraće dužine zapisa (rekorda) i nezavisne procjene šuma.

Predfiltriranje

Predfiltriranje ulaznih i izlaznih podataka kroz isti filter neće promijeniti ulazno-izlazne relacije za linearni sistem:

$$y(t) = G_0(q)u(t) + H_0(q)e(t) \Rightarrow L(q)y(t) = G_0(q)L(q)u(t) + L(q)H_0(q)e(t)$$

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

U slučaju multivarijabilnih sistema, svi signali moraju biti podvrgnuti istom filteru, tako da $L(q)$ je multiple od matrice identiteta.

Filtriranje međutim mjenja karakteristike šuma, tako da će procjenjeni model biti afektiran sa prefiltriranjem.

Sa estimacione tačke gledišta, filtriranje predikcionih grešaka prije nego što se uradi fitovanje, je jedna važna opcija:

$$\begin{aligned}\varepsilon_F(t, \theta) &= L(q)\varepsilon(t, \theta) = \frac{L(q)}{H(q, \theta)} (y(t) - G(q, \theta)u(t)) \\ &= \frac{1}{H(q, \theta)} (L(q)y(t) - G(q, \theta)L(q)u(t))\end{aligned}\tag{14.18}$$

Iz ovih izraza, mi vidimo nekoliko stvari:

- filtriranje predikcionih grešaka je isto kao i filtriranje observiranih ulazno-izlaznih podataka. U multivarijabilnom slučaju, isti filter se mora primjeniti na sve signale.
- prefilter $L(q)$ je ekvivalentan sa modelom šuma $H(q) = 1/L(q)$. Mi možemo sada govoriti o prefilterima i modelima šuma.

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

Model šuma/predfilter ima tri funkcije:

1. Mi znamo da će to uticati na distribuciju bajesa rezultirajućeg modela.
2. Vidjeli smo da je procjena prenosne funkcije nebajesovana, pa će se najbolja tačnost dobiti za predfilter koji korespondira sa istinskim karakteristikama šuma: $L(q) = 1/H_0(q)$.
3. Funkcija predfiltera može također biti da otkloni smetnje visokih ili niskih frekvencija, koje ne želimo da uključimo u model.

Druga funkcija je klasična statistička funkcija: da bi se postigla Cramer-Rao granica, nama je potreban koraktan model šuma. Pošto je on tipično nepoznat, prirodno je procjeniti njega također, uključujući parametre u model šuma/predfiltera. Za ciljeve 1 i 3, nema rezona da predfilter sadrži podesive parametre. Suprotno tome, parametrizirani model šuma će povući $H(q)/L(q)$ da lići na spektar greške, i ovo može da poništi ono što je $L(q)$ namjeravao postići. ¹⁰¹

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

za ove namjere. Tri funkcije predfiltera mogu zbog toga biti konfliktne.

Dok druga namjena filtera je u stvari stvar modeliranja šuma, druge dvije (1 i 3), korespondiraju sa čistim predprocesiranjem podataka. Pogledajmo sada korištenje predfiltriranja za svaku od ove dvije namjene.

Uticaj na bajes raspodjela

Općenito, nije moguće opisati tačan sistem u potpunosti unutar izabranog skupa modela, pa će prema tome i taj model biti bajesovan. Predfiltriranje podataka može imati značajan uticaj na distribuciju ovog bajesa. Konačan model se može interpretirati kao kompromis izmedju minimizacije :

$$\theta^*(\mathcal{D}) \approx \arg \min_{\theta \in \mathcal{D}_M} \int_{-\pi}^{\pi} |G_0(e^{i\omega}) - G(e^{i\omega}, \theta)|^2 Q(\omega, \theta^*) d\omega$$
$$Q(\omega, \theta) = \frac{|L(e^{i\omega})|^2 \Phi_u(\omega)}{|H(e^{i\omega}, \theta)|^2} \quad (14.19)$$

sa jedne strane i fitovanja $|H(e^{i\omega}, \theta)/L(e^{i\omega})|^2$ na spektar greške

$\Phi_{ER}(\omega, \theta^*)$ sa druge strane. Ovo znači da će $Q(\omega, \theta^*)$ biti uzeto 102

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

kao težinska funkcija koja određuje bajes raspodjelu od G . Ova težinska funkcija može sa druge strane biti afektirana kroz propisno izabrane:

- Ulazni spektar $\Phi_u(\omega)$
- set modela šuma $H(q, \mathcal{V})$ (14.20)
- predfilter $L(q)$

Primjetimo da je samo odnos $\Phi_u |L|^2 / |H|^2$ taj koji određuje raspodjelu bajesa, vrijednosti pojedinih funkcija Φ_u , H i L su nebitne. Primjetimo takodjer da je uloga predfiltera jasna samo ako model šuma H ne zavisi od \mathcal{V} . U opštem slučaju (14.19) je heuristično, ali je još uvijek koristan alat da se razumije i manipulira sa distribucijom bajesa.

Tretiranje smetnji

Treća namjena filtriranja je kako je definirana ranije u ovom poglavlju, je da otkloni smetnje u podacima koje ne želimo da uključimo u model. Ovo u stvari se podudara sa aspektom modeliranja šuma u predfilteru: otklanjanje, napr. sezonske varijacije neke frekvencije pomoću pojasno nepropusnog

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

filtera, se može također interpretirati kao fiksiranje modela šuma, sa vrlo visokim pojačanjem u ovom opsegu frekvencija, što je način izražavanja prisustva sezonske varijacije.

Visoko frekventne smetnje

Visoko frekventne smetnje u podacima, iznad frekvencija od interesa za dinamiku sistema, indiciraju da izbori intervala sampliranja i predsamplirajućih filtera nisu bili dobro osmišljeni.

Ovo se ipak može korigovati sa filtriranjem podataka niskopropusnim filterom. Također, ako se pokaže da je interval sampliranja bio nepotrebno malen (tj. često sampliranje), možemo uvijek resamplirati podatke uzimajući svaki s -ti sampl iz originalnog zapisa podataka. Nakon toga, se mora primjeniti digitalni antialiasirajući filter prije resampliranja.

Nisko frekventne smetnje

Nisko frekventne smetnje u vidu ofseta ili drifta sporo varirajućih sezonskih varijacija se mogu efikasno odstraniti pomoću visoko propusnog filtera.

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

Ovo je u svakom slučaju bolja alternativa nego diferenciranje podataka.

Identifikacija u svrhe upravljanja

Dizajn sistema upravljanja je jedan od najvećih korisnika identificiranih modela. Zbog toga značajan napor je potrošen da se dizajniraju eksperimenti i metodi koji daju modele koji su pogodni za dizajn sistema upravljanja.

Upravljanje sa povratnom spregom (feedback control) je primjer kada možemo imati dobro upravljanje i sa prosječnim modelom, sve dok je taj model pouzdan u opsegu frekvencija od interesa. Uopšteno govoreći, model treba da bude pouzdan u blizini frekvencije presjecanja (cross-over) , što je približno propusni opseg zatvoreno sprežnog sistema, a može biti loš model tamo gdje zatvoreno sprežna funkcija osjetljivosti je mala. Zahtjevana tačnost modela prema tome zavisi od funkcije osjetljivosti (koja je nepoznata u toku dizajna). Ovo često uključuje sekvencu iteracija, gdje se provodi niz eksperimenata, koji se preklapaju sa evaluacijama dizajna regulatora.

14. PREDPROCESIRANJE PODATAKA

Rezime

Predprocesiranje podataka je važan predzahtjev za fazu estimacije. Može uključiti "popravak" podataka u smislu zamjene nedostajućih ili vidno pogrešnih podataka kao i objedinjavanje razjedinjenih skupova podataka. Takodjer uključuje i poliranje podataka putem uklanjanja neželjenih smetnji u podacima. Ovo se postiže prije svega sa visoko i nisko propusnim filterima kao i sa oduzimanjem ofseta i trendova iz podataka. Primjetimo da ako se podaci prefiltriraju, to utiče na model šuma. Ako se želi postići neki vrlo specifičan efekat sa prefiltriranjem, tada je mudro da se ne dozvoli da model šuma bude fleksibilan.

Predfiltriranje takodjer utiče i na raspodjelu bajesa nad opsegom frekvencija, kao i drugih dizajn varijabli.