ETF Sarajevo
Postdiplomski studij na A i E

Metode identifikacije procesa

Sarajevo , Februar 2004

0. OSNOVNE DEFINICIJE I KLASIFIKACIJE

Problem identifikacije karakteristika sistema može se posmatrati kao dual problema upravljanja sistemom. Sistemom se ne može upravljati sve dok nije izvršena njegova identifikacija, bilo apriori ili u trenutku početka upravljanja.
Ukoliko želimo da pokrenemo neki sistem od tačke A do tačke B, možemo se osloniti na čistu sreću ili da naućimo odziv sistema na jedno ili više upravljačkih dejstava. Ako znamo da ulaz u_j dovodi sistem bliže tački B tada možemo primjeniti taj ulaz. Bez tog prethodnog znanja u pogledu u_j , možemo da primjenjujemo i mjerimo odzive (u smislu udaljenosti od B), za više ulaznih dejstava, i tako stvarno vršimo identifikaciju. Neko znanje o identifikaciji je uvjek neophodno prije nego što se izvede upravljanje.
Pomenuli smo da je poznavanje diferencijalnih jednačina procesa jedna moguća identifikacija, ali ne i jedina. Na primjer, možemo da napravimo tabelu mogućih upravljanja i njihovih odgovarajućih odziva za koje smo zainteresovani. Iz te tabele možemo onda za naše svrhe odabrati najboilje upravlajnje. Više drugih formulacija procesa mogu na slićan način dati modele identifikacije.
Ni jedna od razmatranih različitih tehnika identifikacije ne može se upotrebiti za identifikaciju sistema svih vrsta.
Svaka od prikazanih tehnika ima jedno ili više vlastitih područja primjenljivosti. Ovim se ne podrazumjeva da, prema sadašnjem stanju nauke, identifikaciju treba smatrati kao skup recepata za različite tipove sistema. Moguće je da se teorija identifikacije definiše kao nauka koja se bavi procjenjivanjem parametara iz ulaznih i izlaznih podataka, tj. Iz historije mjerenja, a procjena se poboljšava sa povećanjem broja mjerenja. Greške u procjeni dovode do grešaka u upravljanju ili u izlazu sistema. Zatim se te greške koriste da bi se popravile dalje procjene. Zbog toga je teorija identifikacije slićna , ili je ustvari dual teoriji upravljanja, gdje se greške u upravljanju (predpostavljajući da je sistem već identifikovan) koriste za poboljšanje daljeg upravljanja. I ovdje, kao i u teoriji upravljanja, postoji više prilaza u okviru iste teorije od kojih se svaki može primjeniti na odredjene situacije i slučajeve.
Teorija identifikacije, prema razmatranjima koja slijede, može se proširiti i na procjenjivanje parametara prediktora i filtera. Ovo proširenje proizlazi iz bliske veze izmedju predskazivanja i identifikacije, što se objašnjava činjenicom da je svrha identifikacije da se omogući predskazivanje budućeg ponašanja identifikovanog sistema. Problem predskazivanja se razlikuje, medjutim , od problema identifikacije u tome da se kod identifikacije uzimaju veze ulaz/izlaz za predskazivanje budućeg ponašanja, pod uslovom da su dati parametri sistema i njegovi ulazi. Predskazivanje vremenskog niza se zasniva na izmjerenoj historiji vremenskog niza, njegovi ulazi ili često nisu mjerljivi ili nisu uopšte poznati. Odatle se identifikacija parametara prediktora zasniva isključivo na prošlim mjerenjima poruke koja treba da se predskaže (koja se uzima kao izlaz sistema čiji ulaz nije mjerljiv), a ne mogu se upotrebiti podatci ulaz/izlaz.

Uopšteno govoreći postoji razlika izmedju različitih situacija identifikacije koje traže različite obrade i to:
Prvo, razlikuju se linearni i nelinearni sistemi.
Linearni sistemi se mnogo lakše identifikuju zahvaljujući osobini superpozicije.

Drugo, postoji razlika izmedju stacionarnih i nestacionarnih sistema.
Nestacionarni sistemi imaju parametre koji se mjenjaju sa vremenom. Sistemi se mogu smatrati stacionarnim ako se njihovi parametri mjenjaju vrlo sporo u poredjenju sa vremenom koje je potrebno za odgovarajuču identifikaciju.

Treće , često se uzima klasifikacija na diskretne i kontinualne sisteme, iako je transformacija iz kontinualne u diskretnu formulaciju prilićno jednostavna.

Četvrto, postoji tehnika identifikacije sistema sa jednim ulazom i izlazom i sa više ulaza. Tehnika identifikacije je znatno jednostavnija ako na stanje sistema utiče samo jedan ulaz nega kada na stanje utiče kombinacije više istovremenih poremećaja ili ulaza.

Peta, klasifikacija uzima u obzir razliku u identifikaciji determinističkih i stohastičkih procesa. Kod stohastičkih procesa, postoji samo, ili uglavnom, probabilističko poznavanje tačnog stanja sistema. U praksi sva mjerenja sadrže šum, a za odgovarajuću identifikaciju je potrebno filtriranje ili usrednjavanje. Kod determinističkih postupaka identifikacije predpostavlja se da je ovo filtriranje već izvršeno.

Šesta, možda najvažnija ali i najteža za definisanje ,je klasifikacija metoda identifilkacije prema stepenu aprori znanja sa kojim raspolažemo u pogledu sistema. Klasifikacija nekog sistema kao linearnog podrazumjeva prethodno znanje, kao i kod klasifikacije sistema kao stacionarnog. Ove klasifikacije (linearnost, stacionarnost) mogu se naravno utvrditi iz analize podataka mjerenja, ukoliko nisu apriori zadate.

Poznavanje dimenzija vektora stanja je veoma važno kod svakog postupka identifikacije, a takodjer i poznavanje prirode interakcija ili nelinearnosti.

Ove klasifikacije su, u odredjenom smislu, klasifikacije po stepenu poteškoće u identifikaciji. Očigledno, je da je identifikacija determinističkog, linearnog, stacionarnog, procesa, sa jednim ulazom i sa poznatim redom lakša od identifikacije stohastičkog procesa, za kojeg nam je poznat red i koji može da bude nelinearan i nestacionaran.
Sigurno je da su tehnike identifikacije koje predpostavljaju manje apriori znanja manje tačne i manje složenije u smislu matematičkih poteškoća, brzine konvergencije i vremena za računanje, nego tehnike sa više prethodnog znanja.
S druge strane, tehnike koje se mogu primjeniti za nelinearne ili nestacionarne procese su mnogo složenije od tehnika čija se primjena ogranićava na linearne stacionarne procese. Sigurno je da postupci koji predpostavljaju veoma malo apriori znanja u većem stepenu imaju opštu namjenu.

1.METODE KOJE KORISTE FREKVENTNE , STEP I IMPULSNE ODZIVE

Najranije metode identifikacije sistema zasnivaju se na frekventnim, odskočnim (step) i impusnim odzivima. Največi dio ovih metoda primjenjuje se na linearne procese. One se takodjer mogu primjeniti i na linearizovane oblike nelinearnih procesa, ukoliko su nivoi ulaznih signala dovoljno mali. Po definiciji, te metode zahtjevaju upotrebu posebnih ulaznih signala, tj. step ulaza za identifikaciju pomoću odziva na step (odskočnog odziva), impusnog ulaza za identifikaciju pomoću impulsnog odziva i sinusoidalnih ulaza, koji umaju promjenjljive učestanosti, za identifikaciju pomoću frekventnih odziva. Pošto se mjesto normalnih ulaza koriste specijalni ulazi, očigledno je da ove tehnike predstavljaju tkz. ‘’offline’’ identifikaciju. One se zbog toga mogu primjenjivati samo na linearne stacionarne sisteme, gdje odnos ulaza i izlaza, koji je dobijen za jedan skup ulaza, vrijedi za sve ulaze.
Izmedju prethodna tri tipa ulaznih signala, najednostavnija je primjena odziva na step, koja se ostvaruje trenutačnim otvaranjem ili zatvarenjem ulaznog ventila, ili trenutačnim uključenjem ili isključenjem ulaznog napona, dok je za sinusoidalni ulaz potrebna oprema za generiranje sinusoidalnog ulaza i za promjenu ućestanosti tog ulaza u području koje je od interesa. Postupak sa impulsnim odzivom često stvara poteškoće u realizaciji zbog generiranja i pobudjivanja sistema impulsnim funkcijama. Medjutim ovaj postupak se može primjeniti i na linearizovane oblike nelinearnih sistema, jer je po definiciji amplituda impulsa vrlo velika.

Metode identifikacije pomoću Fourierove transformacije

Mi ćemo za identifikaciju primjenom off-line sinusoidalnog ulaza, step ili impulsnog ulaza upotrebljavati Fourierovu transformaciju.
Uzmimo neku aperiodičnu vremensku funkciju x(t). Fourierova transformacja X (jω) od x(t) je data pomoću:

$$F[x(t)] \equiv X(j\omega) = \int x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (1.1)$$

Fourierova transformacija se može primjeniti na x(t) ako je ona apsolutno integrabilna, to jest ako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \langle \infty \qquad (1.2)$$

Ovaj posljednji uslov isključuje primjenu Fourierove transformacije za analizu ulaznih funkcija kao što je sinusna funkcija ili step funkcija. Ova poteškoća u primjeni Fourierove transformacije na sinusne ili step funkcije može se prevazići ako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \langle \infty$$

za neko , čak vrlo malo pozitivno σ , tako da se umjesto x(t) uzima x(t)$e^{-\sigma t}$, što daje Laplaceovu transformaciju :

$$X(s) = L[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-st} dt \quad ; \; s \equiv \sigma + j\omega \qquad (1.3)$$

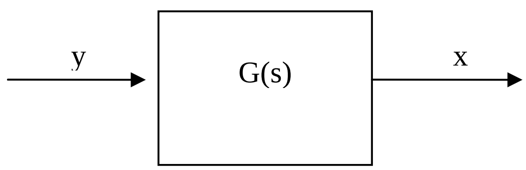
Zbog toga se smatra da step odziv predstavlja vrlo lagano asimptotsko smanjivanje stepa, a za sinusoidalni ulaz se smatra da se vrlo lagano prigušuje.

Sada izvodimo Fourierove i Laplaceove transformacije linearnih stacionarnih relacija ulaz/izlaz na slijedeči način:

Uzmimo linearni sistem G(s), kao na narednoj slici , čiji se izlaz x(t) za ulaz y(t) , daje pomoću slijedećeg konvolucionog integrala :

$$X(t) = \int_{0}^{t} y(\tau) g(t-\tau) d\tau; \quad g(t) = L^{-1}[G(s)] \qquad (1.4)$$

L^{-1} [ ] je inverzna Laplaceova transformacija.



Slika br. 1.1

Jednačina (1.4) postaje u transformisanom Fourierovom obliku:

$$X(j\omega) = G(j\omega)\, Y(j\omega) \qquad (1.5)$$

Dok Laplaceova trasformacija jednačine 1.4 zadovoljava :

$$X(s) = G(s)Y(s) \qquad (1.6)$$

Gdje su $G(j\omega)$ i G(s) funkcija sistema odnosno prenosna funkcija. Član $G(j\omega)$ jednačine 1.5 se može pisati kao $\alpha_\omega + j\beta_\omega = G(j\omega)$ i predstavlja kompleksno pojačanje sistema za ulaz sa frekvencijom ω. Dakle:

$$\sqrt{\alpha_\omega^2 + \beta_\omega^2} = |G(j\omega)|$$

predstavlja apsolutno pojačanje, a arc tg β/α predstavlja fazni pomak izmedju izlaza i ulaza, gdje promjena $G(j\omega)$ u funkciji ω predstavlja frekventni odziv sistema.
Dobijanje $G(j\omega)$ pomoću Fourierove transformacije kod upotrebe step ili impulsnog odziva je prilično jednostavno, jer je Fourierova transformacija impulsnog odziva

jednaka $G(j\omega)$, dok se Fourierova transformacija step odziva može dati sa $G(j\omega)/j\omega$, uzimajući u obzir napomene iz jednačine (1.2).
Zbog toga, ako se primjenjuje numerička Fourierova transformacija, na step ili impulsni odziv, $G(j\omega)$ se može lako numerički odrediti. Osim toga , pri razmatranju jednačine 1.5 , primjećujemo da se $G(j\omega)$ može dobiti numerički, ako se numerička Fourierova transformacija primjeni na bilo koji konvergentni ulaz i na odgovarajući izlaz i to na slijedeći način:

$$G(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} = \frac{izlaz(j\omega)}{ulaz(j\omega)} \qquad (1.7)$$

Medjutim, ovaj postupak zahtjeva numeričku transformaciju kako ulaza tako i izlaza, i dijeljenje dvije dobijene kompleksne veličine $X(j\omega)$ i $Y(j\omega)$ za veliki broj različitih frekvencija. Zbog toga je ovaj postupak prilićno dug, čak i ako se upotrijebi i brza Fourierova transformacija (FFT). Izuzetak su slućajevi step i impulsnih ulaza koji su već spomenuti, i slućajevi ulaznih šumova.

Očigledno je da ulazi koji se uzimaju u obzir za identifikaciju pomoću FFT trebaju da sadrže sve frekvencije koje su interesantne za sistem. Ako se step ulaz realizuje pomoću eksponencijalno rastuće funkcije, koja ima oblik vremenske funkcije

$$1- e^{-t/T}$$

tada najveća frekvencija koja se može adekvatno identifikovati pomoću Fourierove transformacije je reda $\omega = 2\pi/T$.

Numerička Fourierova transformacija

Numerička Fourierova transformacija traži aproksimaciju integrala iz jednačine 1.1 pomoću konačne sume , i to:

$$X(n) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi(nk/N)} \qquad (1.8)$$

gdje su :

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

$$X(n) \equiv X(jn\Delta\omega) \text{ ; } n = 0,1,2\ldots$$

$$t_k \equiv k\Delta t \text{ ; } k = 0,1,2\ldots.(N-1)$$

$$\Delta t \equiv T/N$$

$$\Omega = 2\pi f = 2\pi n/T \text{ ; } \Delta\omega = 2\pi/T$$

$$\omega t = \frac{2\pi nk\Delta t}{T} = \frac{2\pi nk}{N}$$

Očigledno je da su u bilo kojoj diskretnoj aproksimaciji granice sume u jednačini (1.8) konačne. Tačnost će biti zadovoljavajuća ako su granice N sume, koja označava vremenski raspon kojeg treba razmatrati, približava beskonačnosti. Zbog toga, vremenski interval T, za slučaj step ili impusnog ulaza, mora biti veći od vremena odziva. Ovdje se pod vremenom odziva podrazumjeva vrijeme poslije kojeg se mjerenjem raspoloživim instrumentom ne primjećuje da ima promjena izlaza. Vremenski interval uzimanja uzoraka Δt je naravno vezan na največu frekvenciju koja se može uzeti u dobijenom frekventnom odzivu, pošto frekvencija preko $1/2\Delta t$ Hz nema nikakvog smisla.

U praksi je najbolje da se upotrebi FFT za računanje Fourierovih transformacija i njhovih inverzija. Računanje je brže za faktor $N/\log_2 N$, nego kada se neposredno računa jednačina (1.8).
Kao rezultat toga, dolazi do reduciranja greške zaokruženja, jer je broj računarskih operacija manji.

FFT se zasniva na matričnoj formulaciji jednačine (1.6) na slijedeći način:

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{W}\,\mathbf{X} \qquad (1.9)$$

gdje su:

$$\mathbf{F} \equiv [X(0), \ldots X(n)]^T \qquad (1.10)$$

$$\mathbf{X} \equiv [x(0), \ldots x(n)]^T \qquad (1.11)$$

i

$$\mathbf{W} = \begin{matrix} W_0 & W_0 & \ldots. & W_0 \\ W_0 & W_1 & \ldots & W_{s-1} \\ & & & \\ W_0 & W_{N-1} & & W_{(N-1)(N-1)} \end{matrix} \qquad (1.12)$$

gdje je W_μ dato pomoću :

$$W_\mu = e^{-j2\pi\mu/N}$$

a μ označava proizvod n-k iz jednačine (1.8). Brzo računanje FFT je posljedica izvjesnih simetričnih osobina **W** i jednačine 1.9 . To dovodi do značajnog smanjenja broja potrebnih aritmetičkih operacija.

Identifikacija pomoću odskočnog odziva

Najednostavniji ulaz koji se može primjeniti za identifikaciju je step (odskočna) funkcija. Primjena step ulaza na neki proces može se provesti na primjer pomoću trenutnog otvaranja ili zatvaranja nekog ulaznog ventila, Trenutnog uključivanja ili isključivanja ulaznog napona ili struje, itd. .. što je gotovo uvjek moguće izvesti u praksi

bez posebnih instrumenata. Idealni step podrazumjeva konačno povećanje vrijednosti ulaza, čije je trajanje skoka jednako nuli, što je praktično nemoguće ostvariti jer podrazumjeva beskonačnu početnu brzinu. Zbog toga su svi praktični step ulazi samo aproksimacija idealnog stepa. Medjutim, ako početno vrijeme porasta ima trajanje koje je mnogo kraće od perioda najveće frekvencije interesantne za identifikaciju, dobijena greška u identifikaciji je zanemarljiva. Kod procesa sa šumom, ili gdje je šum sadržan u mjerenjima (što je često slučaj), neophodno je odgovarajuće filtriranje šuma.
Kako je već rečeno, identifikacija pomoću odziva na step je "off-line" tehnika, pa se može primjeniti samo na stacionarne procese. Medjutim, pošto se step poremećaji primjenjuju na mnoge (ako ne i na većinu) procesa u toku normalnog rada ili na startu, step odzivi se mogu registrovati bez remećenja normalnog rada, što povećava privlačnost ove tehnike. Očigledno je da rezultati identifikacije i u ovom slučaju predpostavljaju stacionarnost procesa, jer se takodjer predpostavlja da identifikacija vrijedi i nakon primjene stepa. Rezultati metode nadalje predpostavljaju linearnost unutar amplitude skoka.

Analiza odziva na step

Vremenska veza izmedju ulaza, karakteristika procesa i izlaza sadrži konvoluciju kao i u jednačini (1.4). Medjutim, kod Laplaceove transformacije, navedena veza jedino sadrži množenje, kako se to vidi iz jednačine (1.6). Dakle, Laplaceova transformacija se može upotrebiti na slijedeći način:

Razmotrimo sistem čija je prenosna funkcija Laplaceova transformacija G(s) , gdje:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} \qquad (1.13)$$

s - predstavlja promjenjlivu Laplaceove transformacije, a X , Y označavaju izlaz odnosno ulaz sistema.

Laplaceova transformacija step funkcije koja počinje u t = 0, je:

$$L[\text{ jedinični step u t=0}] = \frac{1}{s} \qquad (1.14)$$

Dakle, step odziv X(s) bilo kojeg linearnog sistema G(s) postaje:

$$X(s) = \frac{G(s)}{s} \qquad (1.15)$$

koji , prema teoriji Laplaceove transformacije predstavlja Laplaceovu transformaciju vremenskog integrala :

$$\int g(t)dt$$

gdje g(t) označava inverznu Laplaceovu prenosne funkcije G(s) na slijedeći način:

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] \qquad (1.16)$$

$$sX(s) = G(s)$$

i

$$L^{-1}\,[sX(s)] = \frac{dx(t)}{dt} = g(t) \qquad (1.17)$$

Fourierova transformacija step odziva

Rezultati jednačina (1.14) ili (1.17) mogu se neposredno primjeniti za identifikaciju pomoću step odziva. Napomenimo da je identifikacija potrebna za svrhe upravljanja ona koja pruža dovoljnu informaciju, omogućavajući odgovarajuće predvidjanje stanja sistema u nekom budućem vremenu (t + τ) , uz predpostavku da su poznati sadašnje stanje i ulaz. Odavde, uz poznavanje potrebnog stanja u t + τ možemo proračunati iz prethodne identifikacione informacije potrebno upravljanje, da bi dostigli potrebno buduće stanje. Osim toga, da bi identifikacija bila efikasna, tražimo da τ bude tako da u t + τ možemo ponovo ažurirati identifikaciju i proračunati novo upravljanje za odgovarajuću performansu u drugom intervalu unaprijed. Očigledno je da bi bila najbolja identifikacija , ona koja bi olakšala tačno predskazivanje za bilo koje vrijeme prednjačenja τ $(@ \tau \rightarrow \infty),$ ali je to praktično nemoguće.

Kod stacionarnih procesa poznavanje prenosne funkcije G(s) ili matrice prelaza i upravljanja A, B , teoretski olakšava identifikaciju do nekog vremena prednjačenja.
Razmatrajući jednačine (1.14) I (1.17) primjećujemo da se iz x(t) ili dx(t)/dt može dobiti prenosna funkcija G(s) ako se primjeni Fourierova transformacija (odnosno FFT) na x(t) ili dx(t)/dt.
Kada se iz dx(t)/dt dobije F[g(t)] = G(jω) , gdje je F operator Fourierove transformacije, možemo napraviti grafik G(jω) u fukciji od ω. Napomenimo da je G(jω) kompleksna pa se moraju razmatrati i moduo i argument. Iz ponašanja G(jω) možemo potpuno na isti način kako je već poznato iz identifikacije pomoću frekventnog odziva dobiti G(s) , a zatim možemo odrediti model u prostoru stanja sistema.
Primjetimo da se Fourierova transformacija može primjeniti kako na dx(t)/dt što daje G(jω) ili na x(t) što daje X(jω) , iz čega se može zatim odrediti G(jω) . Osim toga Fourierova transformacija je teoretski ograničena na apsolutno integrabilne vremenske funkcije, tj. na konvergentne vremenske funkcije, kako je to već ranije bilo razmatrano.

Slijedeći primjer pruža dalji uvid u upotrebu Fourierove transformacije kod identifikacije pomoću step odziva.

Primjer:

Razmotrimo sistem G(s) , gdje je :

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

Jedinični odziv X(s) od G(s) daje se sa:

$$X(s) = \frac{1}{s(Ts+1)}$$

I poznata inverzna Laplaceova transformacija posljednjeg izraza daje :

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = 1 - e^{-t/T}$$

Da bi odredili prenosnu funkciju sistema G(s) možemo pisati :

$$sx(s) = \frac{1}{Ts+1} = G(s)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}$$

Pošto je $e^{-t/T}$ konvergentno, na njega se može primjeniti Fourierova transformacija, na slijedeći način:

$$F[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt = G(j\omega)$$

Napomenimo da je g(t) u stvari jednako 0 za t ≤ 0 a jednako $\frac{1}{T}e^{-t/T}$ za t >0. Zbog toga se integral u posljednjoj Fourierovoj transformaciji može ponovo pisati kao :

$$G(jw) = \int_{-\infty}^{0} 0e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{T}e^{-t/T}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{\infty}e^{-(j\omega T+1)t/T}dt = -\frac{1}{j\omega T+1}e^{-(j\omega T+1)t/T}\Big|_{0}^{\infty} =$$

$$\frac{1}{j\omega T+1}$$

što daje za jω=s

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

što je i traženo.

Ako se problemu iz gornjeg primjera pristupi preko transformacije x(t) umjesto dx(t)/dt , izvodimo:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} 0e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty}(1-e^{-t/T})e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty}e^{-j\omega T}dt - \int_{0}^{\infty}e^{-(j\omega T+1)t/T}dt =$$

$$\frac{-1}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_0^\infty+\frac{T}{j\omega t+1}e^{-(j\omega t+1)t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{j\omega}-\frac{T}{j\omega T+1}=\frac{j\omega T+1-j\omega T}{j\omega(j\omega T+1)}=\frac{1}{j\omega(j\omega T+1)}$$

Medjutim Fourierova transformacija step funkcije je približno jednaka $1/j\,\omega$. Ako se ovaj skok aproksimira sa $e^{-\sigma t}$ za svako t>0, gdje je σ realna pozitivna vrijednost koja je vrlo bliska 0, izvešćemo:

$$\text{F [jedinični step]} \equiv \int_{-\infty}^{0}0e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(\sigma+j\omega)t}dt=\frac{1}{\sigma+j\omega}e^{-(\sigma+j\omega)t}\Big|_0^\infty$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sigma+j\omega}=\frac{1}{j\omega}\qquad \text{za svako malo pozitivno } \sigma \qquad (1.18)$$

Koristeći se teoremom o transformisanju konvolucije , dobijamo:

$$X(j\omega)=G(j\omega)\,Y(j\omega)$$

$$G(j\omega)=\frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)}$$

Gdje $X(j\omega)$ i $Y(j\omega)$ predstavljaju izlaz odnosno ulaz,
Uzimajući u obzir da je

$$Y(j\omega)=\frac{1}{j\omega}$$

dobijamo:

$$G(j\omega)=\frac{j\omega}{j\omega(j\omega T+1)}=\frac{1}{j\omega T+1}$$

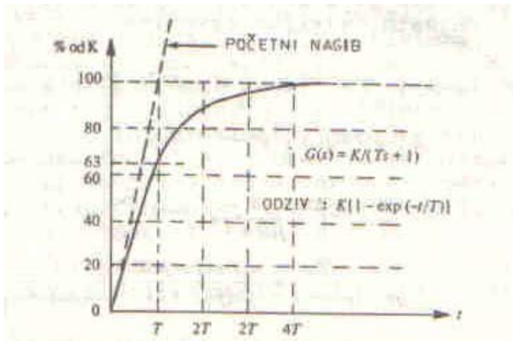
što se slaže sa rezultatom koji se dobio u prethodnom primjeru.

Grafička identifikacija parametara iz odziva na step

Često je moguće da se prenosna funkcija sistema izvede iz zapisa njenog odziva na step. Ova mogućnost je razmotrena za najčešće tipove linearnih sistema, to jest za sisteme prvog i drugog reda i za aperiodske sisteme visokog reda.

Sistemi prvog reda

Osnova grafičke tehnike step odziva zasniva se na procesima prvog reda , kao na narednoj slici:



Slika br. 1.2

Step odziv sistema prvog reda daje se pomoću:

$$x(t)= K(1-e^{-t/T}) \qquad (1.19)$$

ili u obliku Laplaceove transformacije :

$$X(s)= L[x(t)]= G(s)Y(s)= G(s)/s= \frac{K}{s(Ts+1)} \qquad (1.20)$$

gdje

$$G(s)= \frac{K}{(Ts+1)} \qquad (1.20a)$$

je prenosna funkcija sistema prvog reda , a

$$Y(s)= 1/s = L\ [\text{jedinični step}] \qquad (1.21)$$

je jedinični ulaz. Primjetimo da za t =T , x(t) će biti :

$$x(t)= K(1-e^{-1})= K(1-0.37) = 0.63\ K \qquad (1.22)$$

Dakle konstantan parametar T sistema prvog reda je vrijeme u kojem step odziv postiže 63% vrijednosti njegovog stacionarnog stanja. Pojačanje K očigledno je (u odgovarajučim jedinicama) odnos izmedju vrijednosti stacionarnog stanja izlaza i amplitude stepa.

Vremenska konstanta T može se i drugačije odrediti kada se produži početni nagib (tangenta u t=0) step odziva, dok se ne dostigne vrijednost amplitude stacionarnog stanja kao na prethodnoj slici. Razmak na vremenskoj osi izmedju početka i tačke presjeka je T , jer se nagib x u t=0 daje sa:

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{K}{T}e^{-t/T}\Big|_{t=0} = \frac{K}{T} \qquad (1.23)$$

Ponašanje linije nagiba u funkciji vremena, zbog toga, slijedi relaciju:

$$\text{početni nagib} \equiv \phi(t) = \frac{Kt}{T} \qquad (1.24)$$

koja dostiže vrijednost K za t=T.

Čisto vremensko kašnjenje

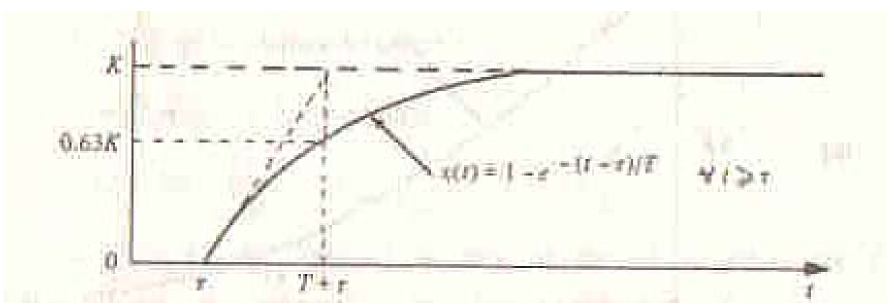
Ako neki step odziv kasni za vrijeme T tako da je jednak nuli dok ne protekne vrijeme τ od primjene skoka, kao na narednoj slici, mi ćemo predpostaviti da sistem sadrži član čistog kašnjenja čija je prenosna funkcija $e^{-\tau s}$. Zbog toga, ako se jedinični odziv sistema daje kao:

$$x(t) = \begin{matrix} \{K(1-e^{-(t-\tau)/T} : \forall t > \tau\} \\ \{0 : \forall t \le \tau\} \end{matrix} \qquad (1.25)$$

njegova prenosna funkcija postaje :

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts+1} \qquad (1.27)$$

kao rezultat primjene Laplaceove transformacije na jednačinu (1.25)



Slika br. 1.3   Odziv sistema sa čistim kašnjenjem i aperiodskim blokom prvog reda na jedinični step ulaz

Aperiodski sistem drugog reda

Razmotrimo sistem G(s) , gdje je :

$$G(s) = \frac{1.25}{(s+2.5)(s+0.5)}$$

i čiji je step odziv u vremenskom domenu dat sa :

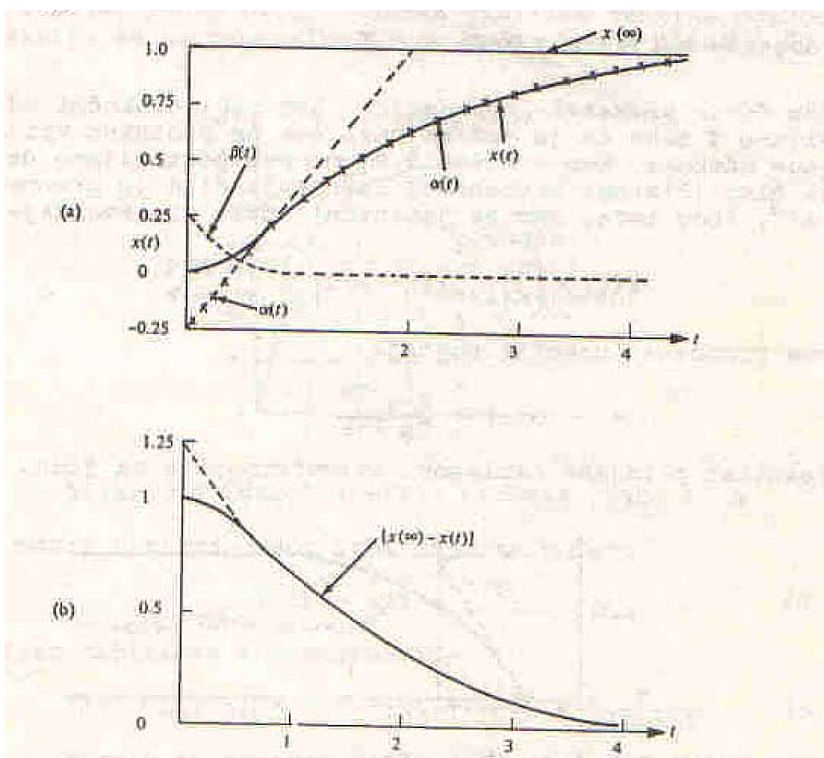
$$x(t) = 1-1.25\, e^{-0.5t} + 0.25\, e^{-2.5t}$$

kako je to grafički prikazano na narednoj slici 1.4a. Fumkcija $x(\infty)$- x(t) nanosi se zatim kao na slici 1.4b. Primjećujemo da je :

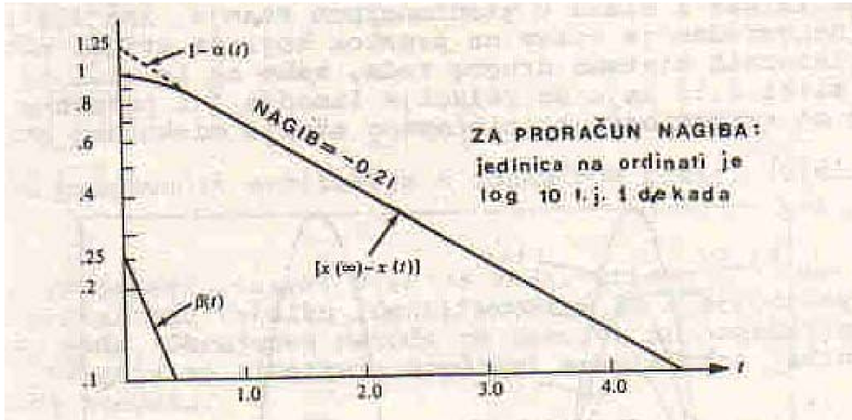
$$x(\infty) - x(t) = 1 - x(t) = 1.25\, e^{-0.5t} + 0.25\, e^{-2.5t}$$

Kada je t veliko, član $e^{-2.5t} \to 0$, član $x(\infty)$- x(t) se aproksimira sa 1.25 $e^{-0.5t}$ kao na slici 1.4a, a nagib $\log_{10}$ [$x(\infty)$- x(t)] se približno odredjuje sa (vidjeti sliku1. 4),

$$\frac{d\left[\log_{10}(1.25e^{-0.5t})\right]}{dt} = \frac{d\left[\log_{10}(1.25 - 0.5t\log_{10} e\right]}{dt} = -0.5\log_{10} e = -0.21$$



Slika 1.4 Odziv na step aperiodskog bloka drugog reda



Slika 1.5 Logaritamska skala step odziva aperiodskog bloka drugog reda

Iz gornjeg razmatranja slijedi da je aproksimacija x(t) , za veliko t, jednaka :

α(t)= (1-1.25e$^{-0.5t}$) , dok je za malo t, potreban i drugi član β(t), koji za t=0 će biti β(0)=0.25. Ovaj drugi član ima oblik :

$$\beta(t) \equiv 0.25e^{-rt} .$$

Vraćajuči se na sliku 1.4a, nanosimo α(t)= (1-1.25e$^{-0.5t}$) , obilježavajući α(0)=-0.25. Iz α(0) nastavljamo početni nagib $\frac{d\alpha(0)}{dt} = 0.625$ i blago se spojimo sa krivom x(t). Razlika izmedju x(t) i α(t) sada približno daje β(t) , koja se takodjer nanosi u grafik na slici1.4a, a log β(t) zatim nanosimo na skalu 1.5.

Nagib log β(t) u slici1.5 odredjuje se pomoću:

$$\frac{d\log\beta(t)}{dt} = \frac{d\log 0.25e^{-rt}}{dt} = \frac{d\log 0.25 - rt\log e}{dt} = r\log e = -0.42r$$

iz čega se može odrediti da je r=2.5. Dosljedno tome, x(t) aproksimiramo sa :

$$1-1.25e^{-0.5t}+0.25e^{-rt}$$

i G(s) postaje:

$$G(s)=\frac{K}{(s+a)(s+r)} = \frac{K}{(s+0.5)(s+r)}$$

K se odredjuje tako da se zadovolji vrijednost stacionarnog stanja odziva x(t), gdje je:

$$X(s)\ G(s)/s = \text{ odziv na step} \qquad (1.28)$$

i pomoću teoreme o konačnoj vrijednosti:

$$\lim_{s\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{G(s)}{s} = \frac{K}{ar} \qquad (1.29)$$

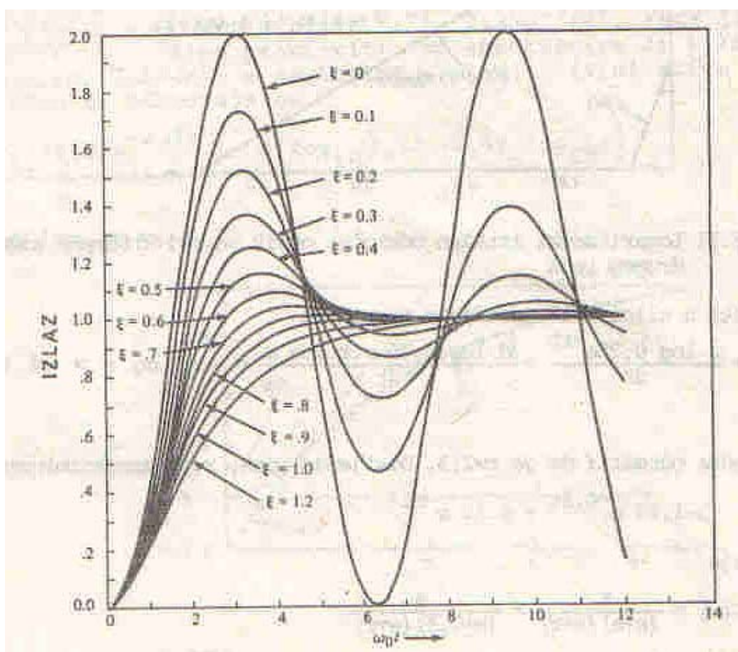
Pošto je iz mjerenja, x(o)=1, dobijamo da je K=0.5r, gdje je r već ranije odredjeno.

Periodični sistemi drugog reda

Periodični sistem drugog reda se uvjek može opisati sa :

$$G(s) = \frac{K}{(\frac{s}{\omega_0})^2 + 2\xi s/\omega_0 + 1} = \frac{K}{(Ts)^2 + 2\xi Ts + 1} \qquad (1.30)$$

gdje je $0<\xi<1$ i $T \equiv 1/\omega_0$. Zbog toga je za identifikovanje periodičnih sistema drugog reda potrebno da se odrede samo ω_0 , ξ i K , gdje K predstavlja odnos izlaza i ulaza u stacionarnom stanju. Koeficijent prigušenja ξ neposredno je vezan za preskok koji je uvjek prisutan kod oscilatornih sistema drugog reda, kako se to vidi iz naredne slike 1.6.



Slika 1.6 Odziv na step periodičnog sistema drugog reda

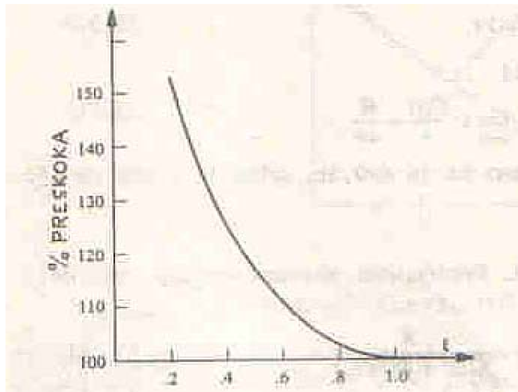
Na slici 1.7 data je relacija izmedju ξ i preskoka (kao procenat od vrijednosti stacionarnog stanja step odziva). Kada se ξ grafički odredi prema slici 1.7, prirodna učestanost ω_0 se može odrediti na slijedeći način :

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (1.31)$$

gdje je :

$$\omega = \frac{2\pi}{\theta} \qquad (1.32)$$

a ϑ period prigušenih oscilacija u odzivu na step (vidjeti sliku 1.6).



Slika 1.7 Preskok u funkciji prigušenja

Aperiodični sistemi visokog reda

Strejc [xxx] je dao jednu prostu grafičku tehniku identifikacije za aperiodske sisteme višeg reda. Strejcova metoda se zasniva na označavanju , kao na narednoj slici 1.8, gdje se ilustruje uopšteni aperiodični odziv na jedinični step aperiodskog bloka visokog reda.

Prema Strejcu se neki aperiodični sistem sa n različitih vremenskih konstanti može odgovarajuće aproksimirati pomoću prenosne funkcije koja ima n identičnih vremenskih konstanti:

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)....(T_n s+1)} \cong \frac{K}{(\tau s+1)^n} \qquad (1.33)$$

gdje K predstavlja pojačanje stacionarnog stanja.

Slika 1.8 Step odziv aperiodskog procesa visokog reda

Problem identifikacije se na ovaj način ograničava na identifikovanje τ i n. Za tu namjenu, Strejc je dao odnose n i T_a/T_b .. T_a/T_e prikazane na narednoj tabeli T1.1. Tačka infleksije Q na slici 1.8 koja je potrebna da se odredi T_a....T_e je tamo gdje je d^2x/dt^2 jednako nuli. Kada se iz T_a/T_b dobije n (i verificira pomoću T_e/T_b), tada se τ iz jednačine (1.33) može odrediti iz T_a/τ (i verificirati pomoću T_b/τ: T_d/τ: T_e/τ) prema narednoj tabeli T1.2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_a/T_b	0	0.104	0.218	0.319	0.410	0.493	0.570	0.642	0.709	0.773
T_e/T_b	1	0.736	0.677	0.647	0.629	0.616	0.606	0.599	0.593	0.587
η	0	0.264	0.323	0.353	0.371	0.384	0.394	0.401	0.407	0.413

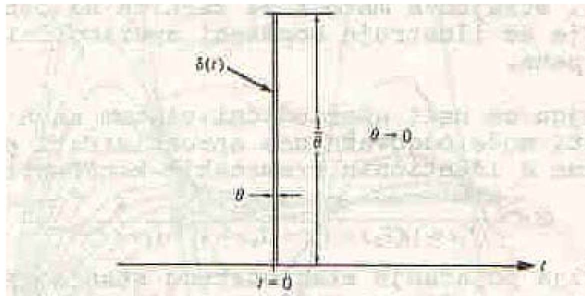
Tabela T 1.1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_a/τ	0	0.282	0.805	1.425	2.1	2.811	3.549	4.307	5.081	5.869
T_b/τ	1	2.718	3.695	4.463	5.119	5.699	6.226	6.711	7.164	7.59
T_d/τ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T_e/τ	1	2	2.5	2.888	3.219	3.51	3.775	4.018	4.245	4.458

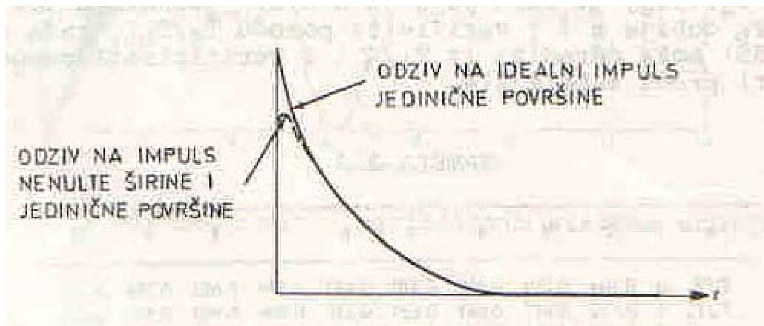
Tabela T 1.2

Identifikacija pomoću impulsnog odziva

Identifikacija linearnog procesa pomoću njihovih odziva na impuls se realizuje na sličan način kao i identifikacija pomoću odziva na step. Identifikacija pomoću impulsnog odziva zahtjeva primjenu impulsnog ulaza (delta funkcije) na sistem koji se treba identificirati, pa je zbog toga i to tehnika " off-line" identifikacije. Po definiciji delta funkcija je impuls sa širinom koja je jednaka nuli (vidjeti narednu sliku 1.9) i zbog toga sa beskonačnom amplitudom. Očigledno je da se delta funkcija ne može realizovati zbog beskonačne amplitude. Medjutim, ona se može aproksimirati pomoću impulsa konačne širine $\vartheta \to 0$, i sa jediničnom površinom, što daje amplitudu $1/\vartheta \to \infty$. Ovo daje netačnosti u dobijenom odzivu, kako je prikazano na slici 1.10.



Slika 1.9 Impulsna funkcija



Slika 1.10 Odziv na idealni i približni impuls

Analiza impulsnog odziva

Razmotrimo sitem G(s) , kao na slici 1.1, gdje:

$$X(s) = G(s)\, Y(s) \qquad (1.34)$$

x i y su izlaz i ulaz u sistem , a ulaz y je jedinični impuls čija je Laplaceova transformacija data sa :

$$Y(s) = L[\delta(t)] = 1 \qquad (1.35)$$

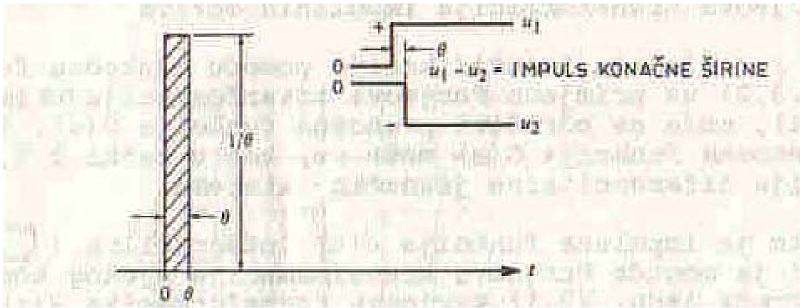
Prema tome , Laplaceova transformacija izlaza postaje:

$$X(s) = G(s)\, L[\delta(t)] = G(s)\, 1 = G(s) \qquad (1.36)$$

i

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}[G(s)] = g(t) \qquad (1.37)$$

Jednačine (1.36) i (1.37) podrazumjevaju da je impulsni odziv linearnog sistema identičan inverznoj Laplaceovoj transformaciji njegove prenosne funkcije G(s). Posljednji rezultat je očigledno od velike važnosti za identifikaciju.
Ako je medjutim ulaz y(t) u odnosu na proces neki impuls konačne širine, čija je širina ϑ dovoljno mala, možemo ovaj impuls opisati kao sumu pozitivnog stepa u t=0 i negativnog stepa u t=ϑ, kako se to vidi na narednoj slici 1.11, što daje :



Slika 1.11 Impuls konačne širine

$$L\,[y(t)] = Y(s) = \frac{1-e^{-\vartheta s}}{s} \qquad (1.38)$$

gdje je 1/s Laplaceova transformacija step odziva u t=0 a $e^{-\vartheta s}/s$ predstavlja negativan step u t=ϑ.

Upotrebljavajući Taylor-ov razvoj redova, jednačina (1.38) postaje :

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\left(1 - s\vartheta + \frac{s^2\vartheta^2}{2!} - \frac{s^3\vartheta^3}{3!} + ...\right) \qquad (1.39)$$

što za $\vartheta \to 0$ daje :

$$Y(s) \equiv \frac{1}{s} - \frac{1}{s}(1 - s\vartheta) = \vartheta \qquad (1.40)$$

Ako je amplituda impulsa 1/ϑ , tada jednačina (1.40) postaje :

$$Y(s) = \frac{1}{\vartheta}\left[\ \frac{1}{s} - \frac{1}{s}(1 - s\vartheta)\ \right] = 1 \qquad (1.41)$$

kao i u slučaju prave δ funkcije.

Pri uporedjenju prethodne impulsne funkcije i odskočne funkcije, opažamo da je δ funkcija ustvari izvod po vremenu neke idealne funkcije odziva na step, (gdje je ovaj izvod beskonačan za vrijeme porasta, a jednak 0 za svako drugo vrijeme). U domenu Laplaceove transformacije ponovo opažamo ovu povezanost (imajući na umu da promjenljiva Laplaceove transformacije s predstavlja d/dt) i to:

$$s\,L[\text{step}] = s\ 1/s = 1 \qquad (1.42)$$

Dosljedno tome, ako je x(t) predstavlja odziv na step sistema, dobijamo da se dx/dt daje sa:

$$s\,X(s) = s\frac{G(s)}{s} = G(s) \qquad (1.43)$$

gdje je G(s)/s odziv na step kao u jednačini (1.15). Uporedjujući jednačine (1.36) i (1.43) opažamo da je izvod po vremenu step odziva identičan odzivu na impuls. Sa druge strane, integral impulsnog odziva jednak je 1/s G(s) i identičan je odzivu na step. Time zaključujemo da se tehnika identifikacije pomoću impulsnog odziva može primjeniti na odziv na step, ako se odziv na step diferencira. Osim toga, tehnika identifikacije pomoću step odziva je primjenjljiva na impusne odzive ako se razmatra ponašanje integrala po vremenu od impusnog odziva.

Fourierova transformacija impulsnog odziva

Kao i u slučaju identifikacije pomoću step funkcije, uz primjenu Fourierove transformacije na impulsni odziv g(t), može se odrediti prenosna funkcija G(s). Kada se odredi prenosna funkcija G(s) , može se dobiti formulacija diferencijalne jednačine sistema.

Pošto je impulsna funkcija δ(t) integrabilna ($\int_{-\infty}^{\infty}|\delta(t)|dt = 1 \leq \infty$) , teorijski je moguća Fourierova transformacija njenog konvergentnog odziva. Fourierova transformacija δ(t) daje se pomoću:

$$F[\delta(t)] = Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt = \lim_{s\to 0}\left[\int_{-\infty}^{0}0dt + \int_{0}^{\theta}\frac{1}{\theta}e^{-j\omega t}dt + \int_{\theta}^{\infty}0dt\right]$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left[0 + \int_{0}^{\theta}\frac{1}{\theta}e^{-j\omega t} + 0\right] = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{j\omega t}\left[1 - j\omega t + \frac{(j\omega t)^2}{2!} + ...\right] = 1 \qquad (1.44)$$

Imajući na umu jednačinu (1.44) Fourierova transformacija impusnog odziva x(t) daje se pomoću:

$$X(j\omega) = G(j\omega)Y(j\omega) = G(j\omega)\,1 \qquad (1.45)$$

Prema tome, ako se nanese X(jω) u funkciji od ω , dobiće se frekventni odziv G(jω) sistema. Sada se G(s) može odrediti iz G(jω) pomoću potpuno iste analize frekventnog odziva koristeći tehniku Bodeovog dijagrama.

Grafička identifikacija iz impulsnih odziva

Neposredna identifikacija iz ponašanja impusnog odziva po vremenu može se vršiti u potpunoj analogiji sa identifikacijom iz ponašanja jediničnog odziva na step po vremenu, kako je to ranije opisano. Za tu svrhu može se integrirati impulsni odziv da bi se odredilo ponašanje jediničnog odziva po vremenu.

Procesi prvog reda

Proces prvog reda se u opštem obliku daje pomoću slijedeće prenosne funkcije:

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1} \tag{1.46}$$

Prema tome, njegov impusni odziv je :

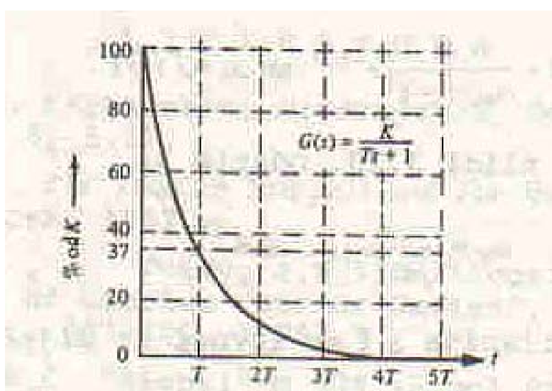
$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = \frac{K}{T} e^{-t/T} \tag{1.47}$$

a grafički je predstavljen na narednoj slici 1.12. Iz grafičkog odziva se odredjuju T i K tako da je početna amplituda :

$$\frac{K}{T} = \frac{K}{T} e^{-0/T}$$

a vrijeme u kojem g(t) dostiže 0.37 K/T je

$$\frac{K}{T} e^{-T/T} = \frac{K}{T} e^{-1} = 0.37 \frac{K}{T}$$



Slika 1.12 Impulsni odziv sistema prvog reda

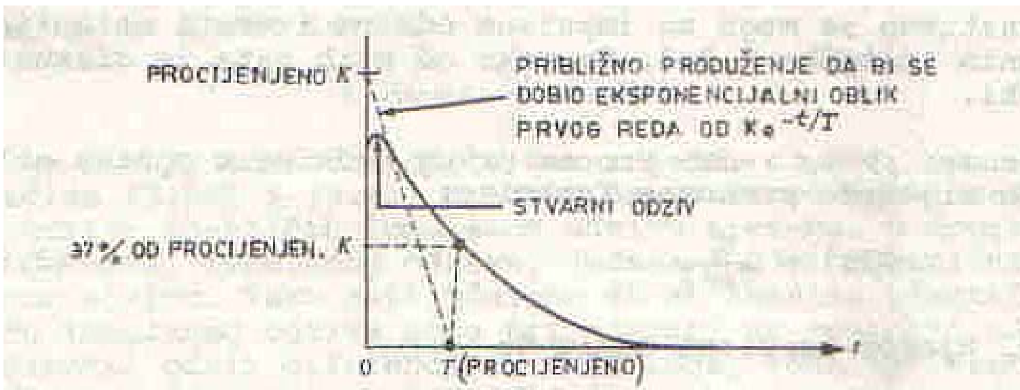
Takodjer se T može dobiti iz produženja početnog nagiba g(t) dok ne dostigne nultu amplitudu, pošto, prema jednačini (1.47) je :

$$\frac{dg(0)}{dt} = -\frac{K}{T^2} \tag{1.48}$$

i

$$\frac{K}{T}-\frac{K}{T^2}t=0 \quad \wp\, t=T \qquad (1.49)$$

U praksi je ulaz u sistem samo približni impuls. Zbog toga g(t) nikada ne počinje u K/T. Stvarno odredjivanje K,T se vrši kao na slici 1.13. gdje se najveći nagib blizu (ali ne u t=0) , ekstrapolira unazad do t=0 da bi se dobilo K/T.



Slika 1.13 Praktična identifikacija za impulsni odziv prvog reda

Impulsni odziv periodičnog sistema drugog reda

Impulsni odziv periodičnog sistema drugog reda odredjuje se na slijedeći način:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(s/\omega_0)^2 + 2\xi s/\omega_0 + 1} \qquad \forall 0<\xi<1 \qquad (1.50)$$

što daje:

$$g(t)= \frac{K}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t}\sin\omega_0 t\sqrt{1-\xi^2} \qquad (1.51)$$

i predstavljeni su na narednoj slici 1.14. Odatle je:

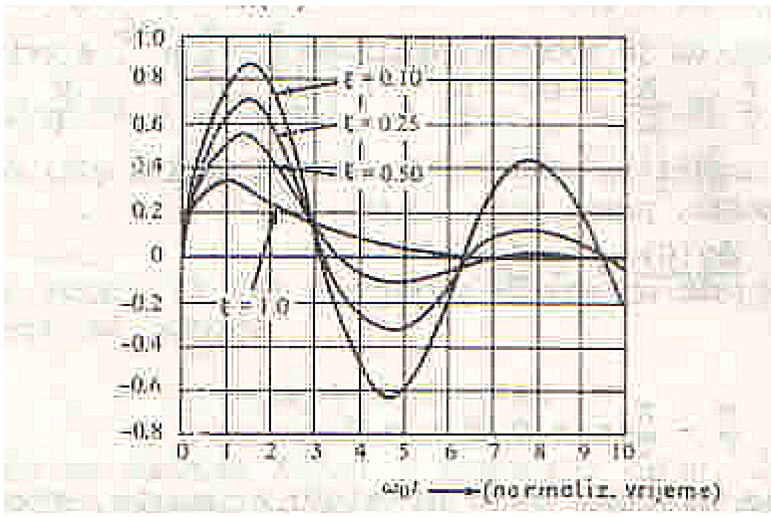
$$\omega_0 \equiv \frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} \;:\; \omega \equiv \frac{2\pi}{\theta} \qquad (1.52)$$

ϑ je period jedne oscilacije, a ξ se izvodi iz slijedeće relacije:

$$\frac{A(+)}{A(-)} = e^{\pi\xi\sqrt{1-\xi^2}} \equiv R \qquad (1.53)$$

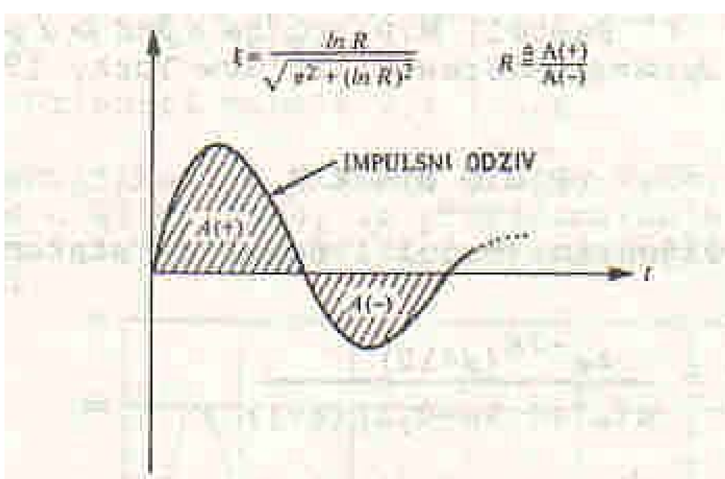
što daje:

$$\xi = \frac{\ln R}{\sqrt{\pi^2} + (\ln R^2)} \qquad R \equiv \frac{A(+)}{A(-)}$$



Slika 1.14 Impulsni odzivi periodičnog sistema drugog reda

gdje su A(+) i A(-) uzastopne pozitivne i negativne površine ovog impulsnog odziva, kao na slici1.15. Kada su poznati ξ i ω_0 iz jednačine (1.51) se može odrediti K.



Slika 1.15 Odredjivanje x iz odnosa površina

2. METODE IDENTIFIKACIJE POMOĆU KORELACIONE FUNKCIJE

Identifikovanje linearnih procesa pomoću korelacione funkcije omogućava kako “on-line” tako i “off-line” identifikaciju. Postupak se zasniva na primeni bijelog šuma na ulaz u proces (tj. nekog nekoreliranog slučajnog ulaza koji ima beskonačno ravan spektar do beskonačne frekvencije i srednju vrijednost nula).
Iako takav signal ne postoji u praksi , on se može aproksimirati kako bi se dobio šum čije osobine zadovoljavaju zahtjeve identifikacije pomoću korelacione funkcije. Ako ovaj šum ima dovoljno nisku amplitudu, možemo ga superponirati na normalni radni ulaz sistema bez uticaja na performansu , i zbog toga se može primjeniti “on-line”. Osim toga, u daljem tekstu će se pokazati da normalni radni ulaz ne utiče na postupak identifikacije.
Postupak identifikacije traži obradu ulaza i izlaza za dugi, praktično beskonačan, vremenski interval, prije nego što se izvrši identifikacija. Zbog toga pristup identifikaciji pomoću korelacione funkcije predpostavlja stacionarnost procesa (tj. da su parametri procesa, koji su koeficijenti njegove prenosne funkcije ili njegovih jednačina stanja, invarijantni po vremenu).

Konvolucioni i korelacioni integrali

Izlaz x(t) nekog linearnog procesa, koji ima ulaz y(t) izražava se pomoću konvolucionog integrala na slijedeći način:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)y(t)d\tau = \int_{0}^{\infty} g(\tau)y(t-\tau)d\tau \qquad (2.1)$$

gdje je g(t) impulsni odziv $L^{-1}[G(s)]$ sistema. Ako je y(t) = 0 za svako t< 0, jednačina (2.1) postaje:

$$x(t) = \int_{0}^{t} g(t-\tau)y(t)d\tau = \int_{0}^{t} g(\tau)y(t-\tau)d\tau \qquad (2.2)$$

Fizikalna interpretacija jednačina (2.1) i (2.2) može se dobiti ako smatramo da y(t) čini niz impulsa sa širinom $\vartheta \to 0$ i sa amplitudom y(t) , tako da je njihova površina ϑ y(t) , a impulsi se javljaju u t = 0, ϑ, 2ϑ,..... Dalje, uvodimo $x_i(t)$ da bi označili odziv sistema u vremenu t, samo do i-tog impulsa (naime na impuls koji se javlja u t= (i-1)ϑ. U skladu sa tim $x_1(t_1)$ označava odziv u t=t_1, na prvi impuls koji se javlja u t=0, i čija je površina ϑy(0), tako da je :

$$x_1(t_1) = g(t_1)\,\vartheta y(0) \qquad (2.3)$$

gdje je $g(t_1)$ vrijednost koju ima impulsni odziv po isteku vremena t_1 od nastupanja odgovarajućeg impulsa. Slićno tome, $x_2(t_1)$ označava odziv u t=t_1 na slijedeći impuls (kojeg smo primjenili u t = ϑ i čija je površina ϑ y(ϑ), tako da je :

$$x_2(t_1) = g(t_1-\vartheta)\,\vartheta\, y(\vartheta) \qquad (2.4)$$

Slično tome, odziv x_i na i-ti impuls, koji se javlja u vrijeme t = (i-1) ϑ je :

$$X_i(t_1) = g\,[t_1-(i-1)\vartheta]\ \vartheta\ y\ [(i-1)\vartheta] \qquad (2.5)$$

Gdje g $[t_1-(i-1)\vartheta]$ predstavlja impulsni odziv u $t_1-(i-1)\vartheta$ jedinica vremena poslije pojave odgovarajućeg impulsa. Pošto se niz od n impulsa javio od t=0 do t=t_1, gdje je n= t_1/ϑ, možemo uzeti $x(t_1)$ kao sumu od n odziva $x_1(t_1)$, $x_2(t_1)$, …. $X_n(t_1)$, što daje :

$$x(t_1) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t_1) = \sum_{i=1}^{n} g(t_1-(i-1)\vartheta]\vartheta\, y[(i-1)\vartheta] \qquad (2.6)$$

U graničnom slućaju, kada $\vartheta \to d\tau \to 0$, i gdje je $i\vartheta = \tau$, $x(t_1)$ se izražava preko konvolucionog integrala iz jednačine (2.2), čija je Laplaceova transformacija:

$$X(s) = G(s)\ Y(s) \qquad (2.7)$$

Kada definišemo unakrsnu (kros) korelacionu funkciju $\Phi_{xy}(\vartheta)$, koja je definisana kao integral proizvoda izmedju vrijednosti signala x(t) i svake vrijednosti drugog signala y(t-ϑ) u drugom vremenu (t- ϑ), gdje t može da varira od –T do T, na slijedeći način:

$$\Phi_{xy}(\vartheta) \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)y(t-\vartheta)dt \qquad (2.8)$$

Na sličan način definišemo autokorelacionu funkciju $\Phi_{yy}(\vartheta)$ kao integral proizvoda izmedju svake vrijednosti signala y(t) i svake vrijednosti istog signala u drugom vremenu (t- ϑ), gdje t može da varira od –T do T, na slijedeći način:

$$\Phi_{yy}(\vartheta) \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y(t)y(t-\vartheta)dt \qquad (2.9)$$

Kros korelacija i impulsni odzivi

Zamjenom x(t) iz jednačine (2.1) u jednačinu (2.8) , izvodimo:

$$\Phi_{xy}(\vartheta) \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[y(t-\vartheta)\int_{0}^{\infty} g(t)y(t-\tau)d\tau\right]dt \qquad (2.10)$$

Promjenom reda integriranja , što je moguće jer su t i ϑ nezavisni od τ , jednačina (2.10) postaje:

$\Phi_{yy}(\vartheta) \quad \equiv \int_0^{\infty} g(\tau)\left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y(t-\vartheta)y(t-\tau)dt\right]d\tau$ (2.11)

Medjutim, izraz u uglastim zagradama u jednačini (2.11) može se pisati kao :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y(t-\vartheta)y(t-\tau)dt\Big] \; =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y(t^{'})y(t^{'}-\vartheta^{'})dt^{'}\Big] = \phi_{yy}(\vartheta^{'}) = \phi_{yy}(\vartheta-\tau) \qquad (2.12)$$

gdje je :

$$t^{'} \equiv t-\tau \qquad (2.13\text{-}1)$$
$$\vartheta^{'} \equiv \vartheta-\tau \qquad (2.13\text{-}2)$$

gdje je $\Phi_{yy}(\vartheta-\tau)$ autokorelaciona funkcija ulaza y. Odatle jednačina (2.11) postaje:

$$\Phi_{xy}(\vartheta) \;=\; \int_0^{\infty} g(\tau)\phi_{yy}(\vartheta-\tau)d\tau \qquad (2.14)$$

Izraz za kros korelacionu funkciju dat jednačinom (2.14) ima isti oblik kao jednačina (2.1), pa se može interpretirati kao odziv sistema čiji je impulsni odziv g(t), ali čiji je ulaz $\Phi_{yy}(t)$ umjesto y(t). Sada možemo uzeti da je ulaz y(t) bijeli šum, čija je autokorelaciona funkcija (pošto je potuno slučajna funkcija) delta funkcija, to jest:

$$\Phi_{yy}(\vartheta) \;=\; \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y(t)y(t-\vartheta)dt = \delta(\vartheta) \qquad (2.15)$$

Kros korelaciona funkcija $\Phi_{xy}(\vartheta)$ sistema sa ulazom koji je bijeli šum postaje tako, u potpunoj analogiji sa jednačinom (2.1):

$$\Phi_{xy}(\vartheta) \;=\; \int_0^{\infty} g(\tau)\delta(\vartheta-\tau)d\tau = g(\vartheta) \qquad (2.16)$$

gdje je $g(\vartheta)$ impulsni odziv tog sistema. Osim toga, pošto je $y(\vartheta)=0$ za svaki $\vartheta<0$, drugi integral u jednačini (2.10) može da bude u granicama od 0 do ϑ. Zbog toga, jednačina (2.16) postaje:

$$\Phi_{xy}(\vartheta) \;=\; \int_0^{\vartheta} g(\tau)\delta(\vartheta-\tau)d\tau = g(\vartheta) \qquad (2.17)$$

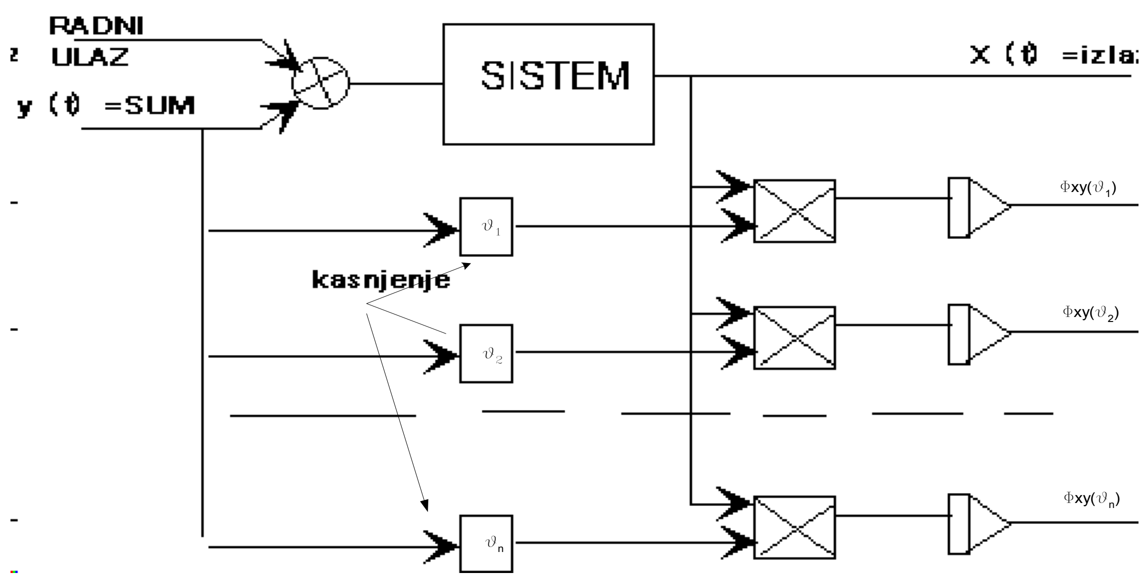
$\Phi_{xy}(\vartheta)$ opisuje odziv g(t) sistema na impuls u t= ϑ.

Identifikacija pomoću bijelog šuma kao ulaza

U praksi se ne može ostvariti ulaz y(t) kao idealni bijeli šum, jer idealni bijeli šum predstavlja čisto slučajni proces sa ravnim spektrom učestanosti koji se proteže do beskonačnosti. Medjutim, autokrelacioni integral nekog slučajnog procesa y(t) može da bude približno jednak delta funkciji ako je y(t) slučajni šum koji ima ravan spektar frekvencija ne do beskonačnosti ,nego do neke konačne frekvencije, koja je mnogo veća od propusnog opsega sistema, ili, ako predstavlja pseudo-slučajni binarni niz periodične prirode.

Da bi se omogućila “on-line” identifikacija, slučajni ili pseudoslučajni ulaz (čiji autokorelacioni integral aproksimira delta funkciju), mora se superponirati na normalni radni ulaz sistema. Odatle, ulaz sistema postaje Y(t) = R(t) + y(t) , a stvarni izlaz x(t) je odziv na Y(t) a ne na y(t). Kros korelacija za svrhe identifikacije, medujtim se vrši izmedju izlaza x(t) i slučajnog ili pseudoslučajnog dijela y(t) ukupnog ulaza, kako je prikazano na slijedećoj slici. 2.1. Pošto se ograničavamo na linearne sisteme, možemo definisati da je :

$$x(t) \equiv x_R(t) + x_y(t) \qquad (2.18)$$



Slika 2.1 Kros korelacija u sistemu sa šumom superponiranim na ulaz

gdje su $x_R(t)$ i $x_y(t)$ odzivi na radni dio ulaza T(t) , odnosno na slučajni dio ulaza y(t). Zamjenom sa x(t) iz jednačine (2.18) u jednačinu (2.8) odredjujemo:

$$\Phi_{xy}(\vartheta) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[\int_{-T}^{T} x_R(t)\,y(t-\vartheta)dt + \int_{-T}^{T} x_y(t)\,y(t-\vartheta)dt\right] \qquad (2.19)$$

gdje je, prema izvodjenju jednačina (2.9) do (2.16), samo drugi član u uglastim zagradama jednačine (2.19) je jednak g(ϑ). Medjutim, radni ulaz R(t) obično nije slučajan i ima spektar u uskom području frekvencija, dok je naprotiv y(t) slučajan i ima široki i ravan spektar frekvencija. Prema tome R(t) i y(t) su malo korelirani a to vrijedi i za x_R(t) i y(t). Prvi član u uglastim zagradama u jednačini (2.19) je zanemarljiv, i kroskorelacioni integral $\Phi_{xy}(\vartheta)$ izmedju y i x daje g(ϑ), čak ako se y(t) superponira na R(t). Posljednji rezultat dozvoljava "on-line" identifikaciju kada je amplituda y(t) dovoljno niska u odnosu na R(t), tako da zbog velikih promjena y(t) ne dolazi do promjene performansi sistema (tj. sistem ne dolazi u nelinearni režim).

Generiranje slučajnih i pseudoslučajnih nizova

Generiranje slučajnih brojeva

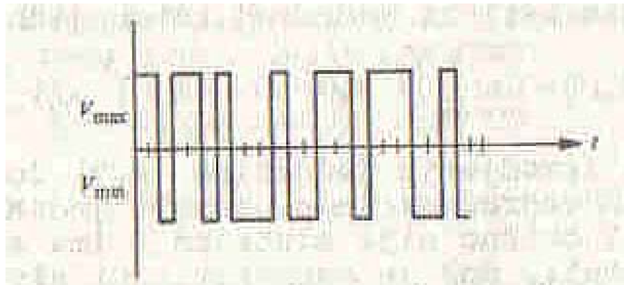
Generiranje bijelog šuma može se vršiti uz upotrebu nekog izvora šuma kao što je radioaktivni uzorak kojeg pobudjuje Gajgerov brojač. Binarni bijeli šum može se dobiti ako se izlaz Gajgerovog brojača vodi da okida "flip-flop" kola, a zatim na kolo koje odsjeca gornje i donje napone da bi se dobio izlaz koji ima vrijednosti V_{max} i V_{MIN} kao na slici 2.2.
Generiranje slučajnog niza pomoću digitalnog računara se zasniva na slijedećoj relaciji, modulo N:

$$y_{i+1} \equiv a\,y_i \,(\mathrm{mod}\,N) \;\; ; \;\; i = 0,1,2..... \qquad (2.20)$$

gdje su y, a i N cijeli brojevi, a

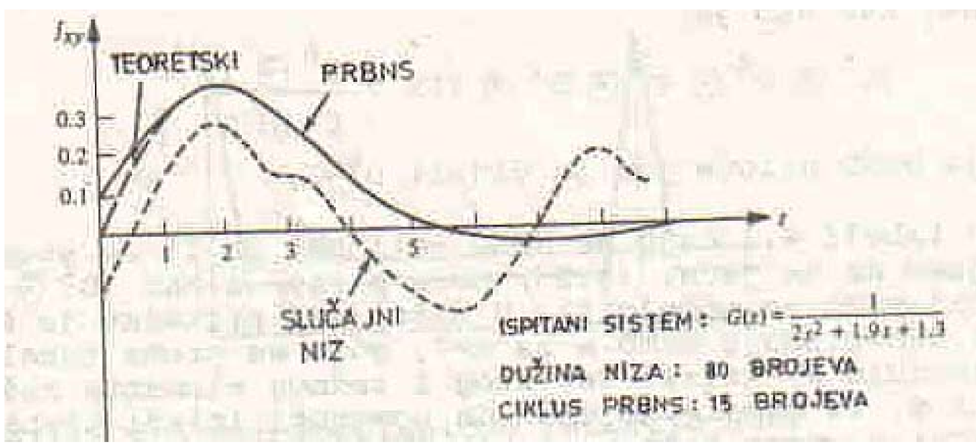
$$y_0 \neq 0(\mathrm{mod}\,N) \qquad (2.21)$$

Podsjetimo se da A=B(modN) znači da su A i B kongruentni modulo N , to jest, da A i B imaju isti ostatak kada se podjele sa N. Zbog toga, za neki početni izbor y , slučajni brojevi y su rezultat množenja prema jednačini (2.20), gdje je svaki proizvod reduciran modulo N (tj. predstavlja njegov ostatak nakon djeljenja sa N). Jednačina (2.20) podrazumjeva da su dobijeni slučajni brojevi raspodijeljenji izmedju 0 i N. Obično se N bira kao b^k gdje je b baza mašinske riječi (2 kod binarnih mašina), a k je cijeli broj: za y_0 pogodno je da se odabere 1, dok a treba da je uvjek veliko. Niz koji se generiše prema jednačini (2.20) je ustvari periodićan. Medjutim, kod pogodnog izbora a, N i k, period može da bude veoma dug (od 5 x 10^7 brojeva za a=7^{9} i N=10^{10}).



Slika 2.2 Signal binarnog šuma

Pseudo slučajni binarni nizovi- PSBN (ili PRBS · pseudo random binary sequence), vjerovatno su najpogodniji ulazi za svrhe identifikacije pomoću tehnike korelacionog integrala. Ti su nizovi po prirodi periodični, njihove periode su relativno kratke, ipak, njihov autokorelacioni integral daje zadovoljavajuću aproksimaciju delta funkcije. Zbog svoje osobine periodičnosti traže vrlo malu memoriju računara. Osim toga, njihov autokorelacioni integral bolje aproksimira delta funkciju nego drugi slučajni nizovi slične dužine (naprimjer, ako se uzme niz od 150 elemenata koji je proizveden pomoću pseudoslučajnog koda koji ima ciklus od 15 elemenata, i uporedi sa slučajnim nizom sa beskonačnom dužinom ciklusa).
Zbog toga je identifikacija obavljena uz upotrebu PSBN tačnija (vidjeti narednu sliku 2.3).



Slika 2.3 Poredjenje rezultata identifikacije zasnovanih na slučajnim i PSBN ulaznim nizovima jednake dužine

Pseudo slučajni niz maksimalne dužine

Nulti nizovi maksimalne dužine su binarni nizovi sa pseudoslućajnim osobinama koje imaju autokorelacionu funkciju približno jednaku impulsnoj funkciji i zbog toga se mogu upotrijebiti kao šum u postupku identifikacije pomoću korelacinog integrala. Ti se nizovi mogu lako generirati pomoću šift registara ili uz upotrebu jednostavnog digitalnog algoritma. Nulti niz maksimalne dužine zadovoljava linearnu diferentnu jednačinu (modulo 2) na slijedeći način:

$$D^m x \oplus D^{m-1}x \oplus .....Dx \oplus x = y \qquad (2.22)$$

gdje D^m označava kašnjenje od m intervala, tako da je $D^m\, x_i = x_{i-m}$, i je trenutak nastajanja uzorka: a $\oplus$ označava sabiranje modulo 2 , tako da je

$0 \oplus 0 = 0$; $0 \oplus 1 = 1$; $1 \oplus 0 = 1$; $1 \oplus 1 = 0$ pa je $(D \oplus D)\, x= 0 \quad \forall\, x$

Jednačina (2.22) može se pisati kao :

$$(D^m \oplus D^{m-1} \oplus \ldots\ldots \oplus D \oplus I)\, x = Y \qquad (2.23)$$

gdje je I operator identiteta. Niz $\{x_i\}$ koji zadovoljava jednačinu (2.22) stepena m sa Y=0 , naziva se ***nulti niz***. Nulti nizovi su periodičnog karaktera. Maksimalni broj elemenata u nekom nultom nizu stepena m je 2^m -1 , a dobijeni niz se naziva nulti niz maksimalne dužine (NNMD).
Polinomijalna jednačina oblika:

$$(D^m \oplus D^{m.1} \oplus \ldots\ldots \oplus D \oplus I)\, x = 0 \qquad (2.24)$$

koja daje NNMD, mora biti nereducibilna (tj. ne smije da bude proizvod dva ili više polinoma, nižeg stepena). Osim toga, ne treba da bude faktor modulo 2 od $D^n \oplus 1$ @ n< 2^m-1 , tj. ne smije da dijeli modulo 2 izraz $D^m \oplus 1$. Iz toga slijedi da se za m=5, NNMD daje sa :

$$(D^5 \oplus D^3 \oplus I)\, x = 0 \qquad (2.25)$$

što predstavlja niz od 2^5-1 = 31 elemenat. Medjutim, polinom petog reda , kao što je :

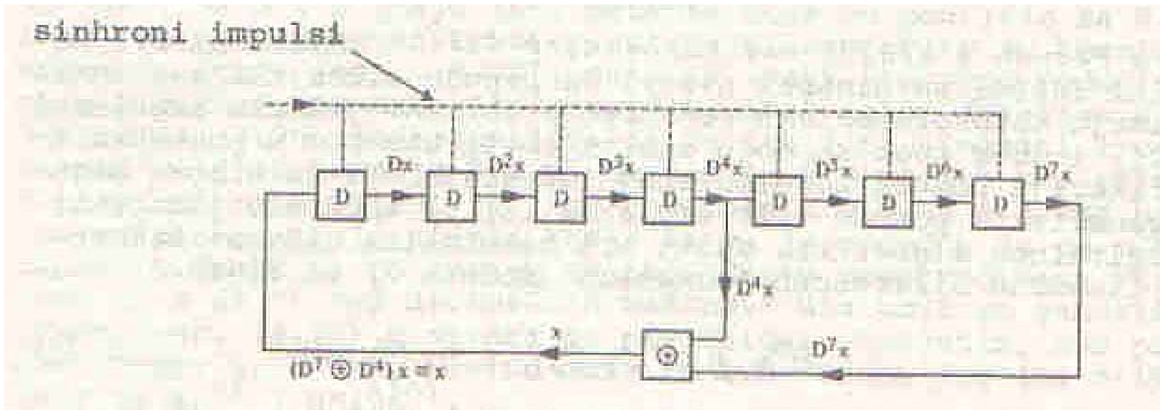
$$(D^5 \oplus D^4 \oplus D^3 \oplus D^2 \oplus I)\, x\ 0\ \frac{D^6 \oplus I}{D \oplus I} \qquad (2.26)$$

ne daje NNMD nizove jer se dijeli sa $D^6 \oplus I$.

U narednoj tabeli T 2.1 , dati su NNMD polinomi do 11-og reda. napomenimo da se jednačina (2.25) može pisati i kao

$$(D^5 \oplus D^3)\, x = x$$

jer se izražavamo sa modulo 2. Na narednoj slici 2.4 prikazan je šift registar za generiranje NNMD za m=7, gdje se prema tabeli T2.1 sabiraju (modulo 2) izlazi četvrtog i sedmog elementa kašnjenja da bi dobili x. Iz tabele se vidi da pomenuti izlazi treba da se vrate u prvi element šift registara. Početne vrijednosti logičkih promjenljivih u m stepena kašnjenja ne smiju sve da budu nule, jer bi se moglo desiti da šift registar svo vrijeme daje izlaz nula.



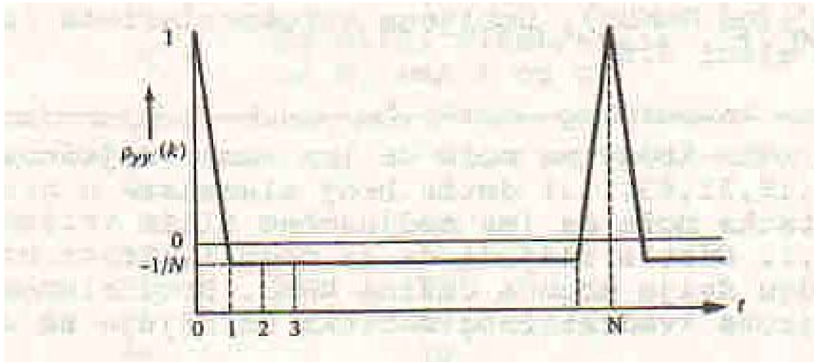
Slika br 2.4 Šift registar sa sedam elemenata za generiranje NNMD

NNMD kod je niz od nula i jedinica, čija je srednja vrijednost za $N=2^m-1$ približne jednaka N/2.

n	NNMD *polinom*
2	$(D^2 \oplus D)x \equiv x$
3	$(D^3 \oplus D)x \equiv x$
4	$(D^4 \oplus D^3)x \equiv x$
5	$(D^5 \oplus D^3)x \equiv x$
6	$(D^6 \oplus D^5)x \equiv x$
7	$(D^7 \oplus D^4)x \equiv x$
8	$(D^8 \oplus D^4 \oplus D^3 \oplus D^2)x \equiv x$
9	$(D^9 \oplus D^5)x \equiv x$
10	$(D^{10} \oplus D^7)x \equiv x$
11	$(D^{11} \oplus D^9)x \equiv x$

Tabela T 2.1

Ova srednja vrijednost daje autokorelacioni integral koji se razlikuje od idealne delta funkcije po srednjoj vrijednosti (napr. , uzmimo NNMD za period 15 ; odnos je 1: 111100010011010). Zbog toga, prednost imaju NNMD čiji su elementi 1,-1 umjesto 1,0. Oni imaju autokorelacioni integral kao na narednoj slici 2.5. Takav se niz naziva NNMDN (NNMD – negativni) niz.



Slika 2.5 Autokorelaciona funkcija NNMD

Primjer

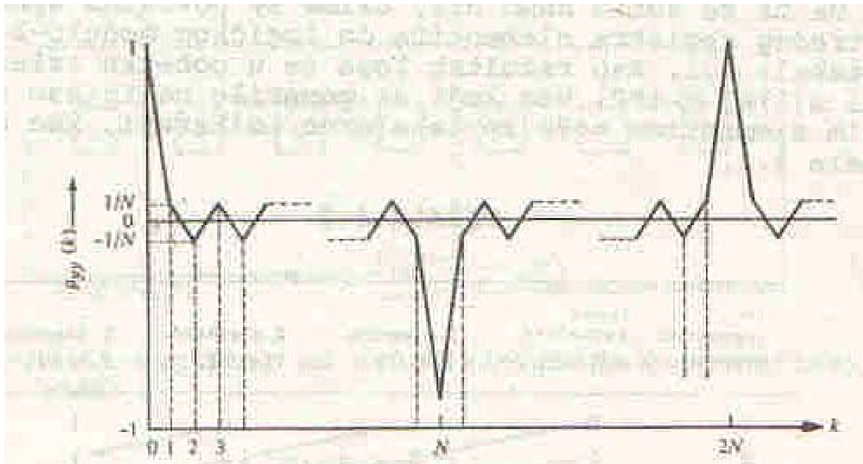
Da bi prikazali generiranje nekog NNMD niza razmotrimo troetapni šift registar. U početku su sve njegove etape u logičkom stanju 1. Da bi se dobio NNMD niz, uzima se povratna sprega iz prvog i trećeg registra elementima do logičkog modulo 2 sumatora, prema tabeli T 2.1. Kao rezultat toga će u početku izlaz sumatora biti x(1) = 1 $\oplus$ 1=0. Niz koji se generira na izlazu iz sumatora i u raznim elementima može se tabelarno prikazati, kao što se vidi iz naredne tabele T2.2.

i= vremenski interval	izlaz sumatora $X \equiv Y_1 + Y_3$	1. element $Y_1 \equiv DX$	2. element $Y_2 \equiv DY_1$	3. element $Y_3 \equiv DY_2$
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	0	1	0
5	1	0	0	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0
8	0	1	1	1

Tabela T2.2

U toj tabeli Y_i u intervalu i+1 je u stanju X; u intervalu i, tj. Y_i = D x. Isto tako , Y_2 u intervalu i+1 je Y_1 u intervalu i, a Y_3 u i+1 je Y_2 u i. Opažamo da su sva stanja u osmom intervalu (8= 2^3, gdje je eksponent 3 jednak broju elemenata šift registra) , identična prvom (početnom) intervalu (i=1). Dakle, ovaj šift registar će generirati niz od 7=2^3 -1 elemenata koji su dati sa; 0,1,0,0,1,1,1.

Postoji još jedan pseudoslučajni niz sa srednjom vrijednosti koja je čak bliža nuli nego kod NNMDN. To je NNMDN sa aperiodičnim promjenama znaka. On se dobije kada se mjenja znak svakog drugog elementa nekog NNMDN niza. Pošto je period NNMDN neparan, NNMDN sa periodičnim promjenama znaka ima period od 2N (tj. dva puta veći od NNMD). Dobijena autokorelaciona funkcija je prikazana na narednoj slici br. 2.6.



Slika 2.6 Autokorelaciona funkcija za NNMDN sa periodičnom promjenom znaka

Kodovi kvadratnog ostatka a^2 za pseudo-slučajne nizove.

Dok broj elemenata u NNMDN kodovima može da ima samo vrijednosti 2^i -1 (naprimjer, 3,7,15,31,63,…) dotle broj elemenata u nizovima kvadratičnog ostatka može da ima medjusobno bliže vrijednosti (3,7,11,19,23,…). Odatle slijedi da se mogu izabrati nizovi srednjih dužina izmedju dvije moguće dužine NNMD. Broj elemenata pseudoslučajnih nizova kvadratičnog ostatka odredjuje se sa:

$$N=4K-1 \; ; \; K = \text{cijeli broj} \quad ; \; N = \text{prosti broj} \qquad (2.27)$$

Nizovi kvadratičnog ostaka (vidjeti tabelu T2.3), generiraju se na slijedeći način:

Članu niza čiji je redni broj q jednak bilo kojem q^2 modN daje se vrijednost +1, dok se svim drugim članovima daje vrijednost -1.

Član čije je q=N može biti ili +1 ili -1. Prema tome za N=19, članovi čiji su brojevi q=1,4,5,6,7,9,11,16,17 imaju vrijednosti -1, dok su članovi sa q=2, 3,8,10,12,13,14,15,18 jednaki -1, a 19-i član može da bude +1 ili -1. U tabeli T2.3 opažamo da su q^2 mod N simetrični u odnosu na q=1/2(N-1), pa je potrebno da se računa (1 mod N) samo do (1/2 (N-1) članova. Za N=7 pseudoslučajni niz kvdratičnog ostatka je : 1,1,-1,1,-1,-1,1, ako je N-ti član +1. Odgovarajući NNMDN za N=7 potpuno je identičan (1,1,-1,1,-1,-1,1).

q	q^2	Najbliži višekratnik od N, manji od q^2	q^2 modulo N
1	1	0	1
2	4	0	4
3	9	0	9
4	16	0	16
5	25	19	6
6	36	19	17
7	49	38	11
8	64	57	7
9	81	76	5
10	100	95	5
11	121	114	7
12	144	133	11
13	169	152	17
14	196	190	6
15	225	209	16
16	256	247	9
17	289	285	4
18	324	323	1

Tabela T2.3 Nizovi kvadratičnog ostatka , N=19

Dobijanje frekventnog odziva iz korelacionih funkcija

Tehnika identifikacije pomoću korelacionog integrala koja se razmatra, daje impulsni odziv g(t) sistema koji se identifikuje, što omogućava identifikaciju preko impusnog odziva. Da bi se dobila prenosna funkcija G(s) sistema ili koeficijenti jednačina stanja, moraju se koristiti metode koje omogućavaju odredjivanje G(s) iz zapisa g(t).
Napomenimo da se grafičko opisivanje g(t) može dobiti ako se za neki pogodan broj vrijednosti ϑ proračuna g(ϑ) iz jednačine (2.15).

Posmatranjem kros korelacionog integrala iz jednačine (2.14), ponovo ćemo razmotriti ovaj integral kao konvolucioni integral gdje je :

$$\phi_{xy}(\vartheta) \equiv \xi(\vartheta) \qquad (2.28a)$$

i

$$\phi_{yy}(\vartheta) \equiv \eta(\vartheta) \qquad (2.28b)$$

dobijajući :

$$\xi(\vartheta) = \int_0^\infty g(\tau)\eta(\vartheta - \tau)d\tau \qquad (2.29)$$

Poznato je da se Laplaceova i Fourierova transformacija konvolucionog integrala daju pomoću :

$$\xi(s) = G(s)\,\eta(s) \tag{2.30a}$$

$$\xi(j\omega) = G(j\omega)\,\eta(j\omega) \tag{2.30b}$$

Iz toga se dobija:

$$G(j\omega) = \xi(j\omega) / \eta(j\omega) \tag{2.31}$$

gdje su:

$$\xi(j\omega) \equiv F\left\lfloor \phi_{xy}(\vartheta) \right\rfloor = \phi_{xy}(j\omega) \tag{2.32}$$

$$\eta(j\omega) = \equiv F\left\lfloor \phi_{yy}(\vartheta) \right\rfloor = \phi_{yy}(j\omega) \tag{2.33}$$

Ove dvije posljednje Fourierove transformacije mogu se proračunati pomoću FFT algoritma. Pošto bijeli šum y(t) ili pseudoslučajni ulaz, zadovoljavaju:

$$\phi_{yy}(\vartheta) \approx \delta(\tau) \tag{2.34}$$

dobijamo:

$$\phi_{yy}(j\omega) \cong 1 \tag{2.35}$$

što daje:

$$G(j\omega) = \xi(j\omega)/1 = \xi(j\omega) \tag{2.36}$$

Računarski aspekt

Da bi se proračunao g(ϑ) moramo proračunati kroskorelacionu funkciju jednačine (2.8), koja u diskretnom obliku postaje:

$$\phi_{xy}(k) = \frac{1}{(2M+1)} \sum_{i=-M}^{M} x_i\, y_{i-1} \qquad \wp\; k\;\; 0,1......(M-1) \tag{2.37}$$

$$k\Delta t \equiv \vartheta$$
$$M\Delta t \equiv T$$

Medjutim, pošto je x(t) =0 $\forall t \leq 0$, ϕ_{xy} *postaje*

$$\phi_{xy}(k) = \frac{1}{(M-k)} \sum_{i=1}^{M-k} x_{i+k}\, y_i \tag{2.38}$$

Ako se $G(j\omega)$ odredjuje iz jednačine (2.29), takodjer moramo proračunati $\Phi_{yy}(k)$ iz :

$$\phi_{yy}(k) = \frac{1}{(M-k)}\sum_{i=1}^{M-k} y_i y_{i+k} \qquad \wp k = 0,1,.......,(M-1) \qquad (2.39)$$

i iz toga izvesti Fourierovu transformaciju $\Phi_{xy}(j\omega)$ od $\Phi_{xy}(k)$ i $\Phi_{yy}(j\omega)$ od $\Phi_{yy}(k)$. Moguće je mnogo brže odredjivanje $\Phi_{xy}(j\omega)$ i $\Phi_{yy}(j\omega)$ kao i $G(j\omega)$, kada se prvo proračunaju Fourierove transformacije $X(j\omega)$ od $x(t)$ i $Y(j\omega)$ od $y(t)$ i gdje uopšte nije potrebno proračunavati $\Phi_{xy}(k)$ i $\Phi_{yy}(k)$. Ovo posljednje izvodjenje kojim se takodjer umanjuju greške zaokruženja zasniva se na :

$$\Phi_{xy}(j\omega) = X(j\omega)Y^*(j\omega) \qquad Y^* = \text{konjugovano od } Y \qquad (2.40)$$

$$\Phi_{yy}(j\omega) = Y(j\omega)Y^*(j\omega) \qquad (2.41)$$

gdje se $X(j\omega)$ ι $Y(j\omega)$ odredjuju primjenom postupka Fourierove transformacije na $x(t)$ i $y(t)$. Čak i kada su $\Phi_{xy}(k)$ i $\Phi_{yy}(k)$ potrebni sami po sebi, oni se mogu proračunati na taj način da se prvo nadje FFT jednačina (2.40) i (2.41) , a zatim se na njih primjeni inverzna brza Fourierova transformacija. Ovaj posljednji postupak opet će dati smanjenje greške zaokruženja i ubrzavanje proračuna u poredjenju sa odredjivanjem $\Phi_{xy}(k)$ i $\Phi_{yy}(k)$ prema jednaćinama (2.38) i (2.39), ako se obradjuje dugi niz podataka $x(t)$ i $y(t)$.

Jednačine (2.40) i (2.41) izvode se iz primjene Fourierove transformacije na $\Phi_{xy}(\vartheta)$ na slijedeći način:

$$\Phi_{xy}(j\omega) = F[\Phi_{xy}(\vartheta)] = \int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xz}(\vartheta)e^{-j\omega\vartheta}d\vartheta = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y(t-\vartheta)\right]e^{-j\omega\vartheta}d\vartheta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}y(t-\vartheta)e^{-j\omega\vartheta}d\vartheta\right]dt \qquad (2.42)$$

Zamjenom

$$t' \equiv t-\vartheta \qquad (2.43)$$

dobijamo nakon promjene granica i predznaka unutrašnjeg integrala:

$$\Phi_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}y(t')e^{-j\omega(t-t')}dt'\right]dt = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}y(t')e^{j\omega t'}dt'\right]dt \qquad (2.44)$$

Opažamo da je član u uglastim zagradama posljednjeg dijela jednačine (2.44) jednak $Y^*(j\omega)$. Prema tome, jednačina (2.40) je zadovoljena.

Zamjena $\Phi_{xy}(j\omega)$ i $\Phi_{yy}(j\omega)$ iz jednačina (2.40) i (2.41) u jednačinu (2.31) daje:

$$G(j\omega) = \frac{X(j\omega)Y^*(j\omega)}{Y(j\omega)Y^*(j\omega)} = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} \qquad (2.45)$$

Odavde se $G(j\omega)$ može odrediti ako se proraćunaju samo $X(j\omega)$ i $Y(j\omega)$ i podjele prema jednačini (2.45). Medjutim, ovo dijeljenje je prilićno neugodno u odnosu na proračunavanje $\Phi_{xy}(j\omega)$, Zbog toga, a imajući na umu da je $\Phi_{yy}(j\omega)$=1 za bijeli šum, kao u jednačini (2.35), znatno je brže da se $G(j\omega)$ izvodi iz jednačine (2.36), gdje se izbjegava dijeljenje.

Uporedjenjem jednačina (2.41) sa jednačinom (2.35), dalje opažamo da je :

$$|Y(j\omega)| = \sqrt{\phi_{yy}(j\omega)} = 1 \qquad (2.46)$$

Zamjenom ovog rezultata u jednačinu (2.45), podrazumjeva se da se dijeljenjem $X(j\omega)/Y(j\omega)$ gubi informacija o fazi.
Za svaki ulazni niz od N elemenata sa dužinom Nt, interval t odredjuje najveću frekvenciju koja se može identifikovati u dobijenom frekventnom odzivu ako se $G(j\omega)$ računa prema jednačini (2.31) ili (2.36).

Granice i i k sume u jednačinama (2.38) i (2.39) daju da dužina N ulaznog niza treba da bude najmanje 2M, gdje je M opseg od interesa u zapisivanju g(t). U slučaju NNMD kodova sa ponavljanom izmjenom, čiji je period 2N elemenata, potrebno je da je N $\geq$ 2M, gdje je N polovina perioda 2N, kako bi se izbjegli ostali vrhovi u autokorelacionim funkcijama šuma, kao na slikama 2.5 i 2.6.

3. IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE REGRESIJE

Regresiona analiza je odavno postala klasično statističko sredstvo. Zbog širokog područja primjenjljivosti tehnike regresije na proces identifikacije, prirodno je da je ona prihvačena u tehnici sistema, iako njena primjena na "on-line" identifikaciju sa više promjenjljivih postaje prihvaćena tek kada su se pojavili brzi računari.

Tehnike identifikacije koje se zasnivaju na regresiji na osnovu najmanje sume kvadrata mogu se primjeniti kako na linearne tako i na nelinearne procese, i omogućuju identifikaciju sistema sa više simultanih ulaza. Osim toga, tehnike regresije se zasnivaju na mjerenjima ulaz/izlaz koja se mogu vršiti u toku normalnog rada procesa, omogučavajući na taj način "on-line" identifikaciju sve dotle dok se ne pojavi neki prelazni proces.
U periodu u kojem se vrše mjerenja u cilju identifikacije pomoću regresije, predpostavlja se da postoji stacionarnost ili kvazistacionarnost identifikovanih parametara procesa. Ovaj period treba da bude veći od mT, gdje je T interval uzimanja uzoraka , a m je broj parametara koji se identifikuju.

Ako je potrebna identifikacija m koeficijenata u svakoj od n simultanih jednačina oblika:

$$x_j = a_{0j} + a_{1j}u_1 + a_{2j}\, u_2 + \ldots\ldots\ldots.. a_{mj}u_j \quad (j =1,2,\ldots.n) \qquad (3.1\ )$$

i ako se u svih n jednačina javlja isto u_i (i=1,2,..m), svi a_{ij} $\forall$ i,j mogu se identifikovati mjerenjem kroz m+1 trenutaka. Prema tome, mogu se simultano identifikovati koeficijenti gornjih n jednačina , kako će se vidjeti iz narednog opisa.

Prethodno smo napomenuli da tehnike regresije traže akumuliranje podataka ulaz/izlaz u nestacionarnom stanju, kroz najmanje m+1 interval uzimanja uzoraka, prije nego što se može izvršiti regresija. Odatle proizlazi da se u i-tom intervalu regresiona identifikacija zasniva na podatcima od (i-m-p)-tog intervala (p $\geq$ 0), od i-tog intervala. Slično tome, u (i+1)-om intervalu ova identifikacija se zasniva na podatcima od (i-m-p+1)-og intervala do (i+1)-og intervala, čime se omogućava otkrivanje nestacionarnosti.
Iz daljeg teksta se vidi da odredjivanje parametara regresije, ako je potrebno identifikovati više od jednog parametra, traži matričnu inverziju. Sekvencijalna formulacija tehnike regresije kojom se izbjegava inverzija matrice će se razmatrati u posebnom poglavlju.

IDENTIFIKACIJA STATIČKOG SISTEMA SA JEDNIM ULAZOM

Razmotrimo linearni statički sistem sa naredne slike 3.1 , koji ima m ulaza $u_1 \ldots.. u_m$ i jedan izlaz x. Ovaj se sistem može opisati pomoću linearne jednačine:

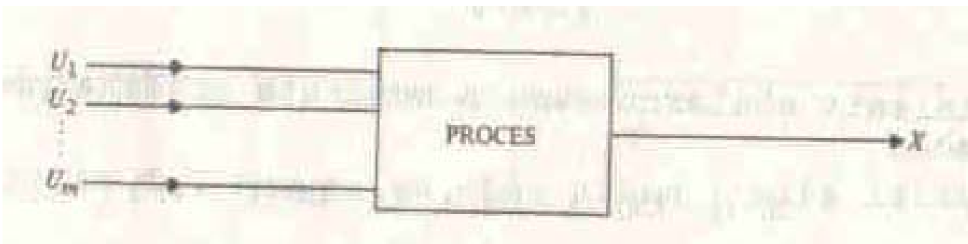
$$x = a_0 + a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots.. a_mu_m \qquad (3.2)$$

Uzimajući r skupova mjerenja x, u_j (j=0,1,…m), možemo odrediti a_i na slijedeći način:

Prvo se stave u memoriju r skupova mjerenja x i u_j. Zatim se iz ovih r skupova mjerenja računaju x i U, gdje je $\bar{X}$ srednja vrijednost od x, a $\bar{U}$ je srednja vrijednost od u , za navedenih r skupova mjerenja. Definišuću da je :

$$x \equiv X - \bar{X} \qquad (3.3)$$

$$u \equiv U - \bar{U} \qquad (3.4)$$



Slika 3.1 Proces sa jednim ulazom

jednačina (3.1) postaje:

$$x = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\, a_mu_m \qquad (3.5)$$

ili u vektorskom obliku:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}^T \mathbf{a} \qquad (3.6)$$

gdje su **u** i **a** vektori kolone sa elementima u_j odnosno a_j. Prema tome, r skupova mjerenja zadovoljavaju:

$$x_{(1)} = \mathbf{u}^T_{(1)}\ \mathbf{a}$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$x_{(\mu)} = \mathbf{u}^T_{(\mu)}\ \mathbf{a} \qquad (3.7)$$
$$\ldots\ldots$$
$$x_{(r)} = \mathbf{u}^T_{(r)}\ \mathbf{a}$$

gdje μ pokazuje $\mu -$ ti skup mjerenja, x, u^T ; ($\mu = 1,2,\ldots r$). Dalje definišemo vektor χ i matricu **U** na slijedeći način:

$$\chi = [x_1, \ldots\ldots x_\mu \ldots\ldots x_r] \qquad (3.8)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(1)}^T \\ \\ \mathbf{u}_{(\mu)}^T \\ \\ \mathbf{u}_{(r)}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1(1)} & . & u_{j(1)} & . & u_{m(1)} \\ . & . & & & . \\ u_{1(\mu)} & & & & u_{m(\mu)} \\ . & & & & . \\ u_{1(r)} & . & . & . & u_{m(r)} \end{bmatrix} \qquad (3.9)$$

Iz ovoga, jednačina (3.7) može se pisati u vektorskom obliku:

$$\chi = \mathbf{U}\,\mathbf{a} \qquad (3.10a)$$

Predpostavljajući da su elementi od a jednačina (3.10a) procjene $\hat{a}$ stvarnih vrijednosti **a** , jednačina (3.10a) daje procjene $\hat{\mathrm{X}}$, od χ , tako da :

$$\hat{\mathrm{X}} = \mathrm{U}\,\hat{\mathbf{a}} \qquad (3.10b)$$

Možemo definirati skalarnu sumu S kvadrata grešaka procjene na slijedeći način:

$$S \equiv (\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^{\mathrm{T}} (\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}) = \mathrm{tr}\,[(\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})\ (\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^{\mathrm{T}}\,] \qquad (3.11)$$

gdje tr[….] pokazuje trag matrice [….]. Najbolja procjena **a** u smislu minimalne sume kvadrata grešaka, mora zbog toga da zadovolji izraz:

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{a}_i} = 0 \qquad \forall i \in (1, m) \qquad (3.12)$$

ili u vektorskom obliku :

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = \frac{\partial tr\left[(\mathbf{X} - \mathbf{U}\hat{a})(\mathbf{X} - \mathbf{U}\hat{a})^T \right]}{\partial \hat{a}} = \frac{\partial tr(\mathbf{X}\mathbf{X}^T + \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{X}^T - \mathbf{X}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{U}^T)}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = 0 \quad (3.13)$$

Prema matričnom računu funkcija traga je jednaka:

$$\frac{\partial tr(\mathbf{X}\mathbf{X}^T + \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{X}^T - \mathbf{X}\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T)}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = 0 + 2\mathbf{U}^T\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{U}^T\mathbf{X} - \mathbf{U}^T\mathbf{X} \qquad (3.14)$$

$$= 2(\mathbf{U}^T\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{U}^T\mathbf{X}) = 0$$

Dosljedno tome, najbolja procjena $\hat{\mathbf{a}}^*$ za **a** u smislu minimalne sume kvadrata grešaka zadovoljava:

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}^* = \mathbf{U}^T\mathbf{X} \qquad (3.15)$$

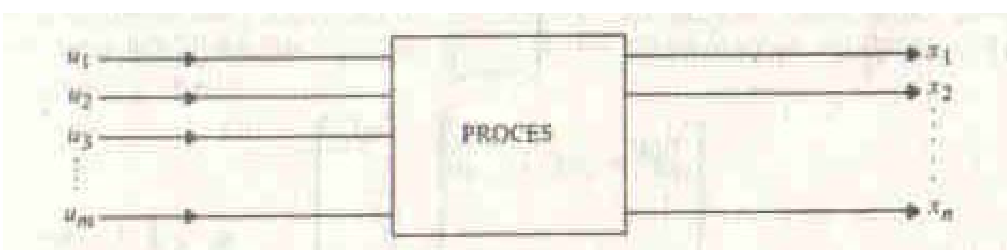
tako da je:

$$\hat{\mathbf{a}}^* = (\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{X} = \left[\hat{a}_1^*, \hat{a}_2^*, ...\hat{a}_m\right]^T \qquad (3.16)$$

što daje linearnu identifikaciju **a** pomoću regresije najmanjih kvadrata. Primećujemo da $(\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}$ postoji samo onda ako ni jedna kolona od **U** nije linearna kombinacija drugih kolona. Osim toga, tražimo da je r$\geq$ m , da bi se izbalansirale sve vrste u jednačini (3.16), gdje r označava broj mjerenja x i u. Medjutim, ako je r=m, procjenjeno $\hat{X}$ neće uopšte filtrirati šum koji se javlja u toku mjerenja, pa tražimo da je r$\geq$ m umjesto r=m. Ovaj posljednji zahtjev podrazumjeva da se za odgovarajucu identifikaciju mora uzeti najmanje (m+1) trenutaka mjerenja (intervala mjerenja), a predpostavlja se da u ovom periodu postoji stacionarnost.

IDENTIFIKACIJA STATIČKOG SISTEMA SA VIŠE ULAZA I IZLAZA

Proces koji ima m ulaza i n izlaza, kao na narednoj slici 3.2 , može se analogno procesu sa jednim izlazom, opisati pomoću slijedećeg skupa jednačina:



Slika 3.2 Proces sa više ulaza i više izlaza

$$x_1 = a_{11}u_1 + \ldots\ldots + a_{1j}u_j \ldots\ldots + a_{1m}u_m$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$x_i = a_{i1}u_1 + \ldots\ldots + a_{ij}u_j \ldots\ldots + a_{im}u_m \tag{3.17}$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$x_n = a_{n1}u_1 + \ldots\ldots + a_{nj}u_j \ldots\ldots + a_{nm}u_m$$

ili u vektorskom obliku:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\ \mathbf{u} \tag{3.18}$$

gdje su

$$\mathbf{x} \equiv (x_1, \ldots\ldots x_i \ldots\ldots x_n)^T \tag{3.19}$$

$$\mathbf{u} \equiv (u_1, \ldots\ldots u_i \ldots\ldots u_m)^T \tag{3.20}$$

i

$$\mathrm{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1m} \\ & & \\ & & \\ a_{n1} & & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Svaki red jednačina (3.17) ili (3.18) potpuno je istog oblika kao i jednačina (3.5) ili (3.6), za problem sa jednim izlazom. Prema tome, možemo pisati i-ti red jednačine (3.17) na slijedeći način:

$$x_i = \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}_i \tag{3.22}$$

gdje je :

$$\mathbf{a}_i \equiv \left[a_{i1} a_{i2} \ldots\ldots a_{ij} \ldots. a_{im}\right]^T \tag{3.23}$$

Opet, analogno procesu sa jednim izlazom, za r skupova mjerenja x_i ($r \geq m+1$) , i u_j (i=1,…..n; j=1,….m) , dobijemo da je:

$$\mathbf{X}_i \equiv \begin{bmatrix} x_{i(1)} \\ \\ x_{i(\mu)} \\ \\ x_{i(r)} \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

$$\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} u_{1(1)} & . & . & . & u_{m(1)} \\ \\ u_{1(\mu)} & & & & u_{m(\mu)} \\ \\ u_{1(r)} & . & . & . & u_{m(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(1)}^T \\ \\ . \\ \\ \mathbf{u}_{(r)}^T \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

gdje indeks u zagradi μ označava μ – ti skup mjerenja $\mu =$ (1,2,….r) a **U** je kao u jednačini (3.9). Prema tome, r skupova mjerenja zadovoljava za i-ti izlaz:

$$\begin{aligned} x_{i(1)} &= \mathbf{u}_{(1)}^T \, \mathbf{a}_i \\ \dots & \quad \dots \\ x_{i(\mu)} &= \mathbf{u}_{(\mu)}^T \, \mathbf{a}_i \\ \dots & \quad \dots \\ x_{i(r)} &= \mathbf{u}_{(r)}^T \, \mathbf{a}_i \end{aligned} \tag{3.26a}$$

ili u matričnom obliku:

$$\chi_{\mathbf{i}} = \mathbf{U}\,\mathbf{a}_{\mathbf{i}} \tag{3.26b}$$

Pošto je jednačina (3.26) potpuno analogna jednačinama (3.7) i (3.8) za slučaj jednog izlaza, najbolja procjena $\hat{\mathbf{a}}_i^{\,*}$ za a_i za svako i, regresije, u smislu najmanje sume kvadrata, zadovoljava:

$$\hat{\mathbf{a}}_i^{\,*} = (\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}\,\mathbf{U}^T\,\chi_{\mathbf{i}} = \left(\hat{a}_{i1}^{\,*} \,\dots\dots\dots\dots\dots\dots\, \hat{a}_{mi}^{\,*} \right) \tag{3.27}$$

Izvodjenje jednačine (3.27) je zbog toga identično izvodjenju jednačine (3.16) kada se svi **a** , χ iz jednačine (3.6) do (3.16) zamjene sa $\mathbf{a_i}$, $\chi_\mathbf{i}$ koji su definisani sa jednačinama (3.23) i (3.24).

Identifikacija $\hat{\mathbf{a}}_i^*$ prema jednačini (3.27) podrazumjeva da je r $\geq$m+1, kao i u slučaju jednog izlaza. Pošto se razmatra ista matrica mjerenja **U** za sve i (gdje i označava i-ti red jednačine (3.18), možemo potpuno identifikovati sve elemente od **A**, u (m+1) trenutaka mjerenja, gdje se $\mathbf{a}_\mathrm{i}$ simultano identifikuje za sve i.

IDENTIFIKACIJA LINEARNIH DINAMIČKIH SISTEMA POMOĆU REGRESIJE

Linearni dinamički sistem može se opisati pomoću slijedeće jednačine stanja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{u} \qquad (3.29)$$

gdje su **x i u** n-dimenzionalni vektor stanja odnosno m-dimenzionalni vektor upravljanja (ulaza). U diskretnom obliku jednačina (3.28) može se pisati kao:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_\mathbf{k} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}_k \qquad (3.29\ )$$

gdje je t= k $\triangle$t , a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{I} + \Delta t\,\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & . & . & . & b_{1m} \\ & & & & \\ & & & & \\ b_{n1} & & & & b_{nm} \end{bmatrix} \equiv \Delta t\boldsymbol{\beta}$$

Sada uvodimo definicije:

$$\mathbf{w}_\mathrm{k} \equiv (x_{1k}.....x_{nk};u_{1k}.....u_{mk})^T \equiv (w_{1,k}.......w_{n+m,k})^T = (n+m)\,1-cni\ vektor \qquad (3.30)$$

$$\phi \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} & b_{11} & b_{1m} \\ \\ \\ a_{n1} & a_{nn} & b_{n1} & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\varphi}_1)^T \\ \\ \\ (\boldsymbol{\varphi}_n)^T \end{bmatrix} \qquad (3.31)$$

Prema tome jednačina (3.29) postaje:

$$x_{k+1} = \Phi\ \mathbf{w}_k \qquad (3.32)$$

koja je istog oblika kao jednačina (3.18). Ako memoriramo r skupova mjerenja (r $\geq$ n+m+1), tada $\mathbf{x}_{k+1}$, $\mathbf{w}_k$ (tj. $\mathbf{x}_{k+1,}$ $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{u}_k$), elementi od Φ mogu se identifikovati pomoću postupka linearne regresije najmanje sume kvadrata. Iz toga se i-ti red procjene Φ_ι od Φ u smislu najmanje sume kvadrata daje sa:

$$(\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i^*)^T = \left[(\mathbf{W}_k)^T W_k\right]^{-1} (\mathbf{W}_k)^T \mathbf{X}_{i,k+1} = \left[a_{1i} \ldots\ldots a_{ni}; b_{1i} \ldots\ldots b_{mi}\right] \qquad (3.33)$$

gdje, analogno jednačini (3.25)

$$\mathbf{W}_k \equiv \begin{bmatrix} w_{1(1)k} & . & . & . & w_{m+n(1)k} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ w_{1(r)k} & . & . & . & w_{m+n(r)k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1(1)k} & . & x_{n(1)k} & u_{1(1)k} & . & u_{m(1)k} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ x_{1(r)k} & . & x_{n(r)k} & u_{1(r)k} & . & u_{m(r)k} \end{bmatrix} \qquad (5.34)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{i,k+1}} = [\, x_{i\,(1)k+1}, \ldots\ldots x_{i,(\mu)k+1} \ldots\ldots x_{i,(r)k+1}\,]^T \qquad (3.35)$$

gdje $x_{i(\mu)k+1}$ označava μ-to mjerenje i-tog stanja x_{k+1} (μ= 1,2,...r), a r je broj skupova mjerenja $\mathbf{W}_k$, $\mathbf{x}_{k+1}$. Opažamo da za identifikovanje Φ moramo da memoriramo r skupova $\mathbf{x}_{k+1}$ i skupova mjerenja vektora $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{u}_k$ koji pripadaju jednom integracionom intervalu Δt ranije (označenom kao $\mathbf{w}_k$). Može biti moguće da se izmjeri i memorira više skupova **x** i **u** u toku nekog intervala Δt , tako da je interval uzimanja uzoraka (ili mjerenja) τ = ν Δt (gdje je 1/ν = cijeli broj), sve dok je u svakom intervalu uzimanja uzoraka ovo $\mathbf{x}_k$ dovedeno u vezu sa $\mathbf{w}_k$ koje pripada ν intervala ranije, da bi dalo $\mathbf{x}_{k+1}$ i

$\mathbf{x}_k$, $\mathbf{u}_k$ što je potrebno za identifikovanje Φ. Odatle , $u_{j(\mu)k}$ pripada skupu mjerenja koja su uzeta (r-μ) intervala prije $u_{j(r)k}$, i (ν+r-μ) intervala prije $x_{i(r)k+1}$. U cjelini, za identifikovanje **A i B** , prema jednačini (3.33) potrebno je memoriranje 2r skupova mjerenja **u.**

Pri ovom izvodjenju predpostavlja se da se mogu provesti mjerenja vektora stanja **x**. U opštem slućaju su moguća samo mjerenja izlaznog vektora **y** , gdje je:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{n} \;:\; \mathbf{n} = \text{ vektor šuma} \qquad (3.36)$$

Može se desiti da nije moguće neposredno identifikovati **A** i **B** iz **y** jer sistem nije observabilan. Medjutim, pošto su za sistem koji se identifikuje predpostavlja da je observabilan, **A** i **B** se mogu identificirati iz odnosa ulaz/izlaz kao u narednom tekstu, a zatim se može provesti transformacija u **A** i **B**. Osim toga, ako je dimenzija n vektora stanja **x** apriori nepoznata, postupak koji je opisan u nastavku teksta sa prenosnom funkcijom može dati n.

DOBIJANJE MODELA SISTEMA SA VIŠE ULAZA i JEDNIM IZLAZOM U OBLIKU PRENOSNIH FUNKCIJA

Model ulaz/izlaz

Identifikacija pomoću regresije iz prethodnog teksta odnosi se na formulaciju modela u prostoru stanja sistema , što je vidljivo i iz jednačina (3.28) i (3.29). Ako je potrebna identifikacija modela u obliku prenosne funkcije, može se zatim izvršiti transformacija iz prostora stanja u model u obliku prenosne funkcije. Takodjer je moguća i neposredna identifikacija prenosnih funkcija. Predpostavlja se da se proces opisuje preko prenosnih funkcija slijedećeg oblika:

$$G_i\,(s) = \frac{e^{\tau_i s}(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_0)_i}{(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ...1)_i} = \frac{x}{u_i} \qquad (3.37)$$

gdje su u_i ulazi , a x je mjerljivi izlaz.

Iako se ovdje razmatraju deterministički ulazi i izlazi formulacija sistema preko prenosnih funkcija iz jednačine (3.37), takodjer vrijedi i za stohastičke sisteme , gdje je u nemjerljivi šum y na ulazu. U tom slučaju, diskretna verzija jednačine (3.37) daje model koji je iz literature poznat kao mješani autoregresivni model pokretne srednje vrijednosti, koji se kasnije koristi za identifikaciju sa šumom na ulazu i izlazu.

U ovom dijelu će se modeli prenosnih funkcija uzimati u diskretnom obliku što je pogodnije za proračun na digitalnom računaru. Radi toga se prvo na jednačinu (3.37) primjenjuju metode diskretizacije koje se zasnivaju na z-transformaciji. Tako se dobija diskretni model prenosne funkcije, koji će se kasnije identifikovati.

Uzmimo sistem dat jednačinom (3.37) formuliran u vremenskom domenu , gdje je:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = b_m \frac{d^m u(t-\tau)}{dt^m} + ... + b_1 \frac{du(t-\tau)}{dt} +$$

$$+ b_0 u(t-\tau) \qquad (3.38)$$

Jednačina (3.38) može se aproksimirati preko konačnih razlika tako da se dx/dt predstavlja sa [x(t)-x(t-T)]/T. Imajući na umu da je z^{-1} operator pomaka unazad, možemo pisati da je :

$$\frac{x(t)-x(t-T)}{T} = \frac{(1-z^{-1})x(t)}{T} \qquad (3.39)$$

Primjenjujući obilježavanje operatora pomaka unazad koje su uveli Box , Jenkins i Bacon, gdje je:

$$B \equiv z^{-1} \qquad (3.40)$$

Jednačina (3.39) postaje :

$$\frac{x(t)-x(t-T)}{T} = \frac{(1-B)x(t)}{T} \qquad (3.41)$$

Prema tome, sa zamjenom

$$\tau \equiv pT \qquad (3.42)$$

jednačina (3.38) se može aproksimirati sa

$$(\alpha_n B^n + \alpha_{n-1}B^{n-1} + ... + \alpha_1 B + 1)x(t) = B^p(\beta_m B^m + \beta_{m-1}B^{m-1} + ... + \beta_1 B + \beta_0)u(t) \quad (3.43)$$

Sada se lako izvode relacije izmedju α_i (za svako i=1,..n) ; β_j (j=0,..m). i a_i (za svako i=1,..n) i b_j (za svako j=0,..m).

U slučajevima gdje postoji više ulaza mogu se za svaki ulaz ustanoviti modeli oblika jednačine (3.43) , tako da se u toj jednačini uzima u_i (t) umjesto u(t). Kad se proces sastoji od više neinteraktivnih ulaza, model oblika (3.43) vrijedi za svaki izlaz. Sada ćemo dokazati da ovaj model takodjer odgovara za slučajeve više interaktivnih izlaza.

Uzimamo sistem koji ima dva interaktivna izlaza $x_1(t)$ i $x_2(t)$. Diskretni model prenosne funkcije za taj sistem daje se sa:

$$x_1(t) = \alpha_1 x_1(t-1) + \beta_1 x_2(t-1) + \Upsilon_1 u(t-1) + \alpha_2 x_1(t-2) + \beta_2 x_2(t-2) + \Upsilon_2 u(t-2) + \alpha_3 x_1(t-3) + ... \qquad (3.44a)$$

$x_2(t) = \delta_1 x_1(t-1) + \varepsilon_1 x_2(t-1) + \eta_1 u(t-1) + \delta_2 x_1(t-2) + \varepsilon_2 x_2(t-2) + \eta_2 u(t-2) + \delta_3 x_1(t-3) + ...$ (3.44b)

Zamjenom x_2 iz jednačine (3.44b) u jednačinu (3.44a) dobijamo da je :

$(1-\alpha_1 B - \alpha_2 B^2 -........) x_1 =$

$$\frac{(\delta_1 B + ...)(\beta_1 B + ..)x_1}{1-\varepsilon_1 B - \varepsilon_2 B^2 - ...} + (\gamma_1 B + \gamma_2 B^2 + ... + \frac{(\eta_1 B + ..)(\beta_1 B..)}{1-\varepsilon_1 B - \varepsilon_1 B - ..})u \qquad (3.45)$$

što daje :

$$(1+ \xi_1 B + \xi_2 B^2 +......)x_1 = (\omega_1 B + \omega_2 B^2 + ...) u \qquad (3.46)$$

gdje se x predstavlja samo pomoću njegove vlastite historije i historije ulaza , kao i u slućaju jednog izlaza.

Važno je uoćiti da n, m i p treba da budu unaprijed zadati. Medjutim, u opštem slučaju može se uzeti da je največa vrijednost m+p jednaka M. Proračun se izvodi tako da se u svakom koraku računaju regresioni koeficijenti jednačine

$$(\alpha_n B^n + \alpha_{n-1} B^{n-1} +......+ \alpha_1 B +1)x(t) = (\Upsilon_{m+p} B^{m+p} + \Upsilon_{m+p-1} B^{m+p-1} + ... \Upsilon_1 B + \Upsilon_0)u(t) \qquad (3.47)$$

i odredjuju parametri α_i ; Υ_j. U početku se predpostave neke vrijednosti n_0=N ; m_0+p_0=M i za njih se odrede α_i ; Υ_j , kao i vrijednost greške za te vrijednosti α_i ; Υ_j . Zatim se u svakoj iteraciji predpostavljaju druge vrijednosti za n ili za m+p i za svaku od njih se računaju α_i ; Υ_j i odgovarajuća greška. Na kraju se usvajaju one vrijednosti m i n+p koje daju približni minimum greške uz najnižu vrijednost m+n+p. Konačno, nakon dijeljenja lijeve i desne strane polinoma iz jednačine (3.47) dobijaju se n , m i p tako da:

$$\Upsilon_j = 0 \text{ za svako } j = 0,1...q \qquad (3.48a)$$

je zadovoljeno , stepen p se daje sa:

$$p=q+1 \qquad (3.48b)$$

a β_m iz jednačine (3.43) odredjuje se iz :

$$\beta_u = \Upsilon_{q+1+\mu} \quad \forall\ \mu = 0,1....m \qquad (3.48c)$$

Za prve predpostavke najvišeg stepena n_0 i m_0+p_0 , najveći broj potrebnih iteracija biće $1+\log_2 (m_0 + n_0 + p_0)$, kada se raspon n_0 ili m_0+p_0 prepolovljava pri svakoj iteraciji.

Primječujemo da se terminologija mješanih autoregresionih modela pokretne srednje vrijednosti neposredno primjenjuje na jednačinu (3.47), gdje se , za $\gamma_1 = \gamma_{m+p} = 0$, preostali dio jednačine može shvatiti kao jednačina regresije x i sa njegovim minulim vrijednostima tako da su α_i koeficijenti autoregresije. Medjutim, za $\alpha_i = 0$ za svaki i i j $\neq 0$, ova jednačina postaje jednačina pokretne srednje vrijednosti , gdje su γ_j koeficijenti pokretne srednje vrijednosti kada je u(t) nedeterminističko.

IDENTIFIKACIJA SA NAJMANJOM VARIJANSOM i FUNKCIJOM VJERODOSTOJNOSTI

Razmotrimo sistem koji je zadan sa;

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{n} \qquad (3.49a)$$

gdje su **z** i **n** vektori k-dimenzionalnog mjerenja i mjernog šuma, a k označava redni broj mjerenja , i

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}\,\mathbf{a} \qquad (3.49b)$$

gdje su **U** i **x** matrica ulaza odnosno vektori izlaza i parametara, kao u jednačini (3.10). Predpostavljamo da raspolažemo sa k skupova mjerenja i da **n** ima Gaussovsku zajedničku raspodjelu tako da

$$p(\mathbf{n}) = f(\mathbf{N},k)\exp(-\mathbf{n}^T\,\mathbf{N}^{-1}\mathbf{n}/2) \qquad (3.50a)$$

$$E(\mathbf{n}) = \mathbf{0} \qquad (3.50b)$$

$$E(\mathbf{n}\,\mathbf{n}^T) = \mathbf{N} \qquad (3.50c)$$

gdje E označava oćekivanje a f je skalarna funkcija od **N** i k. Prema tome, ako je očekivanje N apriori poznato, možemo izvesti linearnu procjenu sa najmanjom varijansom (procjenu Markova) vektora parametara **a** jednačine (3.49b) na slijedeći način:

Opažajući da se u jednačinama (3.49a) i (3.49b) procjena $\hat{\mathbf{a}}$ parametara **a** vezana sa $\hat{\mathbf{n}}$ preko:

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{z} - U\,\hat{\mathbf{a}} \qquad (3.51)$$

definišemo *funkciju vjerodostojnosti* p ($\hat{\mathbf{n}}$) , tako da je :

$$p(\hat{\mathbf{n}}) = p(\mathbf{z} - U\,\hat{\mathbf{a}}) \qquad (3.52)$$

Procjena $\hat{\mathbf{a}}$ od **a** koja maksimizira ln p(**n**) se daje sa:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{a}}}\left[\ln\left[p(\mathbf{z}-\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})\right]\right]=0 \qquad (3.53)$$

gdje p(...) označava vjerovatnoću od (......) . Zamjenom sa p(**n**) iz jednačine (3.50) dobijamo da je:

$$\ln\left[p(\mathbf{z}-\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})\right]=\ln\left[f(\mathbf{N},k)\right]-(\mathbf{z}-\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})/2 \qquad (3.54)$$

tako da jednačina (3.53) postaje:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{a}}}\left[\left((\mathbf{z}-\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})\right)^T\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})\right]=0 \qquad (3.55)$$

Jednačina (3.55) daje :

$$\mathbf{U}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{a}^*-\mathbf{U}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{z} = 0 \qquad (3.56a)$$

ili za nesingularnu $\mathbf{U}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{U}$:

$$\mathbf{a}^* = (\mathbf{U}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\,\mathbf{U}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{z} \qquad (3.56b)$$

gdje je $\mathbf{a}^*$ linearna (Markovljeva) procjena sa najmanjom varijansom od **a** koja je (neuslovna) procjena najveće vjerodostojnosti. za Gaussovu raspodjelu **n**, pošto ona maksimizira funkciju vjerodostojnosti jednačine (3.52).

Primjećujemo da je procjena sa najmanjom varijansom $\mathbf{z}^*$ iz jednačine (3.56b) u stvari procjena ponderisane regresije. Matrica ponderisanja $\mathbf{N}^{-1}$ uvodi se u procjenu regresije najmanje sume kvadrata iz jednačine (3.16), koja je data sa:

$$\mathbf{a}^* = (\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}\,\mathbf{U}^T\mathbf{z} \qquad (3.57)$$

Očigledno je, ako ne raspolažemo ni sa kakvim znanjem o **N** (što je opšti slučaj), možemo predpostaviti da je $\mathbf{N}=\sigma^2\,\mathbf{I}$ (s je skalar), tako da jednačine (3.56b) i (3.57) postaju identične. Medjutim, ako je kovarijansa raznih komponenti n apriori poznata procjena **a** je data u jednačini (3.56b).

Pošto za Gaussovo **n** , kada su komponente vektora n medjusobno nezavisne uzimamo $\mathbf{N} = \sigma^2\mathbf{I}$, procjena regresije najmanje sume kvadrata ujedno je procjena največe vjerodostojnosti. Iz toga slijedi da procjena pomoću najmanje sume kvadrata ima iste osobine kao i procjena najveće vjerodostojnosti. Prema tome, obadvije procjene su bez sistematske greške (unbiased) . Naime , za dovoljan broj mjerenja, E[$\mathbf{a}^*$] jednako je **a** i konzistentne su. One su takodjer efikasne (tj. uz predpostavku da ne postoji asimetričnost područja grešaka, za neki dovoljan broj mjerenja, one daju procjene parametara koje imaju najmanju varijansu razlike izmedju stvarnih vrijednosti i vrijednosti mjerenja predskazanih iz bilo kojih parametara koji se mogu razmatrati za date podatke).

Kada se izvodi identifikacija pomoću najmanje sume kvadrata miješanog autoregresionog Gaussovskog procesa pokretne srednje vrijednosti šuma, bilo koja procjena pomoću najmanje sume kvadrata samih autoregresivnih parametara nije efikasna, jer zanemaruje druge parametre. Ovakva procjena nema največu vjerodostojnost, jer se transformacijom ovog mješanog autoregresionog modela pokretne srednje vrijednosti, dobija da višedimenzionalni vektor šuma **n** nije nezavistan, tj. $\mathbf{N} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$, kada postoje članovi pokretne srednje vrijednosti.

REGRESIONA IDENTIFIKACIJA NELINEARNIH PROCESA

Kako statički tako i dinamički procesi mogu da imaju nelinearne karakteristike koje se ne mogu zanemariti. Kada se raspolaže sa prethodnim znanjem o vrsti nelinearnosti, mogu se identifikovati parametri "pravih" nelinearnih funkcija. Primjer za prethodne slučajeve javlja se onda kada je iz teoretskih razmatranja poznato da odnos izmedju nekih promjenjljivih u nekom procesu, kao što je odnos izmedju brzine w i pritiska p, ima eksponencijalni oblik, naprimjer:

$$w = k_1 \exp(k_2 p) + k_3$$

gdje se traži identifikovanje k_1, k_2 i k_3 .

Kada nije poznat tip nelinearne funkcije, tada je potrebna neka aproksimacija za stvarnu nelinearnost, recimo pomoću polinomske aproksimacije. Medjutim, u svim slučajevima identifikacija se može vršiti samo ako se predpostavi specifičan tip nelinearne funkcije aproksimacije, čiji se parametri trebaju identifikovati. Dakle, problem identifikacije se ponovo odnosi na problem procjene parametara neke apriori date funkcije.

U nastavku ovog poglavlja mi ćemo učiniti pokušaj da se pridje ovim vrstama problema nelinearne identifikacije, tj. kada je tip nelinearne funkcije apriori poznat , ili kada je on aproksimiran, kroz primjenu tehnike nelinearne regresije, i da se razmotri tip funkcija aproksimacije koje daju odgovarajuću aproksimaciju.

Polinomska aproksimacija

Da bi opisali metode za identifikovanje nelinearnih procesa pomoću regresije, prvo razmotrimo polinomsku aproksimaciju u smislu trećeg stepena najmanje sume kvadrata nekog dinamičkog procesa koji ima dvije promjenjljive stanja x_1 i x_2 i jednu promjenjljivu upravljanja u, i to:

$$x_{i,k+1} = a_{i1} x_{1,k} + a_{i2} x^2_{1.k} + a_{i3} x^3_{1.k} + b_{i1} x_{2,k} + b_{i2} x^2_{2,k} + b_{i3} x^3_{2,k} + c_{i1} u + c_{i2} u^2 + c_{i3} u_3$$

$$@ \; i = 1,2 \qquad (3.58)$$

Ovdje primjećujemo, koristeći Weierstrasseovu teoremu, da se kontinualne nelinearne funkcije od x mogu aproksimirati polinomom po x, tako da aproksimacije konvergiraju orginalnim funkcijama. Zatim se definiraju vektori **z** i α , i da bi se omogučila primjena postupka regresione identifikacije za identifikovanje procesa, jednačina (3.58) , tako da je:

$$\mathbf{z} \equiv [z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9]^T \equiv [x_{1k} x_{1k}^2 x_{1k}^3 x_{2k} x_{2k}^2 x_{2k}^3 u_k u_k^2 u_k^3]^T \qquad (3.59a)$$

i:

$$\boldsymbol{\alpha}_i \equiv (\alpha_{i,1} \ldots \alpha_{i,9})^T = (a_{i1} a_{i2} a_{i3} b_{i1} b_{i2} b_{i3} c_{i1} c_{i2} c_{i3})^T \qquad (3.59b)$$

Dosljedno tome, jednačina (3.58) postaje

$$x_{i,k+1} = \mathbf{z}^T \alpha_i \qquad (3.60)$$

koja je potpuno analogna jednačinama (3.5) i (3.6). odnosno ima oblik *linearne regresije.* Elementi od α koji se javljaju u polinomu trećeg stepena koji je upotrebljen za aproksimaciju ovog procesa sada se proračunavaju slijedeći izvodjenje jednačina (3.5) do (3.16). Kod posljednjeg izvodjenja zamjenjujemo **x** , **U** i **a** iz jednačina (3.5) i (3.6) sa $x_{1,k+1}$, **z** i α iz jednačina (3.59). Prema tome, x i **U** iz jednačina (3.7) i (3.8) izvode se u obliku $x_{i,k+1}$, a elementi od **z** i α_i daju se pomoću jednačine (3.16).

Ako se razmatra polinomska aproksimacija višeg stepena nego u jednačini (3.58) , slijedi se potpuno isti postupak kao i u jednačinama (3.58) do (3.60), ali za veći broj članova. Posljednji postupak očigledno se takodjer može primjeniti i na statičke procese (tj. kada se zanemare indeksi k i k+1 iz jednačin (3.58). On se , u principu , može primjeniti na veći broj promjenjljivih nego u jednačini (3.58).

U nekim slučajevima moramo identifikovati koeficijente polinomske aproksimacije, gdje se javljaju eksponenti funkcija promjenjljivih procesa, a ne eksponeti samih promjenjljivih procesa, kao što je:

$$x_{i,k+1} = a_{i1} f(x_{1,k}) + a_{i2} f^2(x_{1.k}) + a_{i3} f^3(x_{1.k}) + b_{i1} f(x_{2,k}) + b_{i2} f^2(x_{2,k}) + b_{i3} f^3(x_{2,k}) + c_{i1} f(u_k) + c_{i2} f^2(u_k) + c_{i3} f^3(u_k) \qquad (3.61)$$

U ovom slučaju se elementi od **z** definiraju na slijedeći način:

$$\mathbf{z} \equiv [z_1 z_2 z_3 \ldots\ldots z_9]^T \equiv [f(x_{1k}) : f^2(x_{1k}) : f^3(x_{1k}) : \ldots\ldots f^3(u_k)]^T \qquad (3.62)$$

a ostali dio izvodjenja je kao u jednačini (3.58). U slučajevima kada se u polinomu koji se definiše javljaju članovi sa mješanim promjenjljivim, kao što je:

$$x_{i,k+1} = a_{i1} x_{1k} + a_{12} x_{1k} x_{2k} + a_{13} x^2_{12} + \ldots \qquad (3.63)$$

z se ponovo definiše kao :

$$\mathbf{z} \equiv [z_1 z_2 z_3 \ldots\ldots z_9]^T \equiv [x_{1k} : x_{1k} x_{2k} : x_{1k}^2 : \ldots\ldots]^T \qquad (3.64)$$

i izvodjenje se nastavlja kao u slučaju jednačine (3.58). Potpuno isto kao i u slučajevima linearne regresije , tražimo da je broj skupova mjerenja $r \geq \omega + 1$ gdje je ω dimenzija od z iz jednačina (3.59) ili (3.62) , da bi se omogućilo odredjivanje α_i iz jednačine (3.60), dok se sa aproksimacionim modelom izbjegava svrstavanje mjerenih podataka.

Ortogonalni polinomi

Izmedju raznih vrsta polinoma koji se upotrebljavaju za aproksimiranje nelinearnih procesa posebnu pažnju zaslužuje aproksimacija pomoću ortogonalnih polinoma. Ti polinomi imaju izvjesne osobine koje ih čine veoma privlačnim za filtriranje podataka čije su karakteristike apriori nepoznate. Neke od tih osobina su:

1. Zbog ortogonalnosti je proračun koeficijenata polinomske jednačine kojom se aproksimira neki proces *brži* nego sa neortogonalnim polinomima. Ova osobina je posebno važna kod ručnih proračuna.

2. Koeficijenti polinomske jednačine nezavisni su od najvišeg eksponenta u razmatranoj polinomskoj jednačini. Zbof toga, kada prethodno nije poznat stepen polinoma, može se izvršiti provjera sa više raznih vrijednosti najvišeg stepena. Pri tome, svi koeficijenti nižeg stepena ostaju isti. Ova osobina je posebno važna ako se traži najbolji stepen polinomske aproksimacije.

3. Polinomi Chebisheva, koji se najviše primjenjuju za nelinearne aproksimacije imaju *osobinu skoro jednake greške* . To znači da greške aproksimacije unutar opsega mjerenja osciliraju izmedju dvije granice koje su skoro jednake, kao na narednoj slici 3.3. Zahvaljujući toj osobini, ne dešava se da se pri aproksimiranju dobiju na krajnjim djelovima opsega aproksimacije greške koje su velike u odnosu na ostale djelove opsega. Time se ustvari vrši "prigušivanje" greške aproksimacije.

Da bi ilustrovali identifikaciju nelinearnih procesa pomoću aproksimacija ortogonalnim polinomom, razmotrićemo slijedeće jednačine aproksimacije kojima se vežu $\hat{y}$ i x za jednodimenzionalni sistem :

$$\hat{y}(x) = b_0 F_0(x) + b_1 F_1(x) + ... + b_m F_m(x) \qquad (3.65)$$

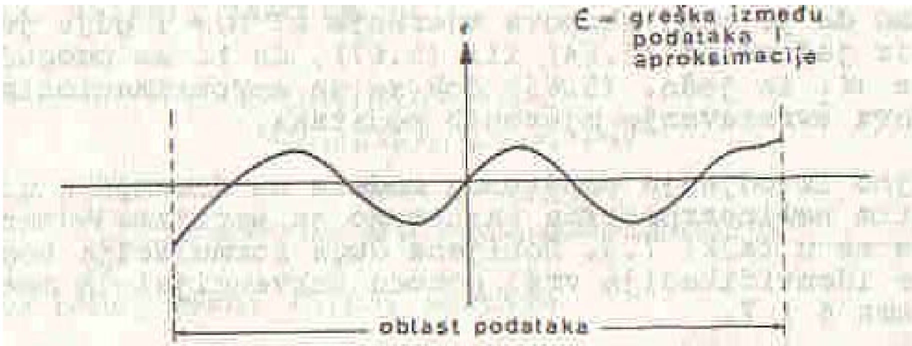
gdje x i $\hat{y}$ označavaju promjenjljive ulaza i procjenjenog izlaza nelinearnog procesa (kod problema predskazivanja ili filtriranja vremenskih nizova, x može da predstavlja vrijeme). U prikazanom slučaju $F_v(x)$ predstavlja ortogonalni polinom stepena **v** (v=1,...m) koji ima osobinu ortogonalnosti da:

$$\sum_{i=0}^{r} F_\mu(x_i) F_v(x_i) = 0 \qquad \forall \mu \neq v \qquad (3.66a)$$

ili , u opštem obliku:

$$\int_a^b w(x)F_\mu(x)F_v(x)dx = 0 \quad \forall \mu \neq v \qquad (3.66b)$$

gdje su μ i v nenegativni cijeli brojevi, a r je broj mjerenja.



Slika 3.3 Osobina skoro jednake greške kod aproksimacije polinomom Chebisheva

Prilikom identifikovanja koeficijenata b_j iz jednačine (3.65) , opet se zahtjeva da je r$\geq m+1$. Ako bi uzeli da je m=r, dobili bi koristeći proceduru identifikacije, onoliko jednačina koliko ima nepoznatih b_i. Kada bi iz ovih jednačina odredili b_i , dobili bi funkciju y(x) koju bi identički zadovoljavalo svih r skupova mjerenja. Medjutim tada nebi došlo do filtriranja mjerenih podataka, što je u ovom slučaju nepoželjno.

Kako je ranije navedeno, polinomi Chebisheva su najpogodniji za aproksimaciju pomoću ortogonalnih polinoma zbog osobine pod 3. u prethodnom tekstu. Polinom Chebisheva se difinira kao:

$$F_v(\xi)=T_v(\xi) = \cos(v \arccos \xi) \quad : \quad -1 \leq \xi \leq 1 \qquad (3.67)$$

i ima osobinu ponderisane ortogonalnosti koja se izražava na slijedeći način:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_\mu(\xi)T_v(\xi)d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \begin{cases} 0 & \propto \mu \neq v \\ \pi/2 & \propto \mu = v \neq 0 \\ \pi & \propto \mu = v = 0 \end{cases} \qquad (3.68)$$

gdje je $\sqrt{1-\xi^2}$ ponder funkcije $\omega(\xi)$ iz jednačine (3.66b). U narednoj tabeli T 3.1 dato je više polinoma Chebisheva do 6-og reda.

Polinomi Čebiševa $T_v(\xi)$ reda 0 do 6

$$T_0(\xi) = 1$$
$$T_1(\xi) = \xi$$
$$T_2(\xi) = 2\xi^2 - 1$$
$$T_3(\xi) = 4\xi^3 - 3\xi$$
$$T_4(\xi) = 8\xi^4 - 8\xi^2 + 1$$
$$T_5(\xi) = 16\xi^5 - 20\xi^3 + 5\xi$$
$$T_6(\xi) = 32\xi^6 - 48\xi^4 + 18\xi^2 - 1$$

$$T_{v+1}(\xi) = 2\xi T_v(\xi) - T_{v-1}(\xi)$$

Tabela T 3.1

Promjenjljiva na apscisi (x u jendačini (3.65)) obično treba da se transformiše da bi zadovoljila zahtjeve u pogledu opsega vrijednosti za ξ izraženih preko jednačine (3.67). Kada se raspolaže sa $T_v(\xi)$, tada se $T_{v+1}(\xi)$ može dobiti preko rekurzivnog izraza :

$$T_{v+1}(\xi) = 2\xi T_v(\xi) - T_{v-1}(\xi) \tag{3.69}$$

koji je posljedica definicije $T_v(\xi)$ u jednačini (3.67).

Aproksimacija u smislu najmanje sume kvadrata pomoću polinoma Chebisheva $\hat{y}$ od y vrši se tako da se po b_i minimizira S, gdje je S dato sa :

$$S = \int_{-1}^{1} w(\xi)\left[y(\xi) - \sum_{i=0}^{m} b_i T_i(\xi) \right]^2 d\xi \tag{3.70}$$

Na taj način se dobija :

$$b_k = \left[\int_{-1}^{1} w(\xi) y(\xi) T_k(\xi) d\xi \right] / \left[\int_{-1}^{1} w(\xi) T_k^2(\xi) d\xi \right] =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{y(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \quad \propto k = 0$$
$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{y(\xi) T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \quad \propto k \neq 0 \tag{3.71}$$

Kada se ovako odrede b_i dobije se aproksimacija:

$$\hat{y}(\xi) = \sum_{k=0}^{m} b_k T_k(\xi) \tag{3.72}$$

Relativno jednostavan algoritam za b_k je posljedica ortogonalnosti. Zapažamo da b_k iz jednačine (3.71) *nisu zavisni od izbora m*.

Zbog toga promjena m ne traži da se ponovo računaju b_j $\forall j \le m$, dok je kod neortogonalnih aproksimacija potrebno prilično dugotrajno ponovno računanje b_k.

Polinomi Chebisheva imaju još jednu važnu osobinu. Ako argument ξ_i ima slijedeće vrijednosti:

$$\xi_i = \cos[(2i+1)\pi/2n] : \quad i = 0,1.........n-1 \qquad (3.73)$$

onda je zadovoljen slijedeći izraz za $\mu, v < n$:

$$\sum_{j=0}^{n} T_\mu(\xi_j) T_v(\xi_i) = \begin{matrix} 0 & \propto \mu \ne v \\ \frac{n}{2} & \propto \mu = v \ne 0 \\ n & \propto \mu = v = 0 \end{matrix} \qquad (3.74)$$

koji se može nazvati osobina diskretne ortogonalnosti.

Opažamo da je u jednačini (3.74) ponderska funkcija $\omega(\xi)$ iz jednačine (3.66b) je jedinica. Prema tome, $\omega(\xi)$ koju treba uzeti u jednačini (3.70) takodjer je jedinica. Funkcija S u ovom slučaju ima oblik:

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} \left[y(\xi_j) - \sum_{k=0}^{m} b_k T_{ki}(\xi_j) \right]^2 \qquad (3.75)$$

Koeficijenti b_k koji minimiziraju ovo S su:

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y(\xi_j) \qquad (3.76a)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y(\xi_j) T_k(\xi_j) \qquad (3.76b)$$

Ovi izrazi su lakši za računanje nego oni koji su dati jednačinom (3.71) iako zahtjevaju da raspolažemo sa vrijednostima $y(\xi_i)$ za vrijednosti ξ_i date jednačinom (3.73).

Primjer:

Da bi se ilustrirala primjena aproskimacija pomoću polinoma Chebisheva , razmotrimo aproksimaciju funkcije $y(\xi) = \xi^4 \quad \forall |\xi| < 1$ pomoću polinoma Chebisheva drugog stepena na slijedeći način:

Odredimo broj tačaka koje ćemo uzeti u račun i to n=3. Prema tome, uzimajući u obzir jednačinu (3.73),

$$\xi_0 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad i\ \xi_1 = \cos\frac{3\pi}{6} = 0 \quad : \quad \xi_2 = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

i prema jednačini (3.74):

$$b_0 = \frac{1}{3}\left[(\frac{\sqrt{3}}{2})^4 + 0^4 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^4 \right] = \frac{3}{8}$$

$$b_1 = \frac{2}{3}\left[(\frac{\sqrt{3}}{2})^5 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^5 \right] = 0$$

$$b_2 = \frac{2}{3}\left[2(\frac{\sqrt{3}}{2})^6 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^4 + 2(-\frac{\sqrt{3}}{2})^6 - (-\frac{\sqrt{3}}{2})^4 \right] = \frac{3}{8}$$

Višedimenzionalni ortogonalni polinomi

Primjena ortogonalnih polinoma na višedimenzionalne probleme manje je u upotrebi nego za jednodimenzionalne slučajeve, radi poteškoća računarske prirode pri generisanju tih polinoma. Inače, višedimenzionalna formulacija ortogonalnih polinoma je potpuno analogna jednodimenzionalnom slučaju:

$$\int....\int w(x_1:...x_n)F_{\mu,\nu,....\Omega}(x_1:....x_n)F_{\mu^=,\nu^=...\Omega^=}(x_1:.....x_n)dx_1.....dx_n = 0 \qquad (3.77)$$

gdje x_1 do x_n označavaju elemente višedimenzionalnog x i zbog toga je slična ranije opisanom postupku. Pogodan oblik generiranja $F_{\mu,\nu....,\Omega}$ je :

$$F_{\mu,\nu....,\Omega}(x_1........x_n)=F_\mu(x_1)F_\nu(x_2)....F_\Omega(x_n) \qquad (3.78)$$

gdje su F_μ : F_ν.....F_Ω jednodimenzionalni ortogonalni polinomi. Na osnovu toga, a radi ortogonalnosti $F_\mu(x_1)$...... $F_\Omega(x_n)$, dobijamo:

$$\begin{aligned}&\int.....\int w(x_1.....x_n)F_{\mu':\nu':.....\Omega'}dx_1...dx_n = \\ &\int w_1F_\mu(x_1)F_{\mu'}(x_1)dx_1\int w_2F_\nu(x_2)F_{\nu'}(x_2)dx_2.....\int w_nF_\Omega(x_n)F_{\Omega'}(x_n)dx_n = \\ &0 \quad \forall \mu:\nu..\Omega \neq \mu':\nu'.....\Omega'\end{aligned} \qquad (3.79)$$

čime se zadovoljava jednačina (3.77).

Odredjivanje najboljeg stepena polinomske aproksimacije

Najbolji stepen m^* polinomske aproksimacije može se odrediti na osnovu predpostavki da mjerenja $y_{(i)}$, indeks i označava i-to mjerenje, i=1,2,...r, imaju nezavisnu Gaussovsku raspodjelu oko nekog polinoma y stepena $m^* + \mu$, gdje je:

$$\hat{y}_{m^+ + \mu}(x_i) = \sum_{j=0}^{m^+ + \mu} b_j x_i^j \qquad (3.80)$$

Varijansa σ^2 raspodjele y- $\hat{y}$ nezavisna je od μ.

Očigledno, za vrlo malo m (m=0,1,2..), σ^2_m smanjuje se sa povećanjem m. Pošto je, pod prethodnom pretpostavkom varijansa σ^2_m nezavisna od m, slijedi da je najbolji stepen m^* najniže m za koje je $\sigma_m \cong \sigma_{m+1}$

Odredjivanje m^* traži da se računaju polinomske aproksimacije različitog stepena. Pošto b_j iz jednačine (3.80) može da bude zavisno o stepenu polinoma m i ovdje se preporučuje aproksimacija ortogonalnim polinomom, jer ona eliminira potrebu za ponovnim računanjem svih b_j za svako m, kako je već prethodno pokazano.

Identifikacija apriori datih proizvoljnih nelinearnih funkcija

U mnogim slučajevima na osnovu teorijskih razmatranja raspolažemo sa nelinearnim analitičkim modelom čije parametre je potrebno identificirati. U tim slučajevima, može se primjeniti regresiona analiza na slijedeći način:

Razmotrimo neki proces koji je zadat izrazom:

$$y = a_0 + a_1 x_1 x_2^3 + a_2 x_2 \exp\left(-a_3 \frac{x_1^2}{x_3}\right) + \frac{a_4 x_4}{\sqrt{1 - a_5 x_5^2}} \qquad (3.81)$$

Da bi identifikovali prethodno dati proces, definisaćemo slijedeče nove promjenjljive:

$$\xi_1 \equiv x_1 x_2^3 : \xi_3 \equiv x_2 : \xi_5 \equiv x_5 \qquad \xi_2 \equiv \frac{x_1^2}{x_3} : \xi_4 \equiv x_4 \qquad (3.82)$$

što daje:

$$y = a_0 + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 \exp(-a_3 \xi_2) + \frac{a_4 \xi_4}{\sqrt{1 - a_5 \xi_5^2}} \qquad (3.83)$$

Sada vršimo linearizaciju jednačine (3.83) vršeći samo male perturbacije njenih promjenjljivih. Na osnovu toga dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\Delta y &= a_1\Delta\xi_1 - a_2 a_3 \xi_3 \exp(-a_3\xi_2)\Delta\xi_2 \\
&+ a_2 \exp(-a_3\xi_2)\Delta\xi_3 + \frac{a_4}{\sqrt{1-a_5\xi_5^2}}\Delta\xi_4 + \frac{a_4 a_5 \xi_4 \xi_5}{\sqrt{1-a_5\xi_5^2}}\Delta\xi_5
\end{aligned}
\tag{3.84}
$$

Zatim definiramo:

$$
\begin{aligned}
b_1 &\equiv a_1 \\
b_2 &\equiv -a_2 a_3 \xi_3 \exp(-a_3\xi_2) \\
b_3 &\equiv a_2 \exp(-a_3\xi_2) \\
b_4 &\equiv \frac{a_4}{\sqrt{1-a_5\xi_5^2}} \\
b_5 &\equiv \frac{a_4 a_5 \xi_4 \xi_5}{\sqrt{1-a_5\xi_5^2}}
\end{aligned}
\tag{3.85}
$$

što daje:

$$
\Delta y = b_1\Delta\xi_1 + b_2\Delta\xi_2 + b_3\Delta\xi_3 + b_4\Delta\xi_4 + b_5\Delta\xi_5 = \sum_i b_i\Delta\xi_i \tag{3.86}
$$

Očigledno je da se b_1 do b_5 mogu identificirati pomoću linearne regresije, kako je to već izloženo ranije.Zatim vidimo da je :

$$
b_5 = b_4\, a_5\, \xi_4\, \xi_5 \tag{3.87}
$$

da bi se dalo a_5 pošto su ξ_4 i ξ_5 mjerljivi. Zamjenom posljednjeg rezultata za a_5 u izrazu za b_4 u jednačini (3.85), odredjujemo a_4. Član a_1 neposredno se daje pomoću b_1 prema jednačini (3.85), dok se a_2 i a_3 moraju odrediti iz izraza za b_2 i b_3 iste jednačine i to:

$$
b_2 = -\, a_3\, \xi_3\, b_3 \tag{3.88}
$$

gdje je ξ_3 mjerljivo , pa se tako dobije i a_3. Konačno se a_2 odredjuje zamjenom a_3 u izraz za b_3 u jednačini (3.85).

Na sličan način mogu se izvršiti identifikacije i mnogih drugih nelinearnih izraza. Procesi koji su dati sa eksponencijalnim funkcijama oblika:

$$
y = a\, e^{bx} \tag{3.89}
$$

mogu se identifikovati pomoću regresije ako se zadaju u logaritamskom obliku:

$$\log y = \log a + b\,x \qquad (3.90)$$

Definirajuči da je:

$\log y \equiv Y$, $\log x \equiv X$, i $\log a \equiv A$, dobijamo da je:

$$Y = A+bx \qquad (3.91)$$

gdje se A i b lako mogu preračunati pomoću linearne regresije .

Slično tome, kod procesa oblika:

$$y = a\,x^b \qquad (3.92)$$

možemo razmatrati log y , dobijajući relaciju

$$\log y = \log a + b \log x \qquad (3.93)$$

iz koje se a i b mogu odrediti kao i u slučaju jednačine (3.91). Medjutim, postoje slučajevi kada ove metode nisu primjenjljive i potrebna je bar još neka informacija. Primjer sistema gdje ova posljednja metoda ne vrijedi je:

$$y = a_0 + a_1 \log\, (a_2 + x) \qquad (3.94)$$

gdje je potrebna identifikacija za a_0, a_1 i a_2. Ovdje će male perturbacije dati:

$$\Delta y = \frac{a_1}{a_2 + x}\Delta x = b\Delta x \qquad (3.95)$$

gdje se b može identifikovati pomoću linearne regresije, dajući :

$$b = \frac{a_1}{a_2 + x} \qquad (3.96)$$

što ne pruža rješenje za a_0, a_1 i a_2. Naravno da je moguće upotrebiti drugi ili viši parcijalni izvod (ili perturbacije drugog ili višeg reda), ali u praktičnim slučajevima to može da bude neupotrebljivo , jer su ti izvodi obićno bezvrijedni, naročito ako mjerenja sadrže šum.

4. IDENTIFIKACIJA POMOĆU TEHNIKE SEKVENCIJALNE REGRESIJE

Tehnike identifikacije koje se zasnivaju na sekvencijalnoj regresiji najmanje sume kvadrata mogu se primjenjivati na linearne i nelinearne stacionarne sisteme, gdje mogu da budu zamjena za tehnike nesekvencijalne regresije iz prethodnog poglavlja. Njihova sekvencijalna karakteristika omogućava brzo dobijanje rezultata, a ne zahtjevaju veliku memoriju računara za pamćenje parova vrijednosti ulaza i izlaza.

Kod sekvencijalnog postupka eliminiraju se poteškoće koje mogu nastati kod matrične inverzije , čime se prevazilazi velika prepreka u primjeni postupka regresije za višedimenzionalne slučajne promjenjljive kod realnih sistema.
Kod primjene tehnike regresije iz prethodnog poglavlja, na identifikovanje nestacionarnih procesa koji se sporo mjenjaju, stacionarnost se predpostavlja samo u intervalu za kojeg su prikupljeni podatci za identifikaciju pomoću regresije. Interval regresije se sastoji od r intervala uzimanja uzoraka. Na taj način se identifikacija gotovo neprekidno ažurira, jer se kraj obićno fiksiranog intervala regresije pomjera vremenom unaprijed, za jedan ili više intervala mjerenja. Zbog toga se za svako takvo pomjeranje naprijed, vektor svih parametara ponovo mora identificirati, dok se podatci koji ne pripadaju novom intervalu regresije potpuno odbaciju. Suprotno nesekvencijalnoj regresiji, kod sekvencijalne regresije se interval za kojeg su prikupljeni podatci neprekidno produžava tokom vremena, i nikakav podatak ne postaje dovoljno star da bi se odbacio. Zbog toga izgleda da je sekvencijalna regresija (i stohastička aproksimacija), ograničena na stacionarne procese.

Medjutim, pošto procjene sekvencijalne regresije konvergiraju procjenama nesekvencijalne regresije nakon m iteracija (gdje je m dimenzija vektora parametara), to se stacionarnost treba predpostaviti samo za m intervala, kao i u nesekvencijalnom slučaju.

U praksi se, zbog toga, sekvencijalna procjena bilo koje vrste može primjeniti na podatke prikupljene za neki konačni interval, uz predpostavku da je u toku njega sistem stacionaran i to na slijedeći način:

Uzmimo neki interval T od t-T do t, u kojem je uzeto n uzoraka u trenutcima 0,1, …,k…..(n-1). Možemo da izvršimo identifikaciju pomoću sekvencijalne regresije počinjući od k skupova uzoraka, zatim za k+1 , k+2, itd, sve do n-tog skupa uzoraka, što daje konačnu procjenu identifikacije u vremenu t. Sada, u vrijeme $t + \triangle t$ ($\triangle t = T/n$), ponavljamo cijeli postupak regresione procjene tako da se prvi uzorak mjeren u $T - t + \triangle t$, i tako dalje, sve dok se ne izmjeri n skupova uzoraka u $t+\triangle t$ što bi dalo konačnu procjenu identifikacije u $t+\triangle t$. Isti se postupak može ponoviti za $t + 2\triangle t$, $t + 2\triangle t$, …., $t + j\triangle t$, …… Odluka o ponovnom otpočinjanju identifikacije sekvencijalnom regresijom može se zasnivati na ponašanju indeksa S performanse identifikacije, kao u jednačini (3.11), ako se ne sumnja na neku nestacionarnost. Takodjer se može izvršiti odredjivanje apriori nepoznatog reda vektora stanja ili modela autoregresivne pokretne srednje vrijednosti , jedanput za uvjek.

Skalarni slučaj

Uzmimo neki nepoznati sistem kao što je:

$$x_k = a\,u_k + n_k \quad \forall\ k = 0,1,\ \ldots\ldots\ldots \qquad (4.1)$$

gdje su u_k i x_k nizovi mjerljivih ulaza i izlaza , a n_k je šum kod mjerenja u k-tom trenutku uzimanja uzoraka. Problem identifikacije je problem procjene nepoznatog parametra a sistema, i može se riješiti kroz upotrebu linearne regresije najmanje sume kvadrata. Na osnovu toga, vrši se procjena $\hat{a}_r$ od a, koja se zasniva na r skupova mjerenja u_k i x_k (k=1,2,..r). tako da se minimizira indeks troškova J_E:

$$J_E = \sum_{k=1}^{r} q_k (x_k - \hat{a}_r u_k)^2 \qquad (4.2)$$

gdje je q_k proizvoljni koeficijenat ponderisanja , na primjer q_k=1. Uvodjenje q_k=k u jednačinu (4.2) može poslužiti da se da veći ponder novijim mjerenjima. Procjena regresije najmanje sume kvadrata $\hat{a}_r$ od a, daje se sa:

$$\frac{\partial J_r}{\partial \hat{a}_r} = 0 = -2\sum_{k=1}^{r} q_k u_k (x_k - \hat{a}_r u_k) \qquad (4.3)$$

što daje:

$$\hat{a}_r = \frac{\sum_{k=1}^{r} q_k u_k x_k}{\sum_{k=1}^{r} q_k u_k^2} \qquad (4.4)$$

Dobijanje $\hat{a}_r$ može se sprovesti sekvencijalno, tako da se dobije rezultat koji je identičan jednačini (4.4) poslije r skupova mjerenja i to na slijedeći način:
Iz jednačine (4.3) odredjujemo da je :

$$\hat{a}_1 = \frac{q_1 u_1 x_1}{q_1 u_1^2} \qquad (4.5)$$

i

$$\hat{a}_2 = \frac{q_1 u_1 x_1 + q_2 u_2 x_2}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} \qquad (4.6)$$

Medjutim jednačina (4.6) se može pisati i kao:

$$\hat{a}_2 = \hat{a}_1 - \frac{\hat{a}_1 q_1 u_1^2 + \hat{a}_1 q_2 u_2^2}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} + \frac{q_1 u_1 x_1 + q_2 u_2 x_{2_1}}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} =$$

$$= \hat{a}_1 + \frac{q_1 u_1 (x_1 - \hat{a}_1 u_1) + q_2 u_2 (x_2 - \hat{a}_1 u_2)}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} \qquad (4.7)$$

Zamjenom $\hat{a}_1$ iz jednačine (4.5) u drugi član na desnoj strani jednačine (4.7), dobija se:

$$\hat{a}_2 = \hat{a}_1 + \frac{q_1 u_1 \left(x_1 - \frac{(q_1 x_1 u_1)}{q_1 u_1^2} u_1\right) + q_2 u_2 \left(x_2 - \frac{(q_1 x_1 u_1)}{q_1 u_1^2} u_2\right)}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2}$$

$$= \hat{a}_1 + \frac{0 + q_2 u_2 (x_2 - \hat{a}_1 u_2)}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} = \hat{a}_1 + \frac{q_2 u_2 (x_2 - \hat{a}_1 u_2)}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} \qquad (4.8)$$

i na sličan način dobijemo:

$$\hat{a}_j = \hat{a}_{j-1} + p_j q_j u_j (x_j - \hat{a}_{j-1} u_j) \qquad (4.9)$$

gdje je :

$$\hat{a}_0 = 0 \qquad (4.10)$$

Dosljedno tome:

$$1/p_1 = q_1 u^2{}_1 \qquad (4.11)$$

$$\frac{1}{p_2} = q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2 \qquad (4.12)$$

i

$$\frac{1}{p_j} = \sum_{k=1}^{j} q_k u_k^2 \; = \frac{1}{p_{j-1}} + q_j u_j^2 \qquad \forall j > 1 \qquad (4.13)$$

primječujemo da je sekvencijalno izveden rezultat jednačina (4.9) i (4.13) identičan rezultatu jednačina (4.6) izveden za sve vrijednosti r.

Slučaj više parametara

Uzmimo sistem sa više parametara koji se daje sa:

$$x_k = a_1 u_{1,k} + a_2 u_{2,k} + \ldots\ldots\ldots + a_m u_{m,k} + n_k \qquad (4.14)$$

gdje su a_i (i = 1,…m) , nepoznati parametri koji traže identifikaciju , x_k je izlaz sistema u k-tom trenutku uzimanja uzoraka , $u_{i,k}$ je i-ti ulaz sistema u k-tom intervalu uzimanja uzorka, a n_k je mjerni šum. Jednačina (4.14) se može pisati u vektorskom obliku kao:

$$x_k = \mathbf{a}^T \mathbf{u_k} + n_k \qquad (4.15)$$

gdje su:

$$\mathbf{a}^T \equiv [a_1 \ldots\ldots a_m] \qquad (4.16)$$

$$\mathbf{u_k} \equiv [u_{1,k} \ldots\ldots\ldots\ldots u_{m,k}]^T \qquad (4.17)$$

Procjena vektora parametara **a** se vrši tako da procjenjeno $\hat{\mathbf{a}}_r$ minimizira indeks troškova J_r. Ovdje r označava broj skupova mjerenja gdje, analogno jednačini (4.2) ,

$$J_r = \sum_{k=1}^{r} q_k (x_k - \hat{\mathbf{a}}_r^T \mathbf{u}_k)^2 \qquad (4.18)$$

Prema tome, $\hat{\mathbf{a}}_r$ treba da zadovolji:

$$\frac{\partial J_r}{\partial \hat{\mathbf{a}}_r} = 0 \qquad (4.19)$$

tako da je :

$$(\sum_{k=1}^{r} q_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}^T)\hat{\mathbf{a}}_r = \sum_{k=1}^{r} q_k x_k \mathbf{u}_k \qquad (4.20)$$

Definirajući:

$$\mathbf{P}_r^{-1} \equiv \sum_{k=1}^{r} q_k (\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T) \qquad (4.21)$$

$\mathbf{P}_r^{-1}$ može biti invertovana samo kada je r≥ m , gdje je m dimenzija **u** a r je broj skupova mjerenja. Sada jednačina (4.20) postaje:

$$\mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_r \equiv \sum_{k=1}^{r} q_k x_k \mathbf{u}_k \qquad (4.22)$$

ili :

$$\hat{\mathbf{a}}_r = \mathbf{P}_r \sum_{k=1}^{r} q_k x_k \mathbf{u}_k \qquad (4.23)$$

gdje je ovo obićna procjena linearne regresije **a,** koja je identična procjeni regresije iz prethodnog poglavlja. Iako je $\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T$ singularno, vidimo da je matrica $\mathbf{P}_r^{-1}$ iz jednačine (4.21) nesingularna zbog sume po k. Jednačina (4.22) se može pisati kao:

$$\mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_r \equiv \sum_{k=1}^{r-1} q_k x_k \mathbf{u}_k + q_r x_r \mathbf{u}_r \qquad (4.24)$$

Uzimajući iz jednačine (4.20) da je:

$$\sum_{k=1}^{r-1} q_k x_k \mathbf{u}_k = (\sum_{k=1}^{r-1} q_k \ \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T)\hat{\mathbf{a}}_{r-1} \qquad (4.25)$$

možemo izvršiti zamjenu sa $\sum_{k=1}^{r-1} q_k x_k \mathbf{u}_k$ iz jednačine (4.25) u jednačinu (4.24) da bi dobili:

$$\mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_r \equiv (\sum_{k=1}^{r-1} q_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T)\hat{\mathbf{a}}_{r-1} + q_r x_r \mathbf{u}_r \qquad (4.26)$$

Dodavajući i oduzimajući $\left[q_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1} \right]$ na desnoj strani jednačine (4.26), dobijemo da je:

$$\mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_r \equiv \left(\sum_{k=1}^{r-1} q_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T\right) \hat{\mathbf{a}}_{r-1} + q_r \mathbf{u}_r (x_r - \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1}) + q_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1} = \left(\sum_{k=1}^{r-1} q_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T\right) \hat{\mathbf{a}}_{r-1} + q_r \mathbf{u}_r (x_r - \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1}) \tag{4.27}$$

Uvodeći definicije $\mathbf{P}_r^{-1}$ iz jednačine (4.21) , jednačina (4.27) tada postaje:

$$\mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_r = \mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_{r-1} + q_r \mathbf{u}_r (x_r - \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1}) \tag{4.28}$$

da bi dobili:

$$\hat{\mathbf{a}}_r = \hat{\mathbf{a}}_{r-1} + \mathbf{P}_r q_r \mathbf{u}_r (x_r - \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1}) \tag{4.29}$$

Iz toga se $\hat{\mathbf{a}}_r$ može sekvencijalno odrediti iz prethodne procjene $\hat{\mathbf{a}}_{r-1}$ i iz mjerenja x_r i $\mathbf{u}_r$ i pondera q_r pod uslovom da se $\mathbf{P}_r$ takodjer može sekvencijalno dobiti. Osim toga , prema jednačini (4.21) :

$$\mathbf{P}_r^{-1} = \sum_{k=1}^{r-1} q_k (\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T) + q_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T = \mathbf{P}_{r-1}^{-1} + q_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T \tag{4.30}$$

gdje je posljednja jednačina analogna skalarnoj jednačini (4.13).

Da bi se dobio izraz $\mathbf{P}_r^{-1}$ kao u jednačini (4.30) treba izvršiti inverziju matrice i imati na raspolaganju početnu matricu $\mathbf{P}_0$. Medjutim, umjesto da vršimo inverziju matrice $\mathbf{P}_r$, sada koristimo lemu matrićne inverzije da bi omogućili rekurzivno izvodjenje $\mathbf{P}_r$, na slijedeći način:

$$\mathbf{H}_r \equiv \sqrt{q_r}\, \mathbf{u}_r \tag{4.31a}$$

tako da je:

$$\mathbf{H}_r \mathbf{H}^T{}_r = q_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T \qquad (4.31b)$$

Množenjem obadvije strane sa jednačinom (4.30) sa **P** ulijevo dobija se:

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}_r \mathbf{P}_{r-1}^{-1} + \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r \mathbf{H}^T{}_r \qquad (4.32)$$

Sada se množenjem jednačine (4.32) sa $\mathbf{P}_{r-1}$ udesno dobija:

$$\mathbf{P}_{r-1} = \mathbf{P}_r + \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r \mathbf{H}^T{}_r \mathbf{P}_{r-1} \qquad (4.33)$$

Ako dalje množimo udesno sa **H** dobijamo:

$$\mathbf{P}_{r-1}\mathbf{H}_r = \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r + \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r \mathbf{H}^T{}_r \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r = \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r (1 + \mathbf{H}^T{}_r \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r) \quad (4.34)$$

Množenje jednačine (4.34) sa

$(1 + \mathbf{H}^T{}_r \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r)^{-1} \mathbf{H}^T{}_r \mathbf{P}_{r-1})$ udesno daje:
(podsječajući da je: $(1 + \mathbf{H}^T{}_r \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r) \quad skalar)$

$$\mathbf{P}_{r-1}\mathbf{H}_r (1 + \mathbf{H}^T{}_r \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r)^{-1} \mathbf{H}^T{}_r \mathbf{P}_{r-1} = \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r \mathbf{H}^T{}_r \mathbf{P}_{r-1} \quad (4.35)$$

Zamjenom sa $\left[\mathbf{P}_r \mathbf{H}_r \mathbf{H}^T{}_r \mathbf{P}_{r-1}\right]$ iz jednačine (4.33) dobije se :

$$\mathbf{P}_{r-1}\mathbf{H}_r (1 + \mathbf{H}^T{}_r \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r)^{-1} \mathbf{H}^T{}_r \mathbf{P}_{r-1} = \mathbf{P}_{r-1} - \mathbf{P}_r \quad (4.36)$$

da bi se došlo do :

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{P}_{r-1} - \mathbf{P}_{r-1}\mathbf{H}_r (1 + \mathbf{H}^T{}_r \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r)^{-1} \mathbf{H}^T{}_r \mathbf{P}_{r-1} \qquad (4.37)$$

Pošto je $(1 + \mathbf{H}^T{}_r \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r) \quad skalar$, izvodjenja $\mathbf{P}_r$ iz jednačine (4.37) rekurzivnom relacijom ne uvodi se nikakva inverzija matrice.

Početna procjena **P** može da bude proizvoljna. Medjutim, radi brze konvergencije može biti korisno da se prema Lee-ju upotrebi početna procjena dobijena na slijedeći način: Uzimajući jednačine (4.31) i (4.30) dobijamo:

Uzimajući jednačine (4.31) i (4.30) dobijamo:

$$\mathbf{P}_n^{-1} = \mathbf{P}_0^{-1} + \sum_{K=1}^{n} q_k (\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T) \qquad (4.38)$$

Imajući na umu da jednačine (4.20) i (4.15) imaju isti oblik i pošto postupak regresije koji se zasniva na jednačini (4.20) mora dovesti do iste (i tako ograničene) procjene najmanjih kvadrata od **a**, kao kod procjene zasnovane na jednačinama (4.15), tražimo da je :

$$\mathbf{P}_0^{-1} = 0 \qquad (4.39)$$

Zamjenom iz jednačine (4.39) u (4.30), procjenjeno a_n koje je odredjeno iz jednačine (3.29) , za r=m (gdje je m dimenzija **a**) , postaje identično procjeni najmanje sume kvadrata iz jednačine (4.16)., za

$$\hat{\mathbf{a}}_0 = 0 \qquad (4.40)$$

prema tome, početna procjena

$$\mathbf{P}_0 = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{I}: \quad \varepsilon \to 0 \qquad (4.41)$$

zajedno sa početnom procjenom parametara jednačine (4.40) dovodi do procjene parametara koji konvergira u n koraka u smislu najmanje sume kvadrata (tj. do procjene nesekvencijalne regresije).

Član $1/\varepsilon$ može se sekoro proizvoljno odabrati izmedju 10 i vrijednosti koja odgovara najvećem broju koji se može memorirati u računaru kojeg koristimo. Riješenje problema pokazuje da bilo koji takav izbor slabo utiče na $\hat{\mathbf{a}}_i$ *ili* $\mathbf{P}_i$ za sve i osim za i=1. Medjutim, trebalo bi napomenuti da $1/\varepsilon$ ne smije biti veće od one vrijednosti koja odgovara najvećem značajnom decimalnom mjestu računara koji se koristi.

Primjer

Uzmimo sistem y = $\mathbf{a}^{\mathbf{T}}$ **x,** gdje je **a** vektor parametara kojeg treba identifikovati i gdje su:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \; : \; x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} : \; y_1 = 11: \quad y_2 = 4$$

Neka je:

$$\mathbf{P}_0 = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{I} = 10^5\mathbf{I}: \quad \varepsilon = 10^{-5}$$

Prema tome, prema jednačini (4.37) imamo:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{I} - \frac{\frac{1}{\varepsilon}\begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}}{\varepsilon + 25} = 4\bullet 10^3 \begin{bmatrix} 9 + 1\bullet 10^5 & -12 \\ -12 & 16 + 10^{-5} \end{bmatrix} = 4\bullet 10^3 \begin{bmatrix} 9+\varepsilon & -12 \\ -12 & 16+\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = 4\bullet 10^3 \begin{bmatrix} 9+\varepsilon & -12 \\ -12 & 16+\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} 11 = 4\bullet 10^3 \begin{bmatrix} 4\varepsilon \\ 3\varepsilon \end{bmatrix} 11 = \begin{bmatrix} 1.76 \\ 1.32 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = 4\bullet 10^3 \begin{bmatrix} 9+\varepsilon & -12 \\ -12 & 16+\varepsilon \end{bmatrix} - \frac{16\bullet 10^6 \begin{bmatrix} 9+\varepsilon & -12 \\ -12 & 16+\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9+\varepsilon & -12 \\ -12 & 16+\varepsilon \end{bmatrix}}{1 + 4\bullet 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9+\varepsilon & -12 \\ -12 & 16+\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} =$$

$$4\bullet 10^3 \begin{bmatrix} 9+\varepsilon & -12 \\ -12 & 16+\varepsilon \end{bmatrix} - \frac{16\bullet 10^6 \begin{bmatrix} 225 - 30\varepsilon + \varepsilon^2 & -300 - 10\varepsilon + 2\varepsilon^2 \\ -300 - 10\varepsilon + 2\varepsilon^2 & 400 + 80\varepsilon + 4\varepsilon^2 \end{bmatrix}}{1 + 4\bullet 10^3 (25 + 5\varepsilon)} =$$

$$\cong \frac{4\bullet 10^3}{25}\begin{bmatrix} ((9+\varepsilon)100\varepsilon + 92\varepsilon + 2\varepsilon^2 & -300\varepsilon - 26\varepsilon - 2\varepsilon^2 \\ -300\varepsilon - 26\varepsilon - 2\varepsilon^2 & ((16+\varepsilon)25\varepsilon - 7\varepsilon - \varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

Zanemarujući članove ε^2 dobijamo da je :

$$\mathbf{P}_2 \cong \begin{bmatrix} 0.507 & -0.522 \\ -0.522 & 0.629 \end{bmatrix}$$

i

$$\hat{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} 1.913 \\ 1.055 \end{bmatrix}$$

dok nesekvencijalnom regresijom dva prethodna skupa mjerenja dobijamo da je

$\hat{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ što je jednako tačnoj vrijednosti **a**, jer prethodna mjerenja ne sadrže šum. Vidimo da kada bi zanemarili ε koje se javlja u članu imenitelja $(\varepsilon + 25)$, od $\mathbf{P}_1$

tada bi $\mathbf{P}_2$ bilo nula i nebi bilo moguće odrediti $\hat{\mathbf{a}}$ iz jednačine (4.29). Osim toga rekurzivni proračun $\hat{\mathbf{a}}_i$ pokazuje da se ε ne smije zanemariti, jer bi $\hat{\mathbf{a}}_1$ takodjer bilo jednako nuli.

Sekvencijalna nelinearna regersija

Već smo ranije spomenuli da se prema teoremi Weirstrassa , svaka neprekidna nelinearna funkcija f[x(t)] od x može aproksimirati polinomom po x, tako da ovaj polinom konvergira ka f[x(t)]. Osim toga, ranije smo pokazali kako se u smislu najmanje sume kvadrata identifikuju parametri polinomske funkcije od x. To se vrši kroz ponovno formulisanje datog polinomskog izraza (za slučaj dva ulaza i za treči stepen polinoma).

$$x(t)= a_1 f(u_1) + a_2 f^2(u_1) + a_3 f^3(u_1) + b_1 f(u_2) + b_2 f^2(u_2) + b_3 f^3(u_2) \quad (4.42)$$

da bi se dobilo

$$x(t)= \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \ldots\ldots \alpha_6 z_6 = \alpha^T \mathbf{z} \quad (4.43)$$

gdje je:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ . \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (4.44a)$$

i

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ . \\ z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(u_1) \\ f^2(u_1) \\ \\ \\ f^2(u_2) \\ f^3(u_2) \end{bmatrix} \quad (4.44b)$$

Identifikacija α tako postaje problem identifikovanja parametara jednačine linearne regresije (jednačina 4.43). Ova posljednja identifikacija može se izvršiti i na sekvencijalni način primjenom postupka datog ranije u ovom poglavlju, koji daje sekvencijalne procjene parametara nelinearnih sistema, a koji se zasnivaju na razmatranjima najmanje sume kvadrata grešaka . Sekvencijalna regresija se slično može primjeniti na uopštene formulacije dinamičkih sistema sa nepoznatim nelinearnostima.

Pošto se kod postupka sekvencijalne nelinearne regresije izbjegava inverzija matrica, one se mogu upotrijebiti kad god se vrši identifikacija pomoću nelinearne regresije, čime se prevazilazi teškoća inverzije matrica sa malom determinantom koja nastaje kod mnogih nelinearnih sistema. Napomenimo da se matrice za koje treba da se vrši inverzija većih dimenzija nego za odgovarajuće linearne sisteme. Na primjer, kod procesa sa dva ulaza, jednačina (4.42) sa aproksimacijom polinomom trećeg stepena , uzima se šestodimenzionalni ulaz. Ovaj slučaj traži inverziju matrice dimenzije 6 x 6 , umjesto matrice dimenzije 2 x 2 u linearnom slučaju, ako bi se upotrebljavala nesekvencijalna regresija. Ovim se ilustrira efikasnost sekvencijalne regresije čak i kod nelinearnih sistema malih dimenzija.

5. IDENTIFIKACIJA SA PARAMETARSKIM MODELIMA I VREMENSKI DISKRETNIM SIGNALIMA

Metoda najmanjih kvadrata za linearne statičke procese

Metodu najmanjih kvadrata je otkrio Gauss još 1875. Šesnaest godina nakon toga je utemeljio i sa stanovišta teorije vjerovatnoće.
U vanjskoj formi metodu bi mogli opisati na slijedeći način:

Neka je dat proces sa parametrima :

$$\underline{\theta_0}^T = [\theta_{10}, \theta_{20}, \ldots, \theta_{m0}] \qquad (5.1)$$

i izlaznom veličinom y(k). Izlazna veličina nije direktno mjerljiva , nego samo preko mjerljive veličine $y_p(k)$, koja je opterećena sa signalom smetnje n(k).
Nadalje, neka je dat model procesa:

$$y_M = f[\underline{\theta}] \qquad (5.2)$$

gdje su

$$\underline{\theta}^T = [\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m]$$

nepoznati parametri.

Pitanje koje se postavlja glasi: koji parametri $\underline{\theta}$ modela daju izlaz sistema , koji se najbolje podudara sa opažanjima $y_p(k)$?

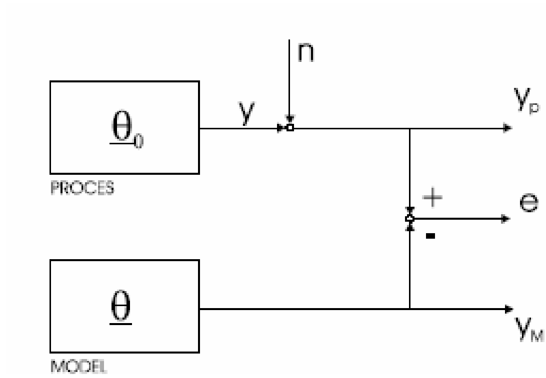
Gauss je to riješio tako da je definirao grešku opažanja:

$$e(k) = y_p(k) - y_M(k) \qquad (5.3)$$

i zahtjevao da je suma kvadrata grešaka :

$$V = e^2(1) + e^2(2) + \ldots + e^2(N) \qquad (5.4)$$

minimum, kao što je ilustrirano slijedećim blok dijagramom:

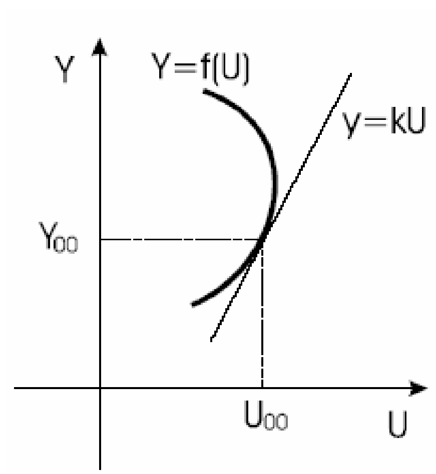


Slika 5.1

Gore postavljenu formulaciju ćemo upotrebiti za korištenje metode najmanjih kvadrata na jednostavnom primjeru statičkih procesa. Ta metoda je poznata pod imenom " regresijskog postupka".
Ponašanje u ravnotežnom stanju (statičko ponašanje) nekog procesa opisuje karakteristika:

$$Y = f(U)$$

Pri čemu je Y izlaz iz procesa a U je ulaz u proces.



Slika 5.2 Statička karakteristika procesa

Za manje perturbacije u okolini radne tačke (Y_{00}, U_{00}) vrijedi:

$$y = \Delta Y = Y - Y_{00}$$
$$u = \Delta U = U - U_{00}$$

Linearizovana relacija :

$$y = \frac{dY}{dU} u$$
$$y = Ku$$

Pošto je radna tačka tačno poznata, proces možemo opisati slijedećom jednačinom:

$$y_u(k) = K\, u(k)$$

U praksi moramo uzeti u obzir da je izlazna velićina $y_u(k)$ (korisni signal), opterećena sa signalom smetnje n(k) tako, da za mjerenu velićinu vrijedi:

$$y_p(k) = y_u(k) + n(k) \qquad (5.5)$$

n(k) je vremenski diskretni stacionarni signal sa E {n(k)} = 0.

Za realni proces sa šumom vrijedi:

$$Y_p\,(k) = Ku(k) + n(k) \qquad (5.6)$$

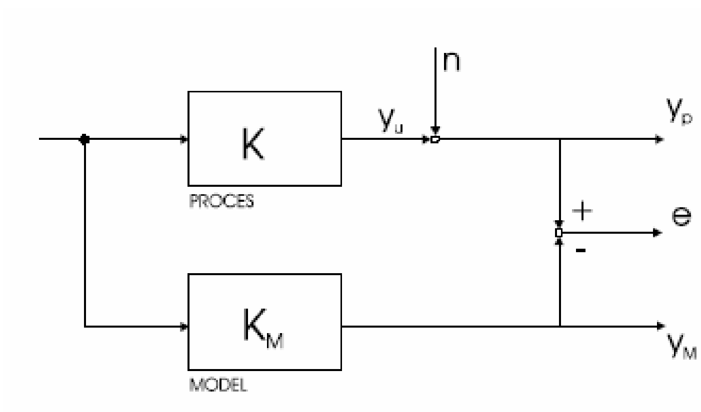
Naš zadatak je da ocjenimo parametar K iz N mjerenja parova pripadajućih vrijednosti u(0), u(1),...u(N-1), $y_p(1)$,..... $y_p(N-1)$.

Strukturu modela procesa možemo napisati u slijedećem obliku:

$$y_M(k) = K_M\, u(k)$$

Kada se obadva procesa, i realni i model, priključeni prema gornjoj slici, razlika izmedju njihovih izlaznih signala će biti :

$$e(k) = y_p(k) - y_M\,(k) \qquad (5.7)$$



Slika 5.3

Sa uvrštavanjem gornjih relacija , vrijedi :

$$e(k) = y_p(k) - K_M\, u(k)$$

tj.

greška = opažanje – izlaz iz modela

Po metodi najmanjih kvadrata minimiziraćemo kriterijsku funkciju:

$$V = \sum_{k=0}^{N-1} e^2(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[y_p(k) - K_M u(k) \right]^2 \tag{5.8}$$

po izabranom parametru K_M.

$$\frac{dV}{dK_M} = -2\sum_{k=0}^{N-1} \left[y_p(k) - K_M u(k) \right] u(k) = 0 \tag{5.9}$$

Iz ove jednačine slijedi ocjenska vrijednost:

$$\hat{K} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} y_p(k) u(k)}{\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k)} \tag{5.10}$$

i nakon množenja sa 1/N u brojniku i nazivniku:

$$\hat{K} = \frac{\hat{\phi}_{uy}(0)}{\hat{\phi}_{uu}(0)} \tag{5.11}$$

Vidimo da je proocjenjena vrijednost $\hat{K}$ data kao odnos ocjenjenih vrijednosti kroskorelacijske i autokorelacijske funkcije za $\tau = 0$.

Preduslov za postojanje ocjenjenih vrijednosti je :

$$\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) = 0$$

tj.

$$\hat{\phi}_{uu}(0) \neq 0$$

To znači da se ulazni signal mora pohranjivati, tj. mora pobudjivati proces sa parametrom K, kojeg nazivamo regresijski koeficijent.

Vektorski oblik modela za ocjenu parametara

Ako predjemo na vektorski model, imaćemo slijedeće vektore:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix} \underline{y_p} = \begin{bmatrix} y_p(0) \\ y_p(1) \\ \vdots \\ y_p(N-1) \end{bmatrix} \underline{e} = \begin{bmatrix} e(0) \\ e(1) \\ \vdots \\ e(N-1) \end{bmatrix} \qquad (5.12)$$

tako da sada jednačina greške za K_M= K glasi:

$$\underline{u} = \underline{y_p} - \underline{u}K$$

Kriterijska funkcija ima oblik:

$$V = \underline{e}^T \underline{e} = \left[\underline{y_p} - \underline{u}K\right]^T \left[\underline{y_p} - \underline{u}K\right] \qquad (5.13)$$

Izvod po K će dati:

$$\frac{dV}{dK} = \frac{d\underline{e}^T}{dK}\underline{e} + \frac{d\underline{e}}{dK}\underline{e}^T = 0 \qquad (5.14)$$

Izvodi će imati vrijednosti :

$$\frac{d\underline{e}}{dK} = -\underline{u}$$
$$\frac{d\underline{e}^T}{dK} = -\underline{u}^T$$

Slijedi:

$$\frac{dV}{dK} = -2\underline{u}^T\left[\underline{y_p} - \underline{u}K\right] = 0 \qquad (5.15)$$

Tako da ćemo dobiti:

$$\underline{u}^T \underline{u} K = \underline{u}^T \underline{y}_p$$

$$K = \frac{\underline{u}^T \underline{y}_p}{\underline{u}^T \underline{u}} \qquad (5.16)$$

Vidimo da je ova jednačina identična sa (5.10).

Konvergencija ocjene linearnog statičkog procesa

Parametar K linearnog statičkog procesa možemo procjeniti pomoću metode najmanjih kvadrata , ako su ispunjeni slijedeći preduslovi:

- Ulazni signal u(k) = U(k) – U_{00} mora biti egzaktno mjerljiv i njegova statička vrijednost poznata
- $\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) \neq 0$ mora biti zadovoljeno
- signal smetnje mora biti stacionaran i u skladu sa tim E {u(k)} = const.
- Ulazni signal u(k) ne smije biti koreliran sa signalom smetnje n(k).
- Mora biti E {u(k)} = 0 ili E {n(k)} = 0.

6. KORIŠTENJE IDENT TOOLBOXA ZA IDENTIFIKACIJU U OKVIRU MATLAB-A

Toolbox pod nazivom : "System identification toolbox" – SIT, u okviru MATLAB-a je pripremio Prof Dr. Lenneart Ljung sa Univerziteta u Linkopingu -Švedska.

U okviru Matlab Vers. 6.5 (Release 13) , to je Verzija 5.0.

Namjena SIT paketa

Po definiciji autora u predgovoru, toolbox za identifikaciju sistema SIT , je namjenjen za gradnju tačnih, pojednostavljenih modela kompleksnih sistema iz vremenske serije podataka opterećene sa šumom.

SIT obezbjedjuje alat za kreiranje matematskih modela dinamičkih sistema baziranih na prikupljenim i observiranim ulazno/izlaznim podatcima. Alat ima fleksibilan grafički interfejs za korisnika (Graphic user interface – GUI), koji pomaže organizaciji podataka i modela. Tehnike identifikacije koje su uključene su korisne za primjene koje uključuju analizu i dizajn sistema upravljanja kao i procesiranje signala te analizu vremenskih serija kao i analizu vibracija.
Pošto se matematski modeli dinamičkih sistema grade na bazi mjerenih podataka, potrebno je neko predznanje o tim modelima da bi uspješno koristili alate iz SIT paketa.

Osnovne karakteristike SIT paketa

SIT paket nam omogućava da izgradimo matematske modele dinamičkih sistema na bazi mjerenih podataka iz procesa.
Model se gradi u suštini podešavanjem parametara unutar datog ili predpostavljenog modela procesa, sve dok njegov izlaz ne koincidira što je više moguće sa mjerenjima izlaza iz procesa.

Dobar test kvaliteta , odnosno validnosti modela je da pažljivo posmatramo izlaz iz modela i poredimo ga sa mjerenim izlazom i na nekom drugom setu ulaza/izlaza koji nije bio korišten za razvoj modela , i da vidimo kako se uklapa (fituje) sa tim izlazima. Ovaj postupak se naziva validacijom podataka ("validation data").

Korisno je ponekad , takodjer pogledati i u dio podataka koje model nije bio u stanju da reprodukuje prema mjerenim podatcima (tkz. residuali tj. "residuals").

Tehnike identifikacije koje se koriste mogu se primjeniti na vrlo opšte oblike modela. Najčešći oblik modela su:

- modeli u obliku diferentnih jednačina (ARX i ARMAX)

- modeli u prostoru stanja (state-space models)

Za parametarske metode identifikacije mi moramo da unaprijed predpostavimo strukturu sistema. Ovo ponekada može biti relativno lako jer se traži da predpostavimo red sistema u obliku cjelobrojne vrijednosti (integer), ili pak da bude još dodatnih parametara.

Ako predpostavimo da je sistem linearan, možemo direktno procjeniti njegov impulsni ili step odziv koristeći korelacionu analizu ili njegov frekventni odziv , koristeći spektralnu analizu. Ovo omogućava dodatno korisno poredjenje sa drugim procjenjenim modelima.

SIT paket sadrži sve uobičajene tehnike za podešenje parametara u svim vrstama linearnih modela.
To nam takodjer omogućava da ispitujemo osobine modela, i da provjerimo da li su one od neke koristi, kao i da predprocesiramo i uredimo (filtriramo) prikupljene podatke mjerenja.

Rad sa linearnim modelima ne predstavlja neko veliko ograničenje, pošto su mnoge nelinearnosti u modelima takve prirode da omogučavaju da se podatci mjerenja mogu nelinearno transformirati (kao naprimjer kvadriranje napona ako je ulaz u proces el. snaga).
Korištenjem informacija iz fizikalne slike procesa čiji model gradimo , identificirajuči njegove parametre, mi možemo da tražimo transformacije varijabli koje će nam omogućiti da poznate nelinearnosti prevedemo transformacijama koordinata u linearne modele.

Terminologija koja se koristi u SIT paketu

Estimacioni podatci (estimation data) - je skup podataka koji se koristi da se fituje model sa podatcima. U GUI terminologiji (grafički korisnički interfejs), ovo se takodjer zove i radni podatci (**working data**)

Validacioni podatci (validation data) - je skup podataka koji se koriste za validaciju (vrednovanje) modela. Ovo uključuje simulaciju modela za ove podatke i računanje ostataka (residuals) iz modela kada se primjene ovi podatci.

Prikazi modela (model views) – su različiti načini ispitivanja osobina modela. Oni uključuju prikaze nula i polova (zeros and poles), tranzijentni i frekventni odziv, i slićne ostale ekrane.

Prikazi podataka (data views) – su različiti načini ispitivanja osobina skupova podataka. Najčešći i najkorisniji način je njihovo iscrtavanje i pažljiva analiza. Time se mogu detektovati tkz. iskoci (outliers). Oni predstavljaju znak nepouzdanih mjerenja, koji mogu biti posljedica grešaka u radu mjernih instrumenata.

Frekventni sadržaj signala, u terminima periodograma ili spektralnih procjena (spectral estimates), daju dosta informacija pri analizi podataka.

Skupovi modela (model sets) ili strukture modela (model structures) - su familije modela sa podesivim parametrima. Procjena parametara (**parameter estimation)** se sada svodi na nalaženje "najboljih " vrijednosti za ove parametre. Problem identifikacije sistema se sada svodi i na nalaženje dobre strukture modela kao i dobrih numeričkih vrijednosti za njegove parametre.

Metode parametarske identifikacije (parametric identification methods) – su tehnike procjene parametara za date strukture modela. U suštini , radi se o pronalaženju (numeričkim pretraživanjem), onih numeričkih vrijednosti parametara , koji daju najbolje slaganje izmedju izlaza modela (simuliranog ili predskazanog (predicted)), i mjerenog izlaza.

Neparametarske identifikacione metode (nonparametric identification methods) – su tehnike procjene ponašanja modela bez da se nužno koriste dati parametririzirani skup modela. Tipični neperametarski metodi uključuju **korelacionu analizu (correlation analysis)** , koja procjenjuje impulsni odziv sistema, i **spektralnu analizu (spectral analysis)**, koja procjenjuje frekventni odziv sistema.

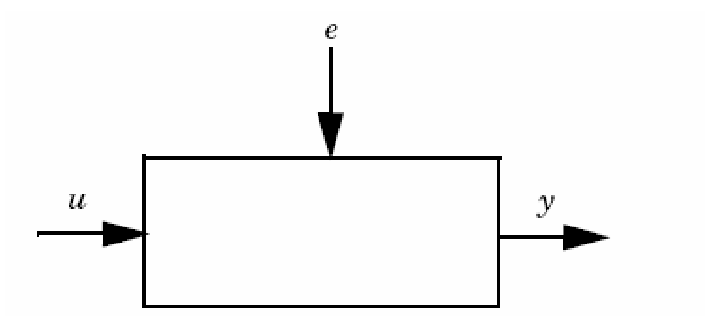
Validacija modela (model validation) - je proces povećanja povjerenja u kvalitet (isomorfnost) modela. U suštini, to se postiže sa intenzivnim testiranjem dobijenog modela da se ispitaju svi njegovi aspekti.

Od naročite važnosti je sposobnost modela da reproducira ponašanje skupa podataka za validaciju. Zbog toga je važno da se inspicira i dio podataka modela koji se ne uklapa u validacione podatke (ostatci , residuals).

Osnovne informacije o dinamičkim modelima

Kako smo već ranije rekli, identifikacija sistema se provodi sa ciljem gradnje njegovog dinamičkog modela. Zbog toga je neko apriorno znanje o procesu i modelima koji bi se mogli koristiti neophodno da bi se SIT mogao uspješno koristiti.

Modeli opisuju relacije izmedju signala mjerenja. Praktično je da pravimo razliku izmedju ulaznih i izlaznih signala. Tada su izlazi dejlomično odredjeni i sa samim ulazima. Uzmimo naprimjer da je objekat upravljanja avion, čiji su ulazi (upravljačke varijable), razne kontrolne površine na avionu kao što su krilca (ailerons), horizontalni rep (elevators), vertikalni repni djelovi (za kontrolu skretanja –attitude), itd. dok su izlazi naprimjer orijentacija aviona i njegova pozicija. U većini slučajeva, na izlaze utiče više signala nego što su samo mjerljivi ulazi. U primjeru letilice, to bi naprimjer bili udari vjetra, i efekti turbulencije. Takvi " nemjerljivi ulazi" se nazivaju signalima smetnji (disturbance) ili šuma (noise). Ako označimo ulaze, izlaze i smetnje sa u, y i e respektivno, relacija medju njima se može grafički predstaviti kao na slijedećoj slici:



Slika 6.1 Ulazni signal u, izlaz y i smatnja e

Svi ovi signali su funkcije vremena , i vrijednost ulaza u bilo kojem trenutku vremena je u(t). Često, kod primjene digitalnih sistema upravljanja i vodjenja, samo se razmatraju diskretne vrijednosti ovog signala, pošto uredjaji za mjerenje i obradu uzimaju i obradjuju ove podatke u trenutcima uzorkovanja (smapliranja) T. Problem modeliranja je da opišemo relacije koje postoje izmedju ova tri signala.

Osnovni dinamički model

Osnovna relacija koja povezuje ova tri signala je linearna diferentna jednačina. Primjer ovakve jdnačine je:

$$y(t) - 1.5y(t-T) + 0.7y(t-2T) = 0.9u(t-2T) + 0.5u(t-3T) \qquad \text{(ARX)}$$

Ovakava relacija nam kaže kako da izračunamo izlaz y(t) kada je ulaz poznat a smetnja se može ignorirati:

$$y(t) = 1.5y(t-T) - 0.7y(t-2T) + 0.9u(t-2T) + 0.5u(t-3T)$$

Izlaz u trenutku t se dakle izračunava kao linearna kombinacija prethodnih ulaza i izlaza. Identifikacioni problem je sada da se koriste mjerenja u i y da se odrede:

- Koeficijenti u ovoj jednačini (napr. -1.5, 0.7, itd)
- Koliko mnogo prethodnih izlaza treba koristiti u opisu (2 u ovom našem primjeru, tj. y(t-T) i y(t-2T)
- Vrijeme kašnjenja u sistemu je (2T u našem primjeru, vidimo da će trebati da prodje 2T vremenskih jedinica prije nego što će promjena u u uticati na y.)
- Koliko mnogo zakašnjelih ulaza treba koristiti (dva u našem primjeru : u(t-2T) i u(t-3T)). Broj zakašnjelih ulaza i izlaza se obićno naziva **redom modela (model order).**

Varijante opisa modela

Model koji je dat gornjim izrazom se naziva **ARX model**. Postoje više varijanti ovog modela koji su poznate pod imenima:

- modeli sa **izlaznom greškom** (**OE – output error model**),
- **ARMAX** modeli
- **FIR** modeli
- BOX-Jenkins (**BJ**) modeli.

Ovi modeli će biti opisani u nastavku.

U osnovi, ovi modeli se mogu smatrati varijantama ARX modela , dozvoljavajući i karakterizaciju osobina smetnji e.

Linearni modeli u prostoru stanja (linear state-space models). Ovi modeli su takodjer relativno lagani za korištenje. Bitna varijabla strukture sistema je red modela koji je skalarna varijabla. Ovo znači da imamo samo jedan stepen slobode kada tražimo odgovarajući model da opiše naše podatke.

Opšti linearni modeli se mogu opisati simbolično kao:

$$y = Gu + He$$

koja kaže da je mjereni izlaz y(t) suma doprinosa od mjerenog ulaza u(t) i doprinosa koji dolazi od šuma H_e. Simbol G označava dinamičke osobine sistema, tj. kako je izlaz formiran od ulaza. Za linearne sisteme to se naziva **prenosnom funkciojom** sistema. Simbol H se odnosi na osobine šuma, i naziva se **model smetnje**. On opisuje kako se smetnje na izlazu formiraju od istog standardiziranog izvora šuma e(t).

Modeli u prostoru stanja su čest oblik predstavljanja dinamičkih modela. Oni opisuju isti tip linearnih diferencijalnih relacija izmedju ulaza i izlaza kao i ARX model, ali su tako organizirane da je kašnjenje korišteno samo u izrazima. Da bi se ovo postiglo, uvedene su dodatne varijable, zvane varijable stanja (state variables). One nisu mjerljive ali se mogu rekonstruirati iz mjerljivih ulazno/izlaznih podataka.

Za osnovno korištenje SIT toolboxa , dovoljno je da znamo da je **red** modela u prostoru stanja, povezan sa brojem zakašnjelih ulaza i izlaza, koji se koriste u u odgovarajučim linearnim diferentnim jednačinama. Opis u prostoru stanja izgleda:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Ke(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + e(t)$$

Ovdje je x(t) vektor varijabli stanja. Red modela je dimenzija ovoga vektora. Matrica K odredjuje osobine smetnji. Primjetimo da ako je K=0, tada šum e(t) utiče samo na izlaz, i ne gradi se nikakav specifični model za osobine šuma. Ovo korespondira sa H=1 u opštem modelu datom u gornjem tekstu, i obićno se naziva ***model sa izlaznom greškom (output error model)***.
Primjetimo da kada je D=0 , tada nema direktnog uticaja sa u(t) na y(t). Tada uticaj ulaza na izlaz prolazi preko x(t) i time će biti zakašnjen za najmanje jedan sampl. Prva vrijednost vektora varijabli stanja **x(0)** odražava početne uslove za sistem na početku zapisa podataka. Kada koristimo modele u prostoru stanja, tipična opcija je da li da procjenimo D,K i x(0) ili da predpostavimo da su jednaki nuli.

Kako interpretirati izvor šuma

U mnogim slučajevima identifikacije sistema, efekti šuma na izlaz su zanemarivi u poredjenju sa efektima koje imaju ulazi na izlaze. Kada je odnos signala i šuma dobar (SNR tj. signal to noise ratio , je velik), tada nije toliko bitno da imamo dobar model za smetnje.

Ipak je važno da razumijemo ulogu smetnji i izvora šuma e(t), bilo da se javlja u ARX modelu ili u opštem opisu datom gore.

Postoje tri aspekta smetnji koje treba naglasiti:

- razumjevanje pojma bijelog šuma
- interpretacija izvora šuma
- korištenje izvora šuma kada radimo sa modelom

Kako mi možemo razumjeti bijeli šum (white noise). Sa formalne tačke gledišta, izvor šuma e će se normalno posmatrati kao bijeli šum. To znači da je on upotpunosti nepredvidiv.

Stvarni doprinos izlazu , He , ima realno značenje. On sadrži sve uticaje na mjereno y, koji nisu sadržani u ulazu u. Ipak izvor šuma e nema fizikalnog značenja. U primjeru letilice, smetnje su uključivale i udare vjetra i turbulenciju u zraku.

Kako ćemo postupati sa izvorom šuma kada koristimo model. Ako se model koristi za simulaciju, tj. da se studiraju odzivi na razne vrste ulaza, tada model smetnji nema neku direktnu ulogu. Obićno se uzima da je nula u simulacijama, tako da se analiziraju samo efekti od ulaza. (simulacija bez šuma).

Medjutim, stvar je različita kada se model koristi za predikciju. Predvidjanje budućih izlaza iz ulaza i prethodno mjerenih izlaza, znači da takodjer i budući doprinosi smetnji trebaju biti predvidjeni. Poznata, ili procjenjena , korelaciona struktura (koja je ustvari model smetnje), za smetnje, će omogućiti procjenjivanje budućih smetnji baziranih na prethodno izmjerenim vrijednostima.

Potreba i korištenje modela šuma se može sumirati kako slijedi:

- zahtjeva se , u najčešćem broju slučajeva, da se dobije bolja procjena za dinamiku, G.

- On indicira kako su pouzdane simulacije bez uticaja šuma (noise –free).

- zahtjeva se, kod pozdanih procjena i dizajna upravljanja stohastičkim sistemom.

Članovi koji karakteriziraju osobine modela

Osobine ulazno/izlazne relacije kao što je ARX model slijede iz numeričkih vrijednosti koeficijenata, i broja kašnjenja koji se koristi. U praksi se ove osobine opisuju preko slijedećih atributa:

Impulsni odziv (impulse response)

Impulsni odziv dinamičkog modela je izlazni signal koji se dobije kada je ulaz impuls, tj. u(t) je nula za sve vrijednsoti od t izuzev t=0, kada je u(0) = 1.
Može se izračunati kao i u jednačini za ARX, stavljajući t da bude jednako t=0,1,2,.. i uzumajući da je y(-T)=y(-2T)=0 i u(0)=1.

Odziv na step (step response)

Odziv na step je izlazni signal koji se dobije kada se primjeni step ulaz, tj. u(t) =0 , za t<0, i u(t)=1 za t>0.
Impulsni i odziv na step se nazivaju tranzijentni odzivi sistema (**transient responses**).

Frekventni odziv (frequency response)

Frekventni odziv linearnog dinamičkog modela opisuje kako model reaguje na sinusoidalne ulaze. Ovaj se odziv najčešće crta kao dva dijagrama, jedan koji pokazuje promjenu amplitude u funkciji od sinusiodalne frekvencije, i drugi koji pokazuje fazni pomak u funkciji od frekvencije.
Obadva dijagrama su poznata kao Bodeovi dijagrami.

Polovi i nule

Polovi i nule su ekvivalentan način opisivanja koeficijenata linearne diferentne jednačine kaao što je ARX model. Polovi se odnose na "izlaznu stranu" a nule na "ulaznu stranu" ove jednačine. Broj polova (nula) jednak je broju intervala sampliranja izmedju najviše i najmanje zakašnjelog izlaza.(odnosno ulaza za nule). U ARX primjeru, na početku ovog poglavlja imaćemo dakle dva pola i jednu nulu.

Osnovni koraci u identifikaciji sistema

Procedura odredjivanja modela dinamičkog sistema iz observiranih ulazno/izlaznih podataka uključuje tri osnovne komponente:

- ulazno/izlazne podatke
- set modela kandidata (strukture modela)
- kriterij selekcije odredjenog modela iz skupa, na bazi informacija u podatcima (identifikacioni model).

Proces identifikacije se sada sastoji u višekratnoj selekciji strukture modela, izračunavanja najboljeg modela u strukturi i evaluaciji osobina ovog modela da bi se vidjelo da li je on zadovoljavajući. Ovaj višekratni ciklus se može ovako stepenovati:

1. Dizajnirati eksperiment i prikupiti ulazno/izlazne podatke iz procesa koji će se identificirati.

2. Ispitati podatke. Isfiltrirati podatke (polirati ih) , tako da se iz njih uklone trendovi i iskakanja (outliers), i izabrati korisne dijelove orginalnih podataka. Primjeniti filtriranje i da se naglase važni frekventni opsezi.

3. Selektirati i definirati strukturu modela (tj. skup kandidata opisa sistema), unutar kojih treba potražiti model sistema.

4. Izračunati najbolji model u strukturi modela u skladu sa ulazno/izlaznim podatcima i datim kriterijem fitovanja.

5. Ispitati osobine dobijenog modela

6. Ako je model dovoljno dobar, tada završiti, inače vratiti se na korak 3 i pokušati sa drugim skupom modela. Po potrebi , može se pokušati i sa drugim metodama procjene (korak 4), ili nastaviti raditi na predprocesingu ulazno/izlaznih podataka (korak 1 i 2).

SIT toolbox nudi nekoliko funkcija za svaki od ovih koraka. Za korak 2 postoje rutine za crtanje podataka, za njihovo filtriranje, i za uklanjanje trendova u podatcima, kao i da se resampliraju i rekonstruišu nedostajući podatci.

Za korak 3, SIT toolbox nudi niz neparametarskih modela , kao i najčešće crna kutija (black-box) ulazno/izlazne strukture i strukture u prostoru stanja, kao i opšte i prilagodjene linearne modele u prostoru stanja u diskretnom i kontinualnom vremenu.

Za korak 4, metodi opšte predikcije greške (maksimalne sličnosti – maximum likelihood), su na raspolaganju za parametarske modele, kao i metode instrumentalne varijable (instrumental variable methods), te metodi prostora stanja takodjer za parametarske modele, dok se korelacione metode i metode spektralne analize nude za neparametarske strukture modela.

Da bi se ispitali modeli u petom koraku, mnoge funkcije dozvoljavaju računanje i prezentaciju frekventnih funkcija i polova i nula, kao i simulaciju i predikciju koristeći model. Funkcije su takodjer uključene za transformacije izmedju kontinualnog i diskretnog vremenskog modela, u formatu koji se koristi i u drugim MATLAB toolboxovima kao što je **Control system toolbox** i **Signal processing toolbox**.

Start identifikacione procedure

Ne postoje standardne i sigurne procedure za gradnju dobrih modela u identifikaciji sistema. Pošto postoji veliki broj mogučnosti, moguće se lako izgubiti u tome šta treba uraditi, koje strukture modela treba testirati, itd.

Korak 1: Posmatranje podataka

Iscrtati rasoložive podatke ulaza/izlaza. Pokušati naći i prepoznati u njima neku dinamiku. Da li je moguće u njima uočiti efekte u izlazima kada se mjenjaju na ulazu. Da li je moguće uočiti neke nelinearne efekte, kao naprimjer različite odzive na različitim nivoima, ili različite odzive kada se primjeni pozitivni odnosno negativni step, od neke radne tačke. Da li ima dijelova podataka koji su zamazani (messy) ili ne nose nikakvu informaciju. Koristiti ovakvu analizu u podatke da se odrede dijelovi podataka koji će biti korišteni za estimaciju , kao i dijelovi podataka za validaciju modela.

Analizirati i odrediti da li fizički nivo podataka igra neku ulogu u modelu? Ako ne igra, podatci se mogu detrendirati na taj način da im se ukloni njihova srednja vrijednost. Modeli će nakon ovoga opisivati kako promjene u ulazu daju promjene u izlazu, ali neće objasniti stvarne nivoe u signalima.

Default situacija , sa dobrim podatcima, je da mi detrendiramo podatke na taj način što im uklonimo srednje vrijednosti, i nakon toga izaberemo prvu polovinu podatka za procjenu modela, a ostali dio podataka koristimo za validaciju modela. Ovo je upravo one što se dešava kada primjenimo brzi start (**Quickstart**), u okviru pop-up menija **Preprocess** u glavnom **ident** prozoru.

Korak 2: Razvoj osjećaja za poteškoće

Primjeniti **Quickstart** u okviru pop-up menija **Estimate** u glavnom **ident** prozoru.Ovo će izračunati i prikazati procjenu spektralne analize i procjenu korelacione analize, kao i ARX model četvrtog reda sa kašnjenjem koje je procjenjeno iz korelacione analize, kao i default redom modela u prostoru stanja (state-space), izračunatog putem rutine ***n4sid***. Ovo će nam dati tri dijagrama. Posmatrati ih i analizirati tražeći:

- procjene spektralne analize i ARX i frekventne funkcije modela u prostoru stanja.
- procjene korelacione analize i tranzijentnih odziva ARX i modela u prostoru stanja.
- Izlaza mjerenih podataka za validaciju i simuliranih izlaza ARX i modela u prostoru stanja.

Ako su ovi argumenti razumni, problem nije toliko težak i relativno jednostavan linearni model će biti adekvatan. Dodatno, može se još izvršiti i fino podešenje u izboru reda sistema, kao i odrediti model za šum, i onda se može nastaviti sa korakom 4. Ako ovo nije tačno, tada se treba vratiti ponovno na korak 3.

Step 3: Ispitivanje poteškoća

Može biti nekoliko razloga zašto poredjenja u koraku 2 nisu izgledala dobro. U ovoj sekciji ćemo diskutovati najčešće uzroke, i kako se mogu prevazići.

Nestabilan model

ARX ili model u prostoru stanja se može pokazati da je nestabilan, ali može još uvjek biti koristan za svrhe upravljanja. Treba ga promjeniti u 5 ili 10 koraka predikcije unaprijed, umjesto da se koristi za simulaciju u prozoru izlaznog modela (**model output view**).

Feedback u podatcima (feedback in data)

Ako postoji povratna veza (feedback) sa izlaza na ulaz, zbog toga što je možda uključen neki regulator, tada procjene na bazi spektralne i korelacione analize nisu pouzdane. Razlike izmedju ovih procjena i ARX i modela u prostoru stanja mogu biti zanemarene u ovakvim slučajevima. U pogledu reziduala modela (models residuals view), parametarskih modela, feedback u podatcima može takodjer da bude vidljiv i kao korelacija izmedju reziduala i ulaza za negativna kašnjenja.

Model smetnje (disturbance model)

Ako je model u prostoru stanja jasno bolji nego ARX model, kod reprodukcije mjerenog izlaza, ovo je indikacija da smetnje imaju značajan uticaj, i da će biti potrebno da se pažljivo modeliraju.

Red modela

Ako model četvrtog reda ne daje dobar dijagram (plot) izlaza iz modela, treba okušati sa osmim redom. Ako se uklapanje (fit) značajno poboljšalo, slijedi da su potrebni modeli višeg reda, ali i da su linearni modeli dovoljni.

Dodatni ulazi

Ako uklapanje (fit) izlaza modela (model output fit) , nije značajnije poboljšan sa testovima koji su prethodno opisani, potrebno je razmisliti i o fizikalnosti modela koji se gradi. Da li postoji više signala koji su mogli biti mjereni koji mogu da utiču na izlaz? Ako postoje, treba ih uključiti u ulaze i ponovno pokušati sa ARX modelom četvrtog reda od svih ulaza.
Primjetimo da ulazi ne treba uopšte da budu kontrolni ulazi, bilo što je mjerljivo , uključivo i smetnje, treba biti tretirano kao ulazi u sistem.

Nelinearni efekti

Ako uklapanje (fit) izmedju mjerenog izlaza i izlaza iz modela je još uvjek loš, treba razmatrati fizikalnost procesa u sistemu. Da li postoje neki nelinearni efekti u sistemu?. U tom slučaju, treba formirati nelinearnosti od mjerenih podataka i dodati ova transformirana mjerenja kao dodatne ulaze. Ovo može biti jednostavno kao napr. formiranje proizvoda mjerenja napona i struja, ako uočavamo da je električna snaga ona koja predstavlja ulaz u sistem napr. peći ili grijača, a temperatura njegov izlaz. Ovo naravno zavisi od aplikacije.

Nije neki veliki dodatni posao, da se formira još jedan broj dodatnih ulaza sa razumljivim nelinearnim transformacijama mjerenja, i da se testira da li njihovo uključenje poboljšava uklapanje (fitovanje) modela u podatke mjerenja.

Problemi još postoje

Ako niti jedan od ovih testova ne vodi ka modelu koji je u stanju da reprodukuje dovoljno dobro podatke validacije, zaključak može biti da se iz podataka ne može proizvesti zadovoljavajuće dobar model. Za ovo mogu postojati i neki razlozi. Može biti da sistem ima neke vrlo komplikovane nelinearnosti koje se ne mogu realizirati na fizikalnim osnovama. U takvim slučajevima, nelinearni , crna kutija (black box) , modeli mogu biti jedno rješenje. Jedan od najčešće korištenih modela ovakvog tipa su vještačke neuronske mreže (artificial neural networks – ANN).

Drugi važan razlog je da podatci jednostavno ne sadrže dovoljno informacija, naprimjer zbog lošeg omjera korisnog signala i šuma, velikih i nestacionarnih smetnji, promjenjljvih osobina sistema, itd.

Ukoliko sve ovo nije slučaj, koristiti dodatne zaključke o tome koji se ulazi još mogu koristiti i proslijediti dalje ka koraku 4.

Korak 4: Fino podešavanje izbora reda modela i strukture smetnje

Za realne podatke ne postoji nešto što bi se zvalo "korektna struktura modela". Ipak, različite strukture mogu dati vrlo različite kvalitete modela. Jedini način da se ovo utvrdi je da se proba niz različitih struktura i porede osobine dobijenih modela.

Uklapanje izmedju simuliranog i mjerenog izlaza

Treba držati prozor izlaza modela (model output view) otvorenim i gledati u uklapanje izmedju simuliranog izlaza modela i mjerenog izlaza iz validacionih podataka. Formalno, mi bi mogli izabrati model za koji je ovaj broj uklapanja največi. U praksi, je bolje biti pragmatičniji , i takodjer uzeti u obzir kompleksnost modela, i da li važne osobine odziva izlaza su prisutne i u izlazu iz modela.

Test analize ostatka (residual analysis test)

Treba tražiti od dobrog modela da kros-korelaciona funkcija izmedju reziduala i ulaza ne izlazi značajnije van regiona povjerenja (confidence region). Inače, postoji nešto u ostatcima što ima izvor u ulazu, i nije bilo na odgovarajući način uzeto u modelu. Naprimjer, jasan vrh u k intervalu kašnjenja na ulazu u(t-k) nije bio prenesen na izlaz y(t). Neko pravilo "od oka" , je da sporo varirajuća kros korelaciona funkcija van regiona povjerenja je indikacija da imamo isuviše malo polova, a oštri vrhovi indiciraju da imamo malo nula ili pogrešne vrijednosti kašnjenja.

Poništenje polova i nula

Ako dijagram polova i nula (uključivo i intervale povjerenja) indicira na poništenje polova i nula u dinamičkom modelu, ovo onda sugerira na mogućnost korištenja modela nižeg reda. Naročito, ako se pokaže da red ARX modela treba biti povećan da bi se dobilo dobro uklapanje, ali se pokazuju i poništavanja polova i nula, onda su dodatni polovi uvedeni da bi se opisao šum. Ako je to slučaj, treba pokušati sa ARMAX, OE, ili BJ strukturom modela, sa A ili F polinomom reda koji je jednak broju neponištenih polova.

Koje strukture modela trebaju biti testirane?

Potrebno je često samo nekoliko sekundi da bi se izračunao i evaluirao model neke strukture, tako da treba imati pozitivan odnos prema testiranju.

Mnogo ARX modela: Postoji jednostavan način simultanog testiranja mnogih ARX struktura. Tako možemo unjeti u polje : **Orders** (red) mnogo kombinacija redova, koristeći notaciju kolone (":"). Možemo takodjer pritisnuti taster : **order selection** (selekcija reda). Kada izaberemo **Estimate**, modeli za sve kombinacije se izračunavaju i njihovo fitovanje (predikcija greške) sa validacionim podatcima je pokazano na specijalnom dijagramu. Klikanjem na ovaj dijagram ubaciće se najbolji modeli sa bilo kojim izabranim brojem podataka u tablu Modela (Model board), i biće evaluirani po želji.

Mnogo modela u prostoru stanja: slična mogućnost je takodjer raspoloživa za modele crne kutije (black box) u prostoru stanja, koji su procjenjeni sa rutinom ***n4sid***. Kada je nadjen dobar red, treba pokušati sa PEM (parameter estimation command) metodom estimacije, koji često poboljšava tačnost.

ARMAX, OE i BJ modeli: Kada steknemo osjećaj za odgovarajuća kašnjenja i red dinamike, često je korisno da pokušamo sa ARMAX , OE i/ili BJ modelima sa ovim redom, i takodjer testiramo za neke druge redove za prenosnu funkciju smetnje (C i D). Naročito OE struktura je pogodna kod loše prigušenih sistema.

Multivarijabilni sistemi

Sistemi sa mnogo ulaznih signala i/ili mnogo izlaznih signala se zovu **multivarijabilnim**. Takvi sistemi su često mnogo veći izazov za gradnju modela. Naročito sistemi sa nekoliko izlaza mogu biti teški. Osnovni razlog teškoća je što kuplovanja izmedju nekoliko ulaza i izlaza vode ka kompleksnijim modelima. Strukture koje se koriste su bogatije u broju parametara koje treba identificirati da se dobije dobro uklapanje.

Raspoloživi modeli

SIT toolbox kao i GUI općenito , dobro rade sa linearnim multivarijabilnim modelima. Svi ranije pomenuti modeli su podržani za jedan izlaz, višestruki ulaz. Za slučaj višestrukih izlaza, ARX modeli kao i modeli u prostoru stanja su pokriveni.

Višestruki izlazi sa ARMAX i OE modelima su pokriveni za opis putem modela u prostoru stanja, ARMAX korespondira sa procjenom K matrice, dok OE korespondira sa fiksiranjem K na nulu (0). Ovo su inače iskačuće (pop-up) opcije u editoru za red GUI modela..

Općenito govoreći, preferira se rad sa modelima u prostoru stanja za multivarijabilne slučajeve, pošto kompleksnost strukture modela se lakše rješava. U suštini ovdje se svodi na izbor reda modela.

Rad sa podskupovima ulazno/izlaznih kanala

U procesu identifikacije dobrih modela sistema, često je korisno selektirati podskupove ulaznih i izlaznih kanala. Parcijalni modeli ponašanja sistema će se time konstruirati. Možda neće biti jasno, naprimjer da li svi mjereni ulazi imaju značajan uticaj na izlaze. To se najlakše testira uklanjanjem jednog ulaznog podatka iz podataka, zatim gradeći model o tome kako izlaz(i) zavisi od preostalih ulaznih kanala, i provjeravajući da li postoji značajnije pogoršanje u uklapanju izlaza modela sa mjerenim izlazima.

Uopšteno govoreći, uklapanje postaje bolje kada se više ulaza uključi i njačešće se pogoršava kada se uključi više izlaza. Da bi se ovo razumjelo, treba uzeti u obzir da model koji treba da objasni ponašanje nekoliko izlaza je mnogo složeniji nego onaj koji to radi samo za jedan izlaz. Ukoliko imamo problema da dobijemo dobre modele za model sa višestrukim izlazima, može biti pametno da modeliramo jedan po jedan izlaz, da bi uoćili koji su izlazi oni koji prave najviše problema kod validacije.

Modeli koji se koriste za simulacije mogu se takodjer graditi od modela sa jednim izlazom, za jedan po jedan izlaz. Ipak, modeli za predskazanja (predikcije) i upravljanje bit će u stanju da proizvedu bolje rezultate ako se konstruiraju za sve izlaze simultano. Ovo slijedi iz činjenice da , znajući da skup svih prethodnih izlaza daje bolju osnovu za predikciju, nego znajući samo prošle izlaze u jednom kanalu.

Takodjer, za sisteme, gdje različiti izlazi reflektiraju slićne dinamike, koristeći nekoliko izlaza simultano, će pomoći u procjeni dinamike.

Neki praktični savjeti

Treba slijediti slijedeće korake kod rada sa SIT paketom:

- Uvesti podatke i kreirati skup podataka sa svim ulaznim i izlaznim kanalima od interesa. Zatim provesti nužno predprocesiranje ovog seta u smislu detrendiranja, itd..., i zatim izabrati validacioni set podataka sa svim kanalima

- Selektirati zatim radne podatke (working data) sa svim kanalima , i procjeniti modele u prostoru stanja (state space), sa različitim redovima koristeći ***n4sid*** za ove podatke. Ispitati rezultujući model primarno koristeći prozor izlaza modela (**model output view**).

- Ako je teško da se dobije dobro uklapanje u svim kanalima izlaza, ili mi želimo da istražimo koliko su važni pojedini ulazni kanali, treba konstruirati novi set podataka koristeći podskupove originalnih ulazno/izlaznih kanala. Koristiti pop-up meni **Preprocess>Select Channels** za ovo. Ne mjenjati validacione podatke. GUI će voditi evidenciju o ulazinim i izlaznim kanalima. On će učinit prave stvari , kada evaluiramo kanalno ograničene modele koristeći validacione podatke. Možda će takodjer biti potrebno da se vidi da li poboljšanja u uklapanju su dobijena za različite tipove modela, koji se grade za svaki pojedinačni izlaz koji se dodaje jedan po jedan.

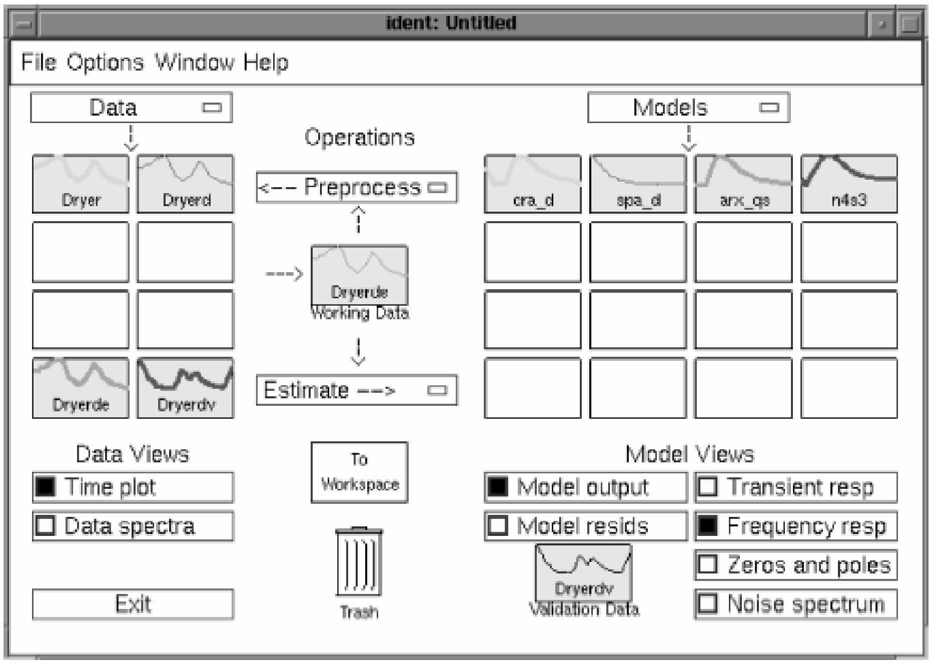
- Ako se odlučimo za model sa više izlaza, tada je često najlakši put da se koriste modeli u prostoru stanja. Koristiti ***n4sid*** kao primarni alat i pokušati ***pem*** kada se dobar red nadje.

GUI kod SIT paketa

SIT obezbjeđuje grafički korisnički interfejs (GUI – graphical user interface), koji pokriva najveći dio funkcija toolboksa, i daje lagani pristup svim varijablama koje se kreiraju u toku sesije. On se aktivira kucanjem :

ident

u komandni prozor MATLAB-a.



Slika 6.2. Glavni prozor SIT paketa

Model i ploče podataka (data boards)

Glavni informacioni i komunikacioni prozor od **ident** , je ispunjen dvijema tabelama:

- Tabela o raspoloživim setovima podataka, od koji je svaki predstavljen sa jednom ikonom
- Tabela kreiranih modela, od kojih je svaki predstavljen sa ikonom

Ove tabele će se nazivati ploča modela (model board) i ploča podataka (data board). Korisnik unosi setove podataka u ploču podataka na jedan od slijedećih načina:

- otvarajući ranije pohranjene sesije
- uvozeči ih iz radnog prostora (workspace) MATLAB-a
- kreirajući ih kroz detrendiranje, filtriranje, selekciju podskupova, itd. iz drugog seta podataka u ploči podataka (data boardu).

Uvoz podataka se ostvaruje kroz pop-up menu **Data** dok se kreiranje novih setova podataka ostvaruje kroz pop-up menu **Preprocess**.

Modeli se unose u sumarnu ploču na jedan od slijedećih načina:

- otvaranjem ranije spašenih sesija
- uvoženjem iz MATLAB radnog prostora
- procjenjujući ih iz podataka

Uvozi se ostvaruju kroz pop-up menu **Models**, dok sve različite šeme procjene se mogu izabrati iz pop-up menija **Estimate**.
Ploče podataka i modela se mogu reorganizirati pomoću miša i tehnike " drag and drop". Dodatne ploče se mogu otvoriti , ako su potrebne , iz menija **Options**.

Radni podatci

Svi setovi podataka i modeli se kreiraju iz seta radnih podataka (working data set). Ovo su podatci koji su dati u centru **ident** prozora. Da bi se promjenio set radnih podataka, treba kliknuti zatim vući (drag) i ispustiti (drop) na ikonu " working data" , bilo koji drugi set podataka iz ploče podataka,

Prikazi (views)

Ispod ploča za podatke i modele su tasteri za izbor različitih prikaza. Oni kontrolišu ,koji aspekt seta podataka i modela mi želimo da ispitujemo.
Da bi izabrali set podataka ili model, tako da se prikažu njegove karakteristike, treba kliknuti na njegovu ikonu. Selektirani objekat je označen sa debljom linijom u ikoni. Da bi se deselektirao treba ponovno kliknuti na njega. Veći broj podataka i modela može se simultano ispitivati. Da bi se dobilo više podataka informacija o objektu, treba se dva puta klinuti (ili kliknuti sa desnim tasterom) na njegovu ikonu.

Validacioni podatci

Dva prikaza modela : izlaz modela (model output) i ostaci modela (model residuals) ilustriraju osobine modela Ovo je set koji je označen u boksu koji se nalazi ispod ova dva prikaza. Da bi se promjenili validacioni podatci, treba vući i ispustiti (drag and drop) bilo koji set podataka iz ploče podataka na ikonu validacionih podtaka.

Česta i dobra praksa kod identifikacije je da se evaluiraju osobine procjenjenog modela, koristeći "svjež" set podataka, tj. onaj koji nije korišten za estimaciju. Zbog toga je i dobar savjet da se uzme da su validacioni podatci različiti od radnih podataka (working data), ali naravno moraju biti medjusobno kompatibilni.

Radni tok (work flow)

Korisnik počinje sa uvozom podataka (koristeči pop-up meni **Data**), zatim ispituje set podataka koristeći prikaze **Data views**. Zatim će vjerovatno ukloniti srednje vrijednosti iz podataka i izabrati podskupove podataka za namjene procjene i validacije, koristeći komande iz pop-up menija **Preprocess**. Zatim može nastaviti da procjenjuje modele, koristeći mogućnosti iz pop-up menija **Estimate**, možda počevši sa brzim startom (quickstart). Zatim će korisnik ispitati dobijene modele u odnosu na preferirane aspekte koristeći različite prikaze modela (**model views**). Osnovna ideja je svaki provjereni prikaz pokazuje osobine svih izabranih modela u svakom trenutku. Ova funkcija je "uživo" , tako da modeli i prikazi mogu biti provjeravani po volji u online režimu. Korisnik selektira i deselektira model klikčući uzastopno na njegovu ikonu.

Management aspekti

Zapisnik: Da bi se prisjetili šta smo sve činili sa podatcima i modelima, dvaput kliknuvši na ikonu (ili jednaput desnim tasterom miša), dobit ćemo prozor sa kompletnim zapisom (diary), koji sadrži podatke o tome kako je taj objekat kreiran, zajedno sa drugim bitnim informacijama. Sada je moguće i dodati i komentare i promjeniti imena objekta i njegovu boju.

Sesije:

Ploče modela i podataka sa svim modelima i setovima podataka i njihovim zapisima (diaries) se mogu pohraniti (pod menijem **File**) u bilo kojem trenutku, te kasnije ponovo loadovati.

Čišćenje:

Ploče će sadržavati proizvoljan broj modela i setova podataka (putem kreiranja klonova ploče kada je to neophodno). Zbog toga se preporućuje da se počiste (clear) modeli i setovi podataka koji više nisu interesantni. Da bi se ovo uradilo treba dovući objekat do kante za odbacivanje (**trash can**).

Varijable u radnom prostoru (workspace variables)

Modeli i setovi podataka kreirani sa GUI normalno nisu raspoloživi u MATLAB radnom prostoru. Medjutim one se mogu izvesti u taj radni prostor, pomoću miša, vukući i ostavljajući ikonu objekta u boks radnog prostora (workspace box). Oni će imati imena u radnom prostoru koja su imali u trenutku izvoza u radni prostor. Nakon toga sa njima možemo raditi u radnom prostoru koristeći MATLAB komande, a onda eventualno uvesti ponovo modifikovanu verziju ovih varijabli natrag u **ident**. Primjetimo da su modeli i podatci izvezeni kao objekti ident toolboksa tj. : ***idmodel, idfd i iddata***.
GUI imena za modele i setove podataka se sugerišu od strane default procedura. Normalno, korisnik može zamjeniti i unjeti bilo koje drugo ime kod kreiranja varijable. Imena takodjer mogu biti promjenjena (nakon dvostrukog klika na ikonu), kad god to zaželimo. Suprotno od situacije sa radnim prostorom, dva GUI objekta mogu imati isto ime.

Rad sa podatcima

U SIT boksu , signali i observirani podatci su predstavljeni kao vektori kolone , tj. :

$$u = \begin{bmatrix} u(1) \\ u(2) \\ \dots \\ \dots \\ u(N) \end{bmatrix}$$

Vrijednost u redu k , tj. u(k) , je vrijednost signala u k-tom trenutku samplovanja. U opštem slučaju ulaz u sistem je označen sa u a izlaz sa y. Ako sistem ima nekoliko ulaznih kanala, ulazni podatci su predstavljeni sa matricom, gdje kolone su ulazni signali u različitim kanalima:

$$u = \begin{bmatrix} u1\ u2\ \dots\ um \end{bmatrix}$$

Isto vrijedi i za sisteme sa nekoliko izlaznih kanala.

Posmatrani (observed) ulazno/izlazni zapis podataka je predstavljen u SIT toolboksu sa ***iddata*** objekat, koji je kreiran sa ulaznim i izlaznim signalima sa:

```
Data = iddata(y,u,Ts)
```

gdje je Ts vrijeme sampliranja.

iddata objekat se takodjer može kreirati iz ulaznih i izlaznih signala kada se podatcu unesu u GUI.

Unošenje ulazno/izlaznih podataka u GUI

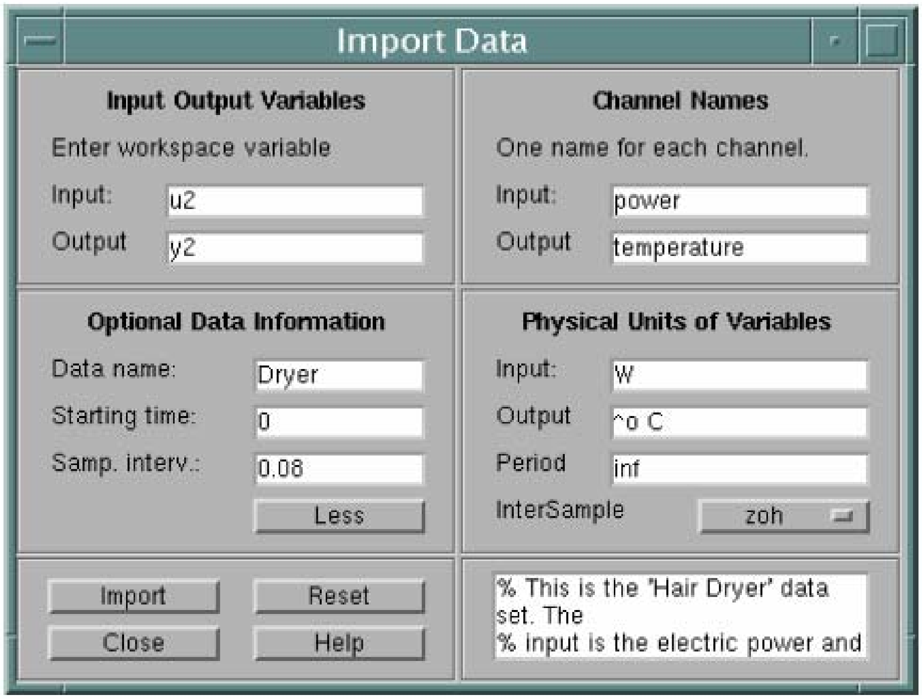
Informacija o podatcima seta koji treba biti unesen u GUI je slijedeća:

1. Ulazni i izlazni signali
2. Ime koje je dato setu podataka
3. Interval samplovanja.

Dodatno, uz prethodne obavezne informacije, moguće je dodati i neke osobine koje mogu biti korisne kao:

4. Vrijeme startovanja sampliranja
5. Imena ulaznih i izlaznih kanala
6. Jedinice za ulaze i izlaze
7. Periodićnost i medjusamplovsko ponašanje ulaza
8. informacije o podatcima: ovo može dati dodatne informacije o podatcima koje su korisne radi arhiviranja i izvještavanja.

Kada selektiramo komandu **Import** iz pop-up menija **Data** , otvoriće se dijalog boks , gdje možemo unjeti gore pomenute informacije. Ovaj boks ima pet polja koje treba ispuniti:



Slika 6.3 Dijalog boks za uvodjenje podataka u GUI SIT paketa

Klikom na taster **More** , još šest dodatnih polja će postati raspoloživo.

Input and **Output** : Unjeti imena varijabli ulaza i izlaza. Ovo trebaju biti varijable u MATLAB radnom prostoru, tako da će biti potrebno prvo da ih loadujemo sa diska prije toga.
Ustvari, korisnik može unjeti bilo koje MATLAB izraze u ova polja, i oni će biti evaluirani da izračunaju ulaze i izlaze prije nego što se unesu podatci u GUI.

Data name : Unjeti ime seta podataka koji će se koristiti u GUI. Ovo ime se može kasnije promjeniti.
Vrijeme početka i interval sampliranja (starting time and sampling interval): Ispuniti ova polja za korektne skale vremena i frekvencija za dijagrame.
Može se opciono ispuniti još jedna stranica.

Imena kanala (channel names)

Unjeti stringove za različita imena ulaznih i izlaznih kanala. Razdvojiti stringove sa zarezima (,). Broj imena mora biti jednak broju kanala, Ako ovi ulazi nisu ispunjeni, default imena , y1, y2, ..., u1,u2,.. će se koristiti.

Jedinice po kanalima (channel units)

Unjeti, u analognoj formatu, inženjerske jedinice u kojima su mjerenja napravljena. Ove jedinice će se zadržati u svim modelima koji će biti izgradjeni od ovih podataka, ali se koriste samo kod iscrtavanja dijagrama (plots).

Period :
Ako je ulaz periodičan, ovdje treba unjeti dužinu perioda. "Inf" znaći neperiodićni ulaz, koji je i default.

Intersample :
Izabrati ovaj tip rada (medjusampliranje) i to :
ZOH (zero order hold, kolo memoriranja nultog reda, tj. ulazni signal je konstantan u intervalu izmedju dva sampliranja),
FOH (first order hold, kolo memoriranja prvog reda, tj. ulazni signal je linearan izmedju dva sampliranja),
BL (band –limited , ograničenog pojasa, tj. kontinualni vremenski ulazni signal nema snage na frekvencijama iznad Nyquistove).
Default je ZOH.

Boks na dnu je za **Notes** , gdje korisnik može unjeti bilo koji tekst koji želi da se čuva zajedno sa setom podataka.

Konačno, treba izabrati **Import**, da bi se unjeli podatci u GUI. Kada nema više setova podataka koje treba unjeti, izabrati **Close** da se zatvori dijalog boks. **Reset** će isprazniti sva polja u dijalog boksu.

Opisana procedura će kreirati ***iddata*** objekat, sa svim svojim osobinama. Ako već imamo ***iddata*** objekat na raspolaganju u radnom prostoru, možemo ga diraktno uvesti selektirajući format podataka **Iddata** Objekt u pop-up meniju na vrhu dijaloga **Import Data.**

Analiza podataka

Prva stvar koju trebamo uraditi nakon unošenja seta podataka u ploču podataka je da ih ispitamo. Čekiranjem **Data View** polja **Time plot,** tj dijagram ulaznih i izlaznih signala će biti pokazani za selektirani set podataka.
Za slučaj multivarijabilnih podataka, različite kombinacije ulaznih i izlaznih signala se izabiraju u meniju sa elementom **Channel** u prozoru dijagrama (plota). Koristeći funkciju zumiranja, različiti djelovi podataka mogu biti ispitivani sa više detalja.
Da bi se ispitao frekventni sadržaj podataka, treba čekirati **Data View** boks **Data Spectra.** Funkcija je analogna sa **Time plot,** stim što će se pokazati spektar signala. Po default pokazaće se periodogrami podataka, tj. apsolutna vrijednost kvadrata Fourieove transformacije podataka. Plot se može promjeniti u novi za bilo koji izabrani opseg frekvencija, i za različite načine procjenjivanja spektra, sa elementima **Options** u prozoru spektara.

Namjena ispitivanja podataka na ove načine je da se nadje da li ima djelova podataka koji nisu pogodni za identifikaciju, da li informacioni sadržaji podataka su pogodni u interesantnim regionima frekvencija, i da li podatci moraju biti predprocesirani , prije nego što se koriste za estimacije.

Predprocesiranje podataka

Detrendiranje

Detrendiranje podataka uključuje uklanjanje srednjih vrijednosti ili linearnih trendova iz signala (ovo znači da se srednje vrijednosti i linearni trendovi prvo izračunaju a zatim se uklone individualno iz svakog pojedinačnog signala). Ovoj funkciji se može pristupiti iz pop-up menjia **Preprocess**, selektirajući element **Remove means** (otkloni srednje vrijednosti) , ili **remove trends** (otkloni trendove). Naprednije metode detrendiranja, kao što je otklanjanje trendova po segmentima podataka, ili sezonskih varijacija, nije moguće ostvariti iz ovog GUI-a.

Općenito se preporučuje da se otklone barem srednje vrijednosti iz podataka prije faze procjene. Postoje medjutim situacije, kada nije preporučljivo da se uklone srednje vrijednosti iz podataka. Može naprimjer da bude slučaj da su fizikalni nivoi signala ugradjeni u model koji se razmatra, ili da integracije u sistem se moraju provesti sa korektnim nivoom ulaza koji se integrišu.

Selekcija opsega podataka

Često je slućaj da je cjelokupni zapis podataka neodgovarajući za identifikaciju, zbog niza nepoželjnih karakteristika (naprimjer, nedostajući ili loši podatci, prolomi smetnji, promjene nivoa , itd), tako da se mogu koristiti samo dijelovi zapisa. U svakom slučaju se preporućuje selektirati dio mjerenih podataka za namjene estimacije a drugi dio za namjene validacije. Pop-up meni element **Preprocess>>Select Range...** otvara dijalog boks, koji olakšava selekciju različitih dijelova podataka, ukucavanjem opsega, ili njihovim markiranjem na taj način što se crtaju pravougaonici sa pritisnutim tasterom miša.
Za multivarijabilne podatke često je prednost startati raditi sa samo nekim od ulaznih i izlaznih podataka. Elementi menija **Preprocess>>Select** dozvoljavaju korisniku da izabere podskupove ulaza i izlaza. Ovo se radi na taj način da je ulazno/izlazno numerisanje i imena ostaju konzistentna i kada evaluiramo osobine podataka i modela, za modele koji pokrivaju različite podskupove podataka.

Prefiltriranje

Sa filtriranjem ulaznih i izlaznih signala putem linearnih filtera (isti filter za sve signale), korisnik može, naprimjer ukloniti drift i smetnje visokih frekvencija u podatcima, koji ne treba da utiču na procjenu modela. Ovo se ostvaruje na taj način da se iz pop-up menija izabere element **Preprocess>>Filter** .. u glavnom prozoru. Dijalog je dosta analogan onom kada izabiramo opseg podataka u vremenskom domenu. Korisnik označi sa pravougaonikom u spektralnim plotovima željeni pojas propuštanja ili pojas nepropuštanja (passband ili stop band), filtera, i onda izabere taster da provjeri da li filtriranje daje željene efekte, i nakon toga unese filtrirane podatke u GUI ploču podataka.
Prefiltriranje je dobar način otklanjanja šuma visokih frekvencija iz podataka, i takodjer dobra alternativa za detrendiranje (odsjecanjem niskih frekvencija iz pojasa

propuštanja). Zavisno od namjeravane svrhe modela, korisnik može takodjer da model koncentrira na važne opsege frekvencija. Za model koji će biti korišten za dizajn sistema upravljanja , od specijalne važnosti je frekventni opseg oko planiranog opsega za zatvorenu konturu upravljanja.

Ako korisnik namjerava da koristi podatke da gradi modele i sa osobinama dinamike sistema kao i sa osobinama smetnji, preporučuje se da se filtriranje vrši u fazi estimacije. To se postiže selektirajući element iz pop-up menija **Estimate>Parametric Models**, i onda selektirajući estimacioni **Focus** da bude **Filter**. Ovo otvara isti diajlog boks za filter kao i ranije.

Prefiltriranje će se medjutim primjeniti samo za procjenjivanje dinamike iz ulaza i izlaza. Model smetnji je odredjen iz orginalnih podataka.

Resampling

Ako se pokaže da se podatci sampliraju sa prevelikom brzinom, oni se mogu prorijediti (decimated) , tj. da se uzme svaki k-ti sampl, nakon odgovarajućeg prefiltriranja (antialiasing filtriranje). Ovo se može uraditi iz menija **Preprocessing >>Resample.**

Korisnik može takodjer da ponovno samplira (resamplira) i sa bržim (manjim) vremenom sampliranja putem interpolacije, koristeći istu komandu, i dajući faktor resampliranja koji je manji od 1 .

Brzi start (Quickstart)

Iz pop-up menija sa elementom **Preprocess>>Quickstart** može se izvršiti slijedeća sekvenca akcija:
Otvara se prikaz **Time plot data view** , otklanjaju se srednje vrijednosti iz signala, i dijele se ovako detrendirani podatci u dvije polovine. Prva polovina se koristi za radne podatke a druga postaju validacioni podatci. Sva tri ovako kreirana seta podataka se smještaju u ploču podataka.

Više eksperimentalni podatci

SIT toolboks dozvoljava da se radi sa setovima podataka koji sadrže nekoliko različitih eksperimenata. Obadvije aktivnosti i procjena (estimacija) i validacija se može primjeniti na takve setove podataka. Ovo je vrlo korisno kada se radi o eksperimentima koji se realizovani u različitim vremenima ali opisuju isti sistem. Takodjer je korisno da se drže zajedno djelovi podataka koji su dobijeni isjecanjem " informativnih komada" iz dugih setova podataka. Multieksperimentalni podatci se mogu uvoziti i koristiti u GUI kao **iddata** objekti. Selektiranje specifičnog dijela multieksperimentalnih podataka se realizuje iz pop-up menija **Preprocess>>Select Experiment**. Da bi se spojilo nekoliko setova podataka u ploči podataka (data board) , koji su dobijeni isjecanjem iz dugih setova podataka, treba koristiti pop-up meni komandu **Preprocess>>Merge Experiment**.

Provjera podataka na rukovanje

- Unjeti podatke u GUI ploču podataka.
- Iscrtati podatke i pažljivo ih ispitati
- Tipično detrendirati podatke otklanjajući iz njih srednju vrijednost.
- Izabrati djelove podataka za procjenu i validaciju. Vuči i ispustiti (drag and drop) ove setove podataka u odgovarajuće boksove GUI.

Simuliranje podataka

GUI je primarno namjenjen za rad sa realnim setovima podataka, i sam po sebi ne obezbjedjuje funkcije za simulaciju sintetskih podataka. To treba biti uradjeno u komandnom modu rada, i možemo koristiti naprimjer procedure u Simulinku, ili toolboksu za procesiranje signala (Signal processing toolbox), ili nekom drugom toolboksu u okviru MATLAB-a , za simulaciju podataka i njihovo unošenje u ***ident*** GUI.

SIT toolboks ima takodjer nekoliko komandi za simulaciju. Na primjer, možemo provjeriti komande ***idinput*** i ***sim***.

Slijedeći primjer pokazuje kako ARMAX model:

$$\begin{aligned} y(t) - 1.5y(t-1) + 0.7y(t-2) \ = \\ u(t-1) + 0.5u(t-2) + e(t) - e(t-1) + 0.2e(t-1) \end{aligned}$$

je simuliran sa slučajnim binarnim ulazom u.

```
% Create an ARMAX model
model1 = idpoly([1 -1.5 0.7],[0 1 0.5],[1 -1 0.2]);
u = idinput(400,'rbs',[0 0.3]);
e = randn(400,1);
y = sim(model1,[u e]);
```

Ulaz u i izlaz y , se sada mogu uvesti u GUI kao podatci, i razne estimacione rutine se mogu na njih primjeniti. Takodjer, uvozeći simulacioni model, ***model1***, u GUI, njegove osobine mogu biti poredjene sa onim od raznih procjenjenih modela .

Da bi simulirali kontinualni model u prostoru stanja:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Ke \\ y &= Cx + e \end{aligned}$$

sa istim ulazom , i intervalom sampliranja od 0.1 sec, treba uraditi slijedeće u SIT toolboxu :

```
A = [-1 1;-0.5 0]; B = [1; 0.5]; C = [1 0]; D = 0; K = [0.5;0.5];
Model2 = idss(A,B,C,D,K,'Ts', 0) % Ts = 0 means continuous time
Data = iddata([],[u e]);
Data.Ts = 0.1
y=sim(Model2,Data);
```

Procjena modela

Osnovne procedure

Procjenjivanje modela iz podataka je centralna aktivnost u SIT toolboxu. Svim estimacionim rutinama se može pristupiti iz pop-up menija **Estimate** u **ident** prozoru. Modeli se uvjek procjenjuju koristeči set podataka koji je trenutno u boksu radnih podataka (working data box).

Može se napraviti razlika izmedju dva tipa estimacionih metoda:

- Direktna procjena impulsnog ili frekventnog odziva sistema. Ove metode se često zovu neparametarske estimacione metode, i ne postavljaju nikakve predpostavke o strukturi modela, izuzev samo da je on linearan.

- Parametarske metode. Predpostavlja se specifična struktura modela, i parametri u toj strukturi se procjenjuju koristeći podatke. Ovo otvara vrlo veliki broj mogućnosti , u skladu sa različitim mogućnostima opisa sistema. Dominirajući su , modeli u prostoru stanja i nekoliko varijanti opisa pomoću diferentnih jednačina.

Direktno procjenjivanje odziva na impuls

Linearni sistem se može opisati sa impulsnim odzivom g_k sa osobinom da je :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k u(t-k)$$

Ime impulsni odziv se izvodi iz činjenice da ako je ulaz u(t) impuls, tj. u(t) =1, kada je t=0 i 0 za t>0, tada je izlaz y(t) = g_t. Za multivarijabilni sistem, impulsni odziv g_k će biti ny x nu matrica , gdje ny je broj izlaza a nu je broj ulaza. Njen i-j element će dakle opisivati ponašanje i-tog izlaza kao posljedica impulsa u j-tom ulazu.
Izabirući element menija **Estimate>>Correlation Model** , procjenjuju se koeficijenti impulsnog odziva direktno iz ulazno/izlaznih podataka, koristeći tkzv. korelacionu analizu , koju smo prezentirali ranije u Poglavlju 2. Za brzu akciju , korisnik može ukucati slovo **c** u **ident** prozoru. Ovo je hotkey za pozivanje korelacione analize.

Rezultirajuća procjena impulsnog odziva će biti smještena na ploču modela (model board), pod default imenom ***imp***.

Najbolji način da se ispita rezultat dobijenog impulsnog odziva je da se izabere **Model Vie Transient response**. Ovo će dati graf procjenjenog odziva. Ovaj prikaz nudi izbor izmedju prikaza impulsnog ili step odziva. Za multivarijabilni sistem, različiti kanali tj. odziv nekog izlaza na odgovarajući ulaz , se selektira pod komandom **Channel**.

Broj tačaka za koji je procjenjen impulsni odziv, tj. dužina procjenjenog odziva je odredjena kao jedna od opcija u prikazu tranzijentnog odziva (transient response).

Direktna procjena frekventnog odziva

Frekventni odziv linearnog sistema je Fourierova transformacija njegovog impulsnog odziva. Ovakav opis sistema daje značajnu inženjersku perspektivu i uvid u sistem i njegove osobine. Relacija izmedju ulaza i izlaza se često piše kao:

$$y(t)=G(z)u(t)+v(t)$$

gdje G je prenosna funkcija i v aditivna smetnja. Funkcija:

$$G(e^{i\omega T})$$

je funkcija od ugaone frekvencije ω i to je frekventni odziv ili frekventna funkcija. T je interval sampliranja.

Frekventni odziv sistema se direktno procjenjuje koristeći spektralnu analizu putem menu komande **Estimate> Spectral Model**, i tada selektirajući **Estimate** taster u dijalog boksu koji se otvara. Rezultat se stavlja na ploču modela, pod default imenom ***spad.*** Najbolji način da se ispita frekventni odziv je da se iscrta koristeći **Model View Frequency Response.** Ovaj prikaz nudi brojne različite opcije kako se krive iscrtavaju. Frekvencije za koje se procjenjuje odziv se mogu selektirati kao opcija pod menijem **Options** u **View** prozoru.

Procjena spektralne analize se pohranjuje kao ***idfrd*** objekat. Ako je potreban dalji rad sa ovim procjenjenim frekventnim odzivom , on se može izvesti kao model u radni prostor MATLAB-a i koristiti odzive direktno iz ovog objekta u Nyquistovom i Bodeovom dijagramu. Vidjeti ***idfrd, bode, i nyquist*** komande za više informacija.

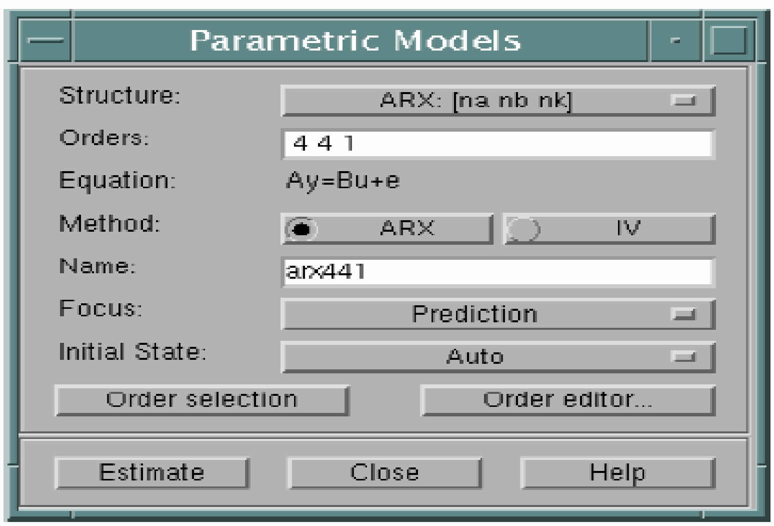
Model se izvozi, kako je već rečeno time što se vuče i ispusti mišem , do **Workspace** ikone.
Dvije opcije koje utiču na procjenu spektralne analize se mogu postaviti u dijalog boksu. Najvažniji je izbor broja M, (veličina prozora trajanja odziva –lag window), koja utiče na frekventnu rezoluciju procjena. U suštini, frekventna rezolucija je oko 2π/M radijana / (po intervalu sampliranja). Izbor M je kompromis izmedju frekventne rezolucije i varijanse (fluktuacija). Velike vrijednosti M daju dobru rezoluciju za sisteme koji nemaju oštre rezonancije, i možda mora biti prepodešena za rezonantnije sisteme.

Opcije takodjer nude izbor izmedju Blackman-Tukey metoda prozora ***spa*** (koji je default) , i metoda baziranog na direktnom peglanju (smoothing) Fourierove transformacije., ***etfe***.

etfe ima prednost za vrlo rezonantne sisteme, u tome što je više efikasan za velike vrijednosti M. Sa druge strane on ima nedostatke u tome što zahtjeva linearno razmještene vrijednosti frekvencija, ne procjenjuje spektar smetnji , i ne daje intervale povjerenja (confidence intervals).
Da bi dobili spektralnu analizu modela za tekuće vrijednosti podešenja opcija, dovoljno je samo otkucati slovo **s** u ***ident*** prozoru (hot key za spektralnu analizu).

Procjena parametarskih modela

SIT podržava široku lepezu struktura modela za linearne sisteme. Njima se može takodjer pristupiti preko elementa menija **Estimate>>Parametric Models..**. u **ident** prozoru. Ovo će otvoriti dijalog prozor **Parametric Models** , koji sadrži osnovni dijalog za sve parametarske estimacije kao što je pokazano na slijedećoj slici:



Slika 6.4 Dijalog prozor za procjenu parametarskih modela

Osnovna funkcija ovog dijalog prozora je slijedeća:

Kada izaberemo **Estimate**, model je procjenjen iz skupa radnih podataka. Struktura ovog modela je definirana sa pop-up menijem **Structure** zajedno sa boksom za editiranje **Orders**. Dobije ime , koje će biti unjeto u polje **Name**. GUI će uvjek sugerirati default ime za model u Name polju, ali korisnik može promjeniti u bilo koje drugo prije nego što izabere **Estimate** taster.

Interpretacija informacije o strukturi modela (obićno kao integer varijabla) u polju **Orders**, zavisi od selektirane **Structure** u pop-up meniju. Ovo pokriva, tipično šest mogućnosti:

- ARX model
- ARMAX model
- Model izlazne greške (OE – output error)
- Box-Jenkinsov (BJ) model
- model u prostoru stanja
- strukturu modela koju je definirao korisnik (initial model)

Korisnik može ispuniti polje **Order** sam kad god to zaželi, a za asistenciju unoćenja može izabrati **Order Editor**. Ovo će otvoriti novi dijalog prozor, koji zavisi od izabrane **Structure** , u kojem željeni red modela i informacija o strukturi se može unjeti na jednostavniji način.
Korisnik može takodjer unjeti i ime MATLAB varijable iz radnog prostora u polje za red. Ova varijabla treba imati vrijednost koja je konzistentna sa potrebnim redovima za izabranu strukturu.

Metod procjene

Zajednički i opšti metod procjene parametara je pristup preko greške predikcije (prediction error approach), gdje se jednostavno biraju parametri modela, tako da razlika izmedju predskazanog izlaza modela i mjerenog izlaza je minimizirana. Ovaj metod je raspoloživ i za sve strukture modela. Izuzev za ARX, procjena uključuje iterativno, numeričko traženje za najbolje uklapanje.

Da bi se dobila informacija od interakcije sa ovim traženjem, treba izabrati **Iteration control...**. Ovo je taster koji   koji postaje vidljiv kada se selektira iterativni proces procjene. Ovo takodjer omogućava pristup i nizu opcija koje kontrolišu proces traženja.

Za neke strukture modela (ARX model i modeli crne kutije u prostoru stanja – black box state space model), metode bazirane na korelaciji su takodjer raspoložive i to: instrumentalna varijabla (IV – instrumental variable) i metode podprostora (**n4sid**). Izbor izmedju metoda se vrši u dijalog prozoru **Parametric Models**.

Dijalog prozor ima takodjer tri pop-up menija koji nude slijedeće opcije: **Focus** , koji nam dozvoljava da izaberemo izmedju frekventne težinske funkcije koja se koncentrira na performansu modela ili za predikciju ili za simulaciju. Druga alternativa je prefiltriranje.
Nadalje, pop-up meni **InitialState** daje opcije da se procjeni početno stanje ili da se fiksira na nultu vrijednost. Vrijednost **Auto** će napraviti automatski izbor izmedju ovih opcija. Konačno, meni element **Covariance** dozvoljava izbor izmedju **Estimate** i **None** (ništa).
Normalna situacija je da se procjeni kovarijansa modela, tako da različite mjere nesigurnosti se mogu prikazati na plotivima. Medjutim, za modele u prostoru stanja višeg reda procjenjene sa **n4sid**, ili velike multivarijablne ARX modele, računanje kovarijantne matrice može biti dosta dugo. Ako izaberemo **Covariance: None**, značajno ćemo smanjiti vrijeme računanja.

Rezultirajući modeli

Procjenjeni model se unosi u GUI ploču modela. Korisnik ga nakon toga može ispitivati za različite karakteristike i osobine i porediti ih sa drugim osobinama modela, koristeći prikaze iz **Model View.**

Da bi se dobili podatci o samom modelu, treba dvaput kliknuti na ikonu modela (ili jednaput desnim tasterom miša). Otvoriće se prozor **Data/Model Info** , koji daje informacije o tome kako je model procjenjen. Nakon toga možemo izabrati **Present** taster, koji će izlistati model i njegove parametere sa procjenjenim standardnim devijacijama u komandnom prozoru MATLAB-a.

Ako korisnik treba da još radi sa modelom, on ga može izvesti vukući i ispuštajući ga u **To Workspace** ikonu, a onda koristiti MATLAB i njegove komande (kao naprimjer. **ssdata, tfdata, d2c**).

ARX modeli

Najčešće korišteni model je jednostavna diferentna jednačina:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \ldots + a_{na} y(t-na) =$$
$$b_1 u(t-nk) + \ldots + b_{nb} u(t-nk-nb+1)$$

koja uspostavlja relaciju izmedju tekučeg izlaza y(t) i konačnog broja prethodnih izlaza y(t-k) i ulaza u(t-k).

Struktura je time u potpunosti definirana sa tri cjelobrojne (integer) vrijednosti **na**, **nb** i **nk**. **na** je broj polova, **nb** je broj nula, dok **nk** je čisto kašnjenje u sistemu. Za sistem sa sampliranjem, tipično **nk** je 1 ako nema mrtvog vremena u sistemu.

Za višeulazne sisteme **nb** i **nk** su vektori redovi, gdje i-ti element daje red odnosno kašnjenje koje je pridruženo sa i-tim ulazom.

Unošenje parametra reda sistema

Redovi sistema **na**, **nb** i **nk** mogu se ili direktno unjeti u polje za editiranje **Orders** u **Parametric Models** prozoru, ili izabrati koristeći pop-up menije u **Order Editoru**.

Simultana procjena više modela

Unoseći neke ili sve strukturne parametre kao vektore, koristeći MATLAB-ovu notaciju za kolonu, kao naprimjer na=1:10, možemo definirati mnoge različite strukture koje korespondiraju sa svim kombinacijama redova. Kada izaberemo **Estimate**, izračunavaju se modeli koji korespondiraju sa svim ovim strukturama. Tada će se otvoriti poseban plot prozor koji pokazuje uklapanje ovih modela sa validacionim podatcima. Klikanjem na ovaj plot, korisnik može sada unjeti bilo koji model koji izabere u ploču modela.

Višeulazni modeli: Za višeulazne modele, korisnik može unjeti svaki od redova ulaza i kašnjenja kao vektor. Broj modela koji rezultira iz svih kombinacija redova i kašnjenja može biti vrlo veliki. Kao alternativa , može korisnik unjeti vektor kao napr. nb=1:10, za sve ulaze i jedan vektor za sva kašnjenja. U tom slučaju izračunavaće se samo oni modeli koji imaju iste redove i kašnjenja za sve ulaze.

Metode procjene

Postoje dva metoda procjene koeficijenata a i b u strukturi ARX modela:

Najmanjih kvadrata: Minimizira sumu kvadrata desne strane minus desna strana gornjeg izraza , u odnosu na a i b. Ovo se postiže izabirući ARX kao **Method**.

Instrumentalne varijable: Odredjuje a i b tako da greške izmedju desnih i lijevih strana postaju nekorelirane sa izvjesnim linearnim kombinacijama ulaza. Ovo se dobija izabirući **IV** u **Method** boksu.

Višeizlazni modeli

Za strukturu višeizlaznog ARX modela, sa ny izlaza i nu ulaza, gornja diferentna jednačina još uvjek vrijedi. Jedina promjena je da koeficijenti **a** su ny x ny matrice a koeficijenti **b** su ny x nu matrice.

Redovi [NA NB NK] definiraju strukturu modela kako slijedi:

NA: je ny x ny matrica čiji i-j ulaz je red polinoma (u operatoru kašnjenja) koji uspostavlja relaciju izmedju j-tog izlaza i i-tog izlaza.

NB : je ny x ny matrica čiji i-j ulaz je red polinoma koji uspostavlja relaciju izmedju j-tog ulaza i i-tog izlaza.

NK : je ny x ny matrica čiji i-j ulaz je kašnjenje od j-tog ulaza na i-ti izlaz.

Dijalog prozor **Order Editor** , dozvoljava izbore:

NA = na-ova (ny,ny)
NB= nb-ova (ny,nu)
NK=nk-ova (nz,nu)

gdje **na**, **nb** i **nk** su izabrani iz pop-up menija.

Za korisnički izabrane redove, treba konstruirati matricu [NA NB NK] u MATLAB komandnom prozoru i unjeti ime ove matrice u **Order** edit boks u prozoru **Parametric Models**.

Primjetimo da mogućnost simultanog procjenjivanja više modela nije raspoloživa za višeizlazne ARX modele.

ARMAX, modeli Izlazne greške (OE) i Box-Jenkinsovi modeli

Postoji nekoliko elaboracija osnovnog ARX modela, gdje se uvode razni modeli smetnji. Oni uključuju dobro poznate tipove modela kao što su ARMAX, model izlazne greške (output error) i Box-Jenkinsa.

Opšta struktura

Opšti ulazno/izlazni linearni model za sistem sa jednim izlazom, sa ulazom u i izlazom y se može napisati kao:

$$A(q)y(t) = \sum_{i=1}^{nu} [B_i(q)/F_i(q)]u_i(t-nk_i) + [C(q)/D(q)]e(t)$$

Ovdje u_i označava ulaz i , a : A, B_i, C, D i F_i su polinomi po šift operatoru (z ili q).

Opšta struktura je definirana dajući vremenska kašnjenja nk i redove ovih polinoma (tj. broj polova i nula u dinamičkom modelu od u na y, kao i model smetnje od e na y).

Specijalni slučajevi

Najčešće su izbori ograničeni na jedan od specijalnih slučajeva:

$$\text{ARX:} \quad A(q)y(t) = B(q)u(t-nk) + e(t)$$

$$\text{ARMAX:} \quad A(q)y(t) = B(q)u(t-nk) + C(q)e(t)$$

$$\text{OE:} \quad y(t) = [B(q)/F(q)]u(t-nk) + e(t) \quad \text{(Output-Error)}$$

$$\text{BJ:} \quad y(t) = [B(q)/F(q)]u(t-nk) + [C(q)/D(q)]e(t) \quad \text{(Box-Jenkins)}$$

Polinomi po šift operatoru su samo kompaktan način pisanja diferentnih jednačina. Naprimjer, ARMAX model u punom zapisu bi bio:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \ldots + a_{na} y(t-na) = b_1 u(t-nk) + \ldots +$$
$$b_{nb} u(t-nk-nb+1) + e(t) + c_1 e(t-1) + \ldots + c_{nc} e(t-nc)$$

Primjetimo da A(q) korespondira polovima koji su zajednički izmedju dinamičkog modela i modela smetnje (što je korisno ako smetnje ulaze u sistem "blisko" ulazu). Na sličan način, F_i(q) odredjuje polove koji su jedinstveni za dinamiku od ulaza i, i D(q) polove koji su jedinstveni samo za smetnje.

Rezon za uvodjenje svih ovih varijanti modela je da obezbjedi fleksibilnost u opisu smetnje i da dozvoli za zajedničke i različite polove (dinamike) za različite ulaze.

Unošenje strukture modela

Koristiti **Structure** pop-up meni u **Parametric Models** dijalog prozoru da izaberemo izmedju ARX, ARMAX , Izlazne greške i Box-Jenkinsovih struktura. Primjetimo, da ako set radnih podataka ima nekoliko izlaza, na raspolaganju je samo prvi izbor. Za vremenske serije (tj. podatke bez ulaznih signala), samo AR i ARMA su na raspolaganju u ovim izborima. Ovo su opoziti od ARX i ARMAX modela za vremenske serije.

Redovi polinoma se izabiru iz pop-up menija u dijalog prozoru **Order Editor**, ili direktno unoseći ih u polje Orders u prozoru **Parametric Models**. Kada je otvoren editor reda, default redovi su bazirani na prethodno korištenim redovima.

Metod procjene

Koeficijenti polinoma se procjenjuju koristeći metod predikcije greške/maksimalne sličnosti , minimizirajući veličinu greške člana greške "e" u gornjem izlazu. Nekoliko opcija kontrolira ovu proceduru minimizacije. Ove opcije se realizuju aktivirajući **Iteration Control** u prozoru **Parametric Models** , i izabirući **Options**.

Modeli u prostoru stanja

Struktura modela

Osnovni model u prostoru stanja može se pisati u obliku:

$$x(t+1) = A\ x(t) \ + \ B\ u(t) \ + \ K\ e(t)$$
$$y(t) = C\ x(t) \ + D\ u(t) \ + \ e(t)$$

SIT toolbox podržava dvije vrste parametrizacije modela u prostoru stanja: crna kutija (black-box), slobodne parametrizacije, i parametrizacije krojene prema aplikaciji (kod slučaja tkz "struktura modela korisnički definiranih".).

Unošenje struktura modela tipa crne kutije u prostoru stanja

Najvažniji indeks strukture je red modela, tj. dimenzija vektora stanja x.

Koristiti pop-up meni u **Order Editor**-u , da se izabere red modela, ili unjeti direktno u polje **Orders** u prozoru **Parametric Models.** Koristeći druge pop-up menije u Order Editor-u, može se još više utjecati na izabranu strukturu modela:

- Fiksirajući K na nulu , daje metod izlazne greške (OE), tj. razlika se minimizira izmedju izlaza simuliranog modela i mjerenog izlaza. Formalno, ovo odgovara predpostavci da je izlazna smetnja bijeli šum.

Kašnjenja sa ulaza se mogu nezavisno izabrati za svaki ulaz. To će biti vektor red **nk**, sa **nu** ulaza. Kada je kašnjenje veće ili jednako jedinici, **D** matrica u diskretnom vremenskom modelu se fiksira na nulu. Za fizikalne sisteme, bez čistog vremenskog kašnjenja, koji su upravljani sa parcijalno konstantnim ulazima, **nk** = 1 je prirodna predpostavka. To je ujedno i default vrijednost.

Simultano procjenjivanje mnogih modela

Unoseći vektor za red modela, koristeći MATLAB notaciju kolone (kao naprimjer 1:10), svi indicirani redovi će se izračunati koristeći preleminarni metod. Nakon toga možemo unjeti modele različitih redova u ploču modela, klikanjem u specijalnom grafu koji sadrži informacije o modelima.

Metodi procjene

Postoje u suštini dva osnovna metoda procjene:

PEM : je standardni metod predikcije (predskazanja) greške/maksimalne sličnosti, baziran na iterativnoj minimizaciji kriterija. Iteracije se startaju pri vrijednostima parametara koje se izračunavaju iz **n4sid**. Parametrizacija matrica A, B, C, D i K je slobodna. Traženje minimuma je kontrolirano sa nizom opcija. Do njih se može doći pomoću **Options** tastera u prozoru **Iteration Control**.

N4SID : Je metod baziran na podprostoru koji ne koristi iterativno traženje. Kvalitet rezultirajućih procjena može u značajnoj mjeri zavisiti od opcija koje se zovu **N4Weight** i **N4Horizon**. Ove opcije se mogu izabrati u prozoru **Order Editor**. Ako **N4Horizon** se unese sa nekoliko redova, modeli koji korespondiraju sa horizontima u svakom redu se odvojeno ispituju koristeći radne podatke.
Izabraće se najbolji model u terminu performanse predikcije (ili simulacije , ako je K=0) . Pokazaće se i slika koja će ilustrirati uklapanje u funkciji od horizonta.

Ako je **n4Horizon** boks ostavljen prazan, napraviće se default izbor.

Strukture modela definirane od korisnika

Strukture u prostoru stanja

SIT podržava korisnički definirane linearne modele u prostoru stanja proizvoljne strukture. Koristeći **idmodel idss**, poznati i nepoznati parametri u **A, B, C , D , K i X0** matricama se mogu lako definirati i za diskretne i vremenski kontinualne modele.

Objekat **idgrey** dozvoljava korisniku da koristi kompletno proizvoljnu strukturu sive kutije (greybox structure), definiranu sa M fajlom. Osobine objekta modela se mogu lagano mjenjati i ispitivati.

Da bi se koristile ove strukture u sprezi sa GUI , treba definirati odgovarajuću strukturu u MATLAB komandnom prozoru. Zatim koristiti pop-up meni **Structure** da se izabere **By Initial Model** i unoseći ime varijabe strukture u editorskom boksu **Initial Model** u prozoru **Parametric Models** i izabrati **Estimate**.

Bilo koja struktura modela

Arbitrarno, strukture modela mogu biti definirane koristeći SIT objekte modela:

- **idpoly** : kreira ulazno/izlazne strukture za modele sa jednim izlazom
- **idss** : kreira linearne modele u prostoru stanja, sa proizvoljnim , slobodnim parametrima,
- **idgrey** : kreira kompletno proizvoljne parametrizacije linearnih sistema
- **idarx**: kreira multivarijabilne ARX strukture

Dodatno, sve estimacione komande kreiraju strukture modela u funkciji rezultirajućih modela.
Treba unjeti ime bilo koje strukture modela u boks **Orders** (ili **Initial model**) u prozor **Parametric Models**, i zatim izabrati **Estimate**. Nakon toga, parametri strukture modela se podešavaju za izabrani skup radnih podataka. Metod je standarni pristup greške predikcije/maksimalne sličnosti, koji iterativno traži minimum kriterija. Opcije koje kontroliraju ovo traženje se izabiru sa **Options** tasterom u prozoru **Iteration Control**.

Ime inicijalnog modela mora biti varijabla bilo u radnom prostoru ili ploči modela. U ovom drugom slučaju, korisnik može jednostavno vuči i ispustiti model u **Orders/Initial model** boks editiranja.

Ispitivanje modela

Procjena modela je samo prvi korak. Sada mora biti ispitan, poredjen sa drugim modelima, i testiran sa novim setom podataka. Ovo se realizuje uglavnom pomoću funkcija prikaza modela (Model View), na dnu glavnog **ident** prozora:

- **frekventni odziv** (frequency response)
- **tranzijentni odziv** (transient response)
- **polovi i nule** (zeros and poles)
- **spektar šuma** (noise spectrum)
- **izlaz modela** (model output)
- **ostatak modela** (model residuals)

Nadalje, korisnik može dvaput kliknuti na ikonu modela da dobije tekst informaciju (**Text information**) o modelu. Konačno, on može izvesti model u radni prostor MATLAB-a i koristiti njegove komande za dalju analizu i korištenje modela.

Prikazi i modeli

Osnovna ideja je da ako je odredjeni prikaz otvoren (tj polje kvadrata izbora čekirano), tada svi modeli u ploči sumarnog modela (Model Summary Board) , koji su izabrani bit će predstavljeni u prozoru. Krive u View prozoru se mogu kliknuti i dekliknuti , na taj način selktirajući i desektirajuči modele na online način. Model se selektira ili deselektira klikajući na njegovu ikonu. Selektirani model je označen sa debelom linijom na njegovoj ikoni.

Primjetimo da modeli koji su dobijeni spektralnom analizom se mogu predstaviti samo kao frekventbi odziv i spektar šuma, a modeli procjenjeni iz korelacione analize se mogu predstaviti kao transzijentni odziv.

Plot prozori

Svih šest prikaza daju slićne plot prozore, sa nekoliko zajedničkih osobina. Oni imaju zajednički menu izbornik , koji pokriva neke osnovne funkcije.

Tako imamo funkciju zumiranja. Za plotove sa dvije ose, skale x-osa su medjusobno povezane.
Pokazujući sa mišem na bilo koju krivu u plotu, i pritiščući desni taster , kriva će biti identificirana sa imenom modela i trenutačnim koordinatama.

Opcije

Najvažnija opcija je mogućnost da pokaže intervale povjerenja (confidence intervals). Svaka osobina procjenjenog modela ima neku neizvjesnost. Ova neizvjesnost se može procjeniti iz podataka. Čekiranjem **Show confidence intervals,** region povjerenja oko nominalne krive bit će označen sa crta-tačka linijama. Nivo povjerenja može se takodjer setovati i kao element menija.

Opaska : Intervali povjerenja su podržani za većinu modela i osobina, izuzev modela koji su procjenjeni pomoću **etfe**, i k- koraka unaprijed predikcije. Za **n4sid**, osobine kovarijanse nisu u potpunosti poznate. Umjesto njih može se procjeniti **Cramer-Rao** donja granica za kovarijantnu matricu.

Kanal (Channel)

Za multivarijabilne sisteme , korisnik može izabrati koje ulazno/izlazne kanale će ispitiviati. Tekući izbor je označen u naslovu prikaza.

Frekventni odziv i spektar smetnji

Svi linearni modeli koji se procjenjuju se mogu pisti u obliku:

$$y(t)=G(z)u(t)+v(t)$$

gdje G(z) je prenosna funkcija (za diskretno vrijeme) sistema i v(t) je aditivna smetnja. Frekventni odziv ili frekventna funkcija je kompleksna funkcija G ($e^{i\omega T}$) kao funkcija ugaone frekvencije ω.
Ova funkcija se često crta kao Bodeov dijagram, koji se može dobiti čekiranjem **Model View Frequency Response** u glavnom **ident** prozoru. Procjenjeni spektar smetnje v se iscrtava kao spektar snage izabirući **Model View Noise Spectrum**.
Ako su podatci vremenska serija y (bez ulaza u) , tada spektar od y se crta pod **Noise Spectrum**, i ne daju se frekventne funkcije.

Tranzijentni odziv

Dobar i jednostavan uvid u dinamičke osobine modela se dobije gledajući u njegov step ili impulsni odziv. Ovo je izlaz iz modela kada je ulaz step ili impuls. Ovi odzivi će biti iscrtavani kada je **Model View Transient Rasponse** čekiran.

Često je vrlo korisno porediti tranzijentni odziv parametarskog modela, sa onim koji je procjenjen koristeči korelacionu analizu. Ako postoji dobro slaganje izmedju ova dva modela, možemo biti sigurni da su u modele uključene bitne osobine. Korisno je takodjer provjeriti intervale povjerenja oko odziva da se vidi šta "dobro slaganje" znači i kvantitativno.
Mnogi modeli obezbjedjuju opis i aditivne smetnje v(t):

$$v(t)=H(z)e(t)$$

Ovdje, H(z) je prenosna funkcija koja opisuje kako smetnja v(t) se može kreirati , šaljući bijeli šum e(t) kroz H. Da bi se prikazale osobine od H, možemo izabrati kanale (Channel meniju) koji imaju komponente šuma kao ulaze. Imena ovakvih kanala su tipa : **e**@**ynam**. za komponentu šuma koja direktno utiče na izlaz sa imenom **ynam**.

Polovi i nule

Polovi sistema su korjeni nazivnika prenosne funkcije G(z), dok su nule korjeni brojnika. Naročito polovi imaju direktan uticaj na dinamičke osobine sistema.
Polovi i nule od G (i H) se iscrtavaju birajući **Model View Poles and Zeros.**

Korisno je uključiti intervale povjerenja u ovim slučajevima. Oni će jasno otkriti koji polovi i nule se mogu poništiti (njihovi regioni povjerenja se preklapaju). To je indikacija da se može koristiti dinamički model nižeg reda.

Za multivarijabilne sisteme prikazuju se polovi i nule individualnih ulazno/izlaznih kanala. Da bi se dobile takozvane transmisione nule (transmission zeros), treba izvesti model i onda primjeniti komandu ***tzero*** , koja je na raspolaganju u **Control systems toolboksu**

Poredjenje mjerenog izlaza i izlaza iz modela

Dobar način dobijanja uvida u kvalitet modela j da se simulira sa ulazom iz svježeg seta podataka, i poredi simulirani izlaz sa mjernim izlazom. Ovo daje dobar osjećaj koje osobine sistema su se uključile u model, a koje nisu.

Ovaj test se dobija ako se čekira polje **Model View Model Output .** Tada set podataka koji je trenutačno u **Validation Data** boksu će se koristiti za poredjenje.

Poklapanje će takodjer biti prikazano. Ono je izračunato kao procenat varijacije izlaza koji je reprodukovan od strane modela. Tako, model koji ima uklapanje 0% daje isti istu srednje kvadratnu grešku kao kad bi postavili da je izlaz iz modela srednja vrijednost mjerenog izlaza.

Ako je model nestabilan, ili ima integraciono djelovanje ili vrlo spore vremenske konstante, nivoi simuliranog i mjerenog izlaza mogu driftati jedan od drugog, čak i za model koji je dosta dobar . U takvom slučaju je dobra ideja da se evaluira pregnozirani izlaz modela a ne njegov simulirani izlaz. Sa predikcionim horizontom od k, k-koračni procjenjeni unaprijed izlaz se dobije kako slijedi:

Prognozirana (predicited) vrijednost y(t) se izračuna iz svih raspoloživih ulaza u(s) (s $\leq$ t) , i svih raspoloživih izlaza do vrmena t-k, y(s) (s$\leq$ t-k).

Simulacioni slučaj , kada se prethodni izlazi uopšte ne koriste, formalno odgovara sa k= ∞. Da bi se provjerilo da li je model poprimio interesantne dinamičke osobine , preporučuje se da prognozirani vremenski horizont (kT,T je interval sampliranja) je veći od važnih vremenskih konstanti.

Primjetimo ovdje da različiti modeli koriste informaciju o prethodnim izlazima u njihovim prognozama na različite načine. Ovo zavisi od modela smetnji. Naprimjer, tako zvani modeli Izlazne greške (OE) (dobijeni sa K=0 za modele u prostoru stanja i postavljajući da **na**=**nc**=**nd**=0 , za ulazno izlazne modele), ne koriste uopšte prethodne izlaze.
Zbog toga, simulirani i prognozirani izlazi, za bilo koju vrijednost k, koincidiraju.

Analiza rezidua

U modelu :

$$y(t) = G(z)u(t) + H(z)e(t)$$

izvor šuma e(t) predstavlja dio izlaza koji model ne može da reprodukuje. On daje "ostatke" tj. residuale. Za dobar model, reziduali trebaju biti nezavisni od ulaza. Inače, bit će još nešto u izlazima što ima izvor u ulazu i što model nije uključio.

Da bi se testirala ova nezavisnost , kros korelaciona funkcija izmedju ulaza i residuala koja se izračuna ako čekiramo **Model View Model Residuals**. Pametno je takodjer prikazati region povjerenja za ovu funkciju. Za idealni model korelaciona funkcija treba ležati upotpunosti izmedju linija povjerenja za pozitivne lagove.

Ako naprimjer, postoji vrh van regiona povjerenja za lag k, ovo znači da postoji nešto u izlazu y(t) čiji je izvor u u(t-k) i što nije odgovarajuće bilo opisano u modelu. Test se izvršava koristeči validacione podatke. Ako oni nisu korišteni za procjenu modela, taj test je dosta strog.

Da bi model takodjer dao i korektan opis osobina smetnji (tj.prenosne funkcije H), reziduali trebaju biti medjusobno nezavisni. Ova test se takodjer izvršava iz prikaza **Model Residuals**, prikazujući autokorelacionu funkciju reziduala (isključujući lag nula, za koji je funkcija po definiciji 1).
Za idealni model, korelaciona funkcija treba biti u potpunosti unutar regiona povjerenja.

Tekst informacija

Iz dijalog prozora **Data/model Info** do kojeg dolazimo dvaput kliknuvši na ikonu modela, možemo učiniti više stvari:

Present

Izabirući Present taster dobićemo detalje modela u MATLAB komandnom prozoru. Parametri modela zajedno sa procjenjenim standardnim devijacijama će se pokazati, zajedno sa još nekim komentarima

Modify

Korisnik može unjeti svoj tekst bilo gdje u **Diary** i **Notes** poljima dijalog prozora. Može takodjer promjeniti ime modela u polju imena modela. i boja koja je pridružena modelu u svim plotovima se takodjer može editirati. Dovoljno je unjeti RGB vrijednosti za boje (od 0 do 1) , ili se može unjeti prvo slovo naziva željene boje (napr. 'y' za žutu to jest 'yellow').

LTI prikaz

Ako u okviru MATLAB paketa koji sadrži SIT toolboks postoji takodjer i CST (tj. toolbox za sisteme upravljanja **C**ontrol **S**ystem **t**oolbox), onda će u glavnom prozoru SIT paketa biti na raspolaganju i ikona **To LTI Viewer**. Ovaj program može prikazati bilo koji broj modela, ali zahtjeva od svih da imaju isti broj ulaza i izlaza.

Daljnja analiza u radnom prostoru MATLAB-a

Nakon izvoza objekata modela ili podataka iz SIT-a u radni prostor MATLAB-a (vukući ikonu u polje **To Workspace**) , korisniku stoji na raspolaganju mnogo komandi pomoću kojih on može dalje da transformira podatke ili model, i ispita ih, ili pak konvertuje u druge formate da bi se koristili sa ostalim toolboksovima u okviru MATLAB-a. Neki primjeri ovih komandi su:

d2c	transformira izvezeni objekat iz diskretnog u kontinualno vrijeme
ss, idss, ssdata	konvertuje u predstavu u prostoru stanja
tf, tfdata	konvertuje u oblik prenosne funkcije
zpk, zpkdata	konvertuje u polove i nule

Primjetimo da komande **ss,tf i zks** transformišu model u LTI modele CST paketa.

Osnovni alati za procjenu modela crne kutije (black-box)

Komande za ove modele su:

- Za prikazivanje podataka : **iddata, plot**
- Za neparametarske procjene impulsnog i frekventnog odziva: **impulse, step, spa**
- Za procjenjivanje modela crne kutije u prostoru stanja ili ulazno/izlaznog tipa: **pem, arx**
- za evaluaciju modela: **compare, resid**
- za prikazivanje karakteristika modela: **bode, nyquist, pzmap, step, view**
- posmatranje karakteristika parametarskih modela: putem referenciranja polja kao : Mod. A, Mod.dA, itd.

Kreiranje modela za simulacije i transformisanje modela:

Za definiranje modela, da bi se generirali ulazi i simulirali modeli:

idarx, idpoly, idss, idinput, sim

Da bi se transformirali modeli u druge načine prikazivanja:

arxdata, polydata, ssdata, tfdata, zpkdata

Selekcija strukture modela

Treći sloj toolboksa sadrži neke korisne tehnike za selekciju redova i kašnjenja.

arxstruct, selstruc

Struktuirani modeli i daljnje konverzije modela

Četvrti sloj komandi uključuje transformacije izmedju kontinualnog i diskretnog vremena, i funkcije za procjenjivanje kompletno opštih modela struktura za linearne sisteme. Ove komande su:

c2d, d2c, idss, idgrey, pe, predict, ss, tf, zp, frd (koja se koristi sa CST toolboksom)

Rekursivna identifikacija

Rekurzivni (ili adaptivni , odnosno online) metodi procjene parametara su pokriveni komandama:

rarmax, rarx, roe, rpem, rplr

Primjeri korištenja SIT paketa

Demonstracioni M-file **iddemo.m** , daje nekoliko primjera onoga što bi se moglo nazvati tipičnim sesijama SIT paketa. Da bi se startao demo, treba izvršiti **iddemo** unutar MATLAB-a.
U nastavku ćemo opisati primjer naveden pod 2 u okviru menija koji se pojavljuje nakon izvršenja **iddemo**.
Podatci u primjeru su prikupljeni sa laboratorijski skaliranog modela. Proces je sličan ručnom fenu (hair dryer). Zrak se duva kroz cijev nakon što je zagrijan na početku cijevi. Ulaz u proces je el. snaga koja se primjenjuje na otporni grijač . Izlaz je izlazna temperatura fena , koja se mjeri u Voltima pomoću termoelementa.

Prikupljeno je 1000 podataka sa procesa dok se ulaz mjenjao na slučajan način izmedju dva nivoa snage. Vrijeme sampliranja je bilo 80 ms.

Podatci sa DAQ uredjaja su upisani u ASCII file u MATLAB, i pohranjeni su kao vektori : y2 (izlaz) i u2 (ulaz), u fajl dryer2.mat.

Prvo treba loadovati podatke u radni prostor :

load dryer2

Sada ćemo formirati objekat podataka:

dry = iddata (y2, u2, 0.08) ;

Da bi dobili informacije o podatcima , dovoljno je samo ukucati:

dry

a da dobijemo pregled informacija koje su sadržane u **iddata** objektu dry, treba ukucati komandu :

get(dry)

Radi boljeg arhiviranja i pregleda programa, daćemo imena ulazu i izlazu.

dry.InputName = 'Power';

dry.OutputName = 'Temperature';

Izabraćemo prvih 300 vrijednosti za gradnju modela .

ze = dry (1: 300) ;

Nacrtaćemo interval od uzorka 200 do 300.

plot (ze (200:300));

Odklonićemo konstantne nivoe i podjeliti sa srednjom vrijednošću

ze = detrend (ze) ;

Procjenimo sada impulsni odziv sistema korelacionom analizom da dobijemo neke predstave o vremenskim konstantama sistema.

impulse (ze ,'sd' , 3) ;

Ovo će dati plot sa crta-tačka linijama koje označavaju region povjerenja koji odgovara tri standardne devijacije (tj. oko 99.9%). Odavde se može lako vidjeti da li ima vremenskog kašnjenja u sistemu.

Najednostavniji način da počnemo gradnju modela je da krenemo od modela u prostoru stanja , gdje je red modela automatski odredjen, koristeći metod predikcije (predskazanja) greške:

m1 = pem (ze) ;

Kada se izračunavanja završe, pokazaće se prikaz osnovne informacije oko m1. Da bi dobili osobine ovoga modela, možemo naći matricu A od predstave u prostoru stanja u obliku:

A = m1.a

gdje m1 je model objekta, a

get (m1)

daje listu svih informacija pohranjenih u modelu.

Koliko je dobar model? Jedan način da ovo odredimo je da ga simuliramo i poredimo izlaz iz modela sa izlazom iz mjerenja. Izabraćemo dio orginalnih podataka koji nije bio korišten za gradnju modela, napr. od sampla 800 do 900.

zv = dry (800:900) ;

zv = detrend (zv);

compare (zv ,m1) ;

Bodeov plot iz modela se dobije sa komandom:

bode (m1)

Alternativno, možemo posmatrati Nyquistov plot, i označiti regione nesigurnosti kod izvjesnih frekvencija sa elipsama, koje odgovaraju 3-strukoj standardnoj devijaciji:

nyquist (m1, 'sd' , 3) ;

Možemo takodjer porediti odziv na step modela sa onim koji se direktno izračunava iz podataka (**ze**) koristeči metode za neperametarske modele (korelacione analize):

step (m1, ze)

Da bi analizirali model sa datom strukturom, mi ćemo izračunati model diferentne jednačine sa dva pola, jednom nulom i tri kašnjenja:

m2 = arx (ze, [2 2 3]) ;

Ovo će dati model u obliku :

$$y(t) + a_1 y(t-T) + a_2 y(t-2T) = b_1 u(t-3T) + b_2 u(t-4T)$$

gdje je T interval sampliranja (80 ms). Ovaj model koji je poznat kao ARX model, pokušava da izračuna vrijednost izlaza u trenutku t, kada su date prethodne vrijednosti od y i u. Da bi poredili njegovu performansu sa validacionim podatcima, izračunajmo:

compare (zv, m1, m2);

Izračunaćemo i iscrtati polove i nule modela:

pzmap (m1, m2);

Neizvjesnosti polova i nula se takodjer mogu iscrtati.

pzmap (m1, m2, 'sd' ,3) , % '3' znači broj standardnih devijacija

Procjenićemo frekventni odziv metodom neparametarske spektralne analize.

gs = spa (ze) ;

i uporediti sa frekventnim funkcijama od parametarskih modela

bode (m1, m2, gs)

Rješavanje problema identifikacije sistema

Diskutiraćemo u nastavku različite načine opisa linearnih dinamičkih sistema i najvažnije metode za procjenu takvih modela.

Impulsni odzivi, frekventne funkcije i spektar

Osnovna ulazno-izlazna konfiguracija je pokazana na narednoj slici. Predpostavljajući jedinični interval samplovanja, imamo ulazni signal :

$$u(t); \qquad t = 1, 2, \ldots, N$$

i izlazni signal:

$$y(t); \qquad t = 1, 2, \ldots, N$$

Predpostavljajući linearnu relaciju izmedju signala, relacija se može pisati kao:

$$y(t) = G(q)u(t) + v(t) \qquad \textbf{(6.1)}$$

gdje q je šift operator (operator pomaka unazad), a G(q)u(t) je

$$G(q)u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t-k) \qquad (6.2\ )$$

i

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)q^{-k}; \qquad q^{-1}u(t) = u(t-1) \qquad (\ 6.3\ )$$

Brojevi $\{g(k)\}$ se zovu impulsni odziv sistema. Funkcija G(q) se naziva prenosnom funkcijom sistema. Ako se ova funkcija evaluira na jediničnom krugu ($q = e^{i\omega}$) , dobije se frekventna funkcija :

$$G(e^{i\omega}) \qquad (\ 6.4)$$

U jednačini (6.1) v(t) je dodatni, nemjerljivi signal (smetnja). Njene osobine se mogu izraziti u jedinicima spektra snage :

$$\Phi_v(\omega) \qquad (6.5\ )$$

koji je definiran kao :

$$\Phi_v(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_v(\tau)e^{-i\omega\tau} \qquad (\ 6.6\ )$$

gdje $R_v(\tau)$ je kovarijantna funkcija od v(t):

$$R_v(\tau) = Ev(t)v(t-\tau) \qquad (6.7)$$

gdje E označava matematsko oćekivanje. Alternativno, smetnja v(t) se može opisati kao filtrirani bijeli šum:

$$v(t) = H(q)e(t) \qquad (6.8)$$

gdje e(t) je bijeli šum sa varijansom λ i :

$$\Phi_v(\omega) = \lambda\left|H(e^{i\omega})\right|^2 \qquad (6.9)$$

Jednačina (6.1) i jednačina (6.8) zajedno daju opis u vremenskom domenu sistema:

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) \qquad (6.10)$$

Jednačine (6.4) i (6.5) čine opis u frekventnom domenu.

$$G(e^{i\omega}); \qquad \Phi_v(\omega) \qquad (6.11)$$

Impulsni odziv (6.3) i opis u frekventnom domenu se zovu opisi neparametarskog modela, pošto oni nisu definirani u terminima konačnog broja parametara. Osnovni opis (6.10) se može primjeniti i u multivarijabilnom slučaju, tj. na sisteme sa nekoliko (napr. nu) ulaznih signala i nekoliko (ny) izlaznih signala. U tom slučaju G(q) je ny x nu matrica dok H(q) i $\Phi_v(\omega)$ su ny x ny matrice.

Polinomska predstava prenosnih funkcija

Umjesto specificiranja funkcia G i H u jednačini (6.10) u funkciji od frekvencije ω, možemo ih opisati kao racionalne funkcije od q^{-1} i specificirati koeficijente brojnika i nazivnika.
Često korišteni parametarski model je ARX model koji odgovara slijedećem opisu:

$$G(q) = q^{-nk}\cdot\frac{B(q)}{A(q)}; \qquad H(q) = \frac{1}{A(q)} \qquad (6.12)$$

gdje su B i A polinomi po operatoru kašnjenja q^{-1} :

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots\ldots + a_{na} q^{-na}$$
$$B(q) = b_1 + b_2 q^{-1} + \ldots\ldots + b_{nb} q^{-nb+1} \qquad (6.13)$$

Ovdje brojevi na i nb su redovi odgovarajućih polinoma. Broj nk je broj kašnjenja sa ulaza na izlaz. Model se obićno piše kao:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t-nk) + e(t) \qquad (6.14)$$

ili eksplicitno:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \ldots\ldots + a_{na} y(t-na) =$$
$$b_1 u(t-nk) + b_2 u(t-nk-1) + \ldots\ldots + b_{nb} u(t-nk-nb+1) + e(t) \qquad (6.15)$$

Primjetimo da jednačine (6.14) i (6.15) vrijede i za multivarijabilni slučaj, sa ny izlaznih kanala i nu ulaznih kanala. Tada A(q) i koeficijenti a_i postaju ny x ny matrice, B(q) i koeficijenti b_i postaju ny x nu matrice.

Naredni, opštiji model je ARMAX struktura:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t-nk) + C(q)e(t) \qquad (6.16)$$

gdje A(q) i B(q) su kao i u jednačini (6.13) , dok:

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \ldots + c_{nc} q^{-nc}$$

Struktura izlazne greške (output error – OE), se dobije kao:

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t-nk) + e(t) \qquad (6.17)$$

gdje :

$$F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \ldots + f_{nf} q^{-nf}$$

Takozvani Box-Jenkinsov (BJ) model je dat kao:

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t-nk) + \frac{C(q)}{D(q)} e(t) \qquad (6.18)$$

sa :

$$D(q) = 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{nd} q^{-nd}$$

Svi ovi modeli su specijalni slučajevi strukture opšteg parametarskog modela:

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t-nk) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \qquad (6.19)$$

Varijansa bijelog šuma $\{e(t)\}$ je predpostavljena da je λ.

Unutar strukture jednačine (6.19), skoro sve linearne strukture modela crne kutije (black box) se dobiju kao specijalni slučajevi. ARX struktura se dobije za slučaj nc= nd = nf =0. ARARX struktura (ili " generalizirani model najmanjih kvadrata") se dobije za nc=nf=0. ARMAX struktura korespondira sa nf=nd= 0. ARARX struktura (ili " opšti model najmanjih kvadrata") se dobije za nc= nf = 0, dok ARMAX struktura (ili " prošireni matrični model") odgovara nf = 0.

Model izlazne greške (OE) se dobije sa na= nc = nd = 0, dok Box-Jenkins model odgovara na =0.

Isti tip modela se može definirati za sisteme sa proizvoljnim brojem ulaza. Oni imaju oblik:

$$A(q)y(t) = \frac{B_1(q)}{F_1(q)}u_1(t-nk_1) + \dots + \frac{B_{nu}(q)}{F_{nu}(q)}u_{nu}(t-nk_{nu}) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \qquad (6.20)$$

Predstava prenosnih funkcija u prostoru stanja

Čest slučaj opisivanja linearnih sistema je u prostoru stanja:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{aligned} \qquad (6.21)$$

Ovdje relacija izmedju ulaza u(t) i izlaza y(t) je definirana sa nx dimenzionalnim vektorom stanja x(t). U formi prenosne funkcije jednačina (6.21) korespondira sa (6.1) :

$$G(q) = C(qI_{nx} - A)^{-1}B + D \qquad (6.22)$$

Ovdje, i_{nx} je nx sa nx jedinična matrica. Očevidno jednačina (6.21) se može posmatrati kao ona koja parametrizira prenosnu funkciju, preko jednačine (6. 22) G(q) postaje funkcija elemenata matrica A,B,C i D.

Da bi dalje opisali karakter šuma v(t) u jednačini (6.21) , fleksibilnija tkzv. " inovaciona" forma modela u prostoru stanja se može koristiti.

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + Ke(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + e(t) \end{aligned} \qquad (6.23\ )$$

Ovo je ekvivalentno jednačini (6.10) datoj sa (6.22) i H(q) kao:

$$H(q) = C(qI_{nx} - A)^{-1}K + I_{ny} \qquad (6.24)$$

Ovdje ny je dimenzija y(t) i e(t).

Često je moguće uspostaviti opis sistema direktno u inovacionoj formi (6.23). Drugim riječima, može biti poželjno da se opiše priroda smetnji koje djeluju na sistem. Ovo vodi ka stohastičkom modelu u prostoru stanja:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + e(t) \end{aligned} \qquad (\ 6.25\ )$$

gdje w (t) i e(t) su stohastički procesi sa nekim kovarijantnim osobinama. U stacionarnom stanju i iz ulazno/izlaznog modela, jednačina (6.25) je ekvivalentna sa (6.23) ako matrica K je izabrana kao stacionarno Kalmanovo pojačanje.

Modeli u prostoru stanja sa kontinualnim vremenom

Često je lakše opisati sistem iz fizikalnog modela kao model sa kontinualnim vremenom. Razlog je u tome što većina fizikalnih zakona je opisana u kontinualnom vremenu sa diferencijalnim jednačinama.

Zbog toga fizikalno modeliranje tipično vodi ka opisu u prostoru stanja u obliku:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Du(t) + v(t) \end{aligned} \qquad (6.26\ )$$

Ako je ulaz parcijalno konstantan u vremenskim intervalima $kT \le t < (k+1)T$, tada relacija izmedju u[k] = u (kT) i y[k] = y (kT) se može opisati sa jednačinom (6.21) sa uzimanjem :

$$A = e^{FT}; \qquad B = \int_0^T e^{F\tau} G d\tau; \qquad C = H \qquad (\ 6.27\ )$$

i pridruživanjem y (t) sa y [t] , itd. Ako startamo sa inovacionom formom i kontinualnim vremenom :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) + \tilde{K}e(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Du(t) + e(t) \end{aligned} \qquad (6.28)$$

protupar u diskretnom vremenu je dat sa jednačinom (6.23) , gdje još uvijek vrijedi jednačina (6.27). Tačna konekcija izmedju $\tilde{K}$ i K je nešto komplikovanija. Ad hoc rješenje je:

$$K = \int_0^T e^{F\tau} \tilde{K} d\tau; \qquad (6.29)$$

po analogiji sa G i B. Ovo je dobra aproksimacija za kratke intervale sampliranja T.

Procjena impulsnog odziva

Posmatrajmo opise jednačina (6.1) i (6.2). Da bi se direktno procjenili koeficijenti impulsnog odziva, takodjer i u multivarijabilnom slučaju, pogodno je definirati model višeg reda konačnog impulsnog odziva (FIR – finite impulse order).

$$y(t) = g(0)u(t) + g(1)u(t-1) + \ldots + g(n)u(t-n) \qquad (6.30)$$

i procjeniti **g** koeficijente metodom linearne sume najmanjih kvadrata. Da bi provjerili da nema neuzročnih efekata sa ulaza na izlaz, naprimjer zbog povratne sprege sa y u generiranju u (tj. zatvorene povratne sprege), g se može procjeniti i za negativna kašnjenja:

$$\begin{aligned} y(t) = {} & g(-m)u(t+m) + \ldots + g(-1)u(t+1) + g(0)u(t) + \\ & g(1)u(t-1) + \ldots + g(n)u(t-n) \end{aligned} \qquad (6.31)$$

Ako je u bijeli šum, koeficijenti impulsnog odziva če biti korektno procjenjeni, čak ako i prava dinamika sa u na y je komplikovanija nego u ovim modelima. Zbog toga je prirodno filtrirati i ulaz i izlaz kroz filtter koji će učiniti ulaznu sekvencu što je moguće više "bijelom", prije nego što procjenimo g.
Ovo je suština korelacione analize za procjenjivanje impulsnih odziva.

Procjena spektra i frekventnih funkcija

Sada ćemo opisati metode za direktnu procjenu frekventnih funkcija i spektra (jednačina (6.11). Kros kovarijantna funkcija $R_{yu}(\tau)$, izmedju y(t) i u(t) je definirana kao Ey(t + τ) u(t) , analogno jednačini (6.7). Njena Fourierova transformacija, kros spektar , $\Phi_{yu}(\omega)$ je analogno definiran jednačinom (6.6). Pod predpostavkom da je ulaz u(t) nezavistan od v(t), relacija (6.1) implicira slijedeču relaciju izmedju spektara:

$$\begin{aligned} \Phi_y(\omega) &= \left|G(e^{i\omega})\right|^2 \Phi_u(\omega) + \Phi_v(\omega) \\ \Phi_{yu}(\omega) &= G(e^{i\omega})\Phi_u(\omega) \end{aligned} \qquad (6.32)$$

Sa procjenjivanjem različitih spektara koji su uključeni, frekventna funkcija spektra smetnji se može procjeniti na slijedeći način:

Iz procjena kovarijantnih funkcija $\hat{R}_y(\tau)$, $R_{yu}(\tau)$, i $\hat{R}_u(\tau)$ (koje su definirane sa (6.7), koristeći :

$$\hat{R}_{yu}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t+\tau)u(t) \qquad (6.33)$$

i analogne izraze za ostale. Tada, iz procjena odgovarajučih spektara:

$$\hat{\Phi}_y(\omega) = \sum_{\tau=-M}^{M} \hat{R}_y(\tau) W_M(\tau) e^{-i\omega\tau} \qquad (6.34)$$

i analogno za ϕ_u i ϕ_{yu}. Ovdje $W_M(\tau)$ je takozvani prozor kašnjenja (lag window), i M je širina tog prozora. Procjene se sada formiraju kao:

$$\hat{G}_N(e^{i\omega}) = \frac{\hat{\Phi}_{yu}(\omega)}{\hat{\Phi}_u(\omega)}; \qquad \hat{\Phi}_v(\omega) = \hat{\Phi}_y(\omega) - \frac{\left|\hat{\Phi}_{yu}(\omega)\right|^2}{\hat{\Phi}_u(\omega)} \qquad (6.35)$$

Ova procedura je poznata kao spektralna analiza.

Procjena parametarskih modela

Za dati opis (6.10) i imajući observirane ulazno/izlazne podatke u i y, greške predikcije e(t) u jednačini (6.10) se mogu izračunati kao:

$$e(t) = H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)] \qquad (6.36)$$

Ove greške su, za date podatke u i y, funkcije od G i H. Ove su sa svoje strane parametrizirani sa polinomima (6.14) do (6.19) , ili sa ulazima u matricama u prostoru stanja definiranim u (6.26) do (6.29).

Najčećšći metod parametarske identifikacije je odredjivanje procjena od G i H minimizirajući:

$$V_N(G,H) = \sum_{t=1}^{N} e^2(t) \qquad (6.37)$$

to jest:

$$[\hat{G}_N, \hat{H}_N] = argmin \sum_{t=1}^{N} e^2(t) \qquad (6.38)$$

Ovo se naziva metodom predikcije greške. Za Gaussovsku raspodjelu koincidira sa metodom maksimalne sličnosti (maximum likelihood).

Donekle različita filozofija može biti primjenjena na ARX model (6.14). Formirajući filterske verzije ulaza:

$$N(q)s(t) = M(q)u(t) \qquad (6.39)$$

i množeći jednačinu (6.14) sa s(t-k) , k= 1,2,..na : i u(t-nk+1-k) , k= 1,2...,nb , i sumirajući po t, šum u jednačini (6.14) se može korelirati i riješiti za dinamiku.
Ovo daje metod instrumentalne varijable (IV) , *a s(t) se zove instrumenti.*

Metodi podprostora za procjenu modela u prostoru stanja

Matrice prostora stanja A, B, C, D i K u jednačini (6.23) se mogu direktno procjeniti, bez da se prije specificira neka specifična parametrizacija, pomoću efikasnih metoda podprostora. Ideja koja se nalazi u ovome metodu je slijedeća:

Ako bi sekvenca vektora stanja x(t) bila poznata, zajedno sa y(t) i u(t), jednačina (6.23) bi bila linearna regresija, i C i D bi mogli biti procjenjeni sa metodom najmanjih kvadrata. Tada e(t) bi se moglo oderediti, i tretirati kao poznati signal u (6.23), koji bi onda mogao biti drugi linearni regresioni model za A, B i K. Nakon toga, kada su stanja poznata, procjena matrica prostora stanja je lagana.

Kako da nadjemo stanja x(t)?. Sva stanja u relacijama kao (6.23) se mogu formirati kao linearne kombinacije od k koraka unaprijed prognoziranih izlaza (k=1,2,...n). Sada se metod svodi na to da se nadju ove prognoze, i onda izabere osnova izmedju njih. Metode podprostora čine efikasan i numerički pouzdan način odredjivanja prediktora projektujući ih direktno na osmatrane sekvence podataka.

Predstavljanja podataka i procjene neparametarskih modela

Predstavljanje podataka

Observirani izlazni i ulazni signali, y(t) i u(t) , se predstavljaju kao vektori kolone **y i u**. Red k je uzorak u trenutku k. Za multivarijabilne sisteme, svaka komponenta ulaza (izlaza) je predstavljena kao vektor kolona, tako da **u** postaje N x nu matrica (N je broj sampliranih opažanja, nu= broj ulaznih kanala). Izlazno/ulazni podatci se kolektivno predstavljaju u formatu **iddata**. Ovo je bazni objekat za rad sa signalima u SIT toolboksu. Kreira se sa komandom:

```
Data = iddata(y,u,Ts)
```

gdje je y vektor kolona ili Nxny matrica. Kolone **y** odgovaraju različitim izlaznim kanalima. Slično, **u** je vektor kolona ili N x nu matrica koja sadrži signale ulaznih kanala. Ts je interval samplovanja.

Podatci se zatim iscrtavaju sa **plot (Data)** a dijelovi zapisa podataka se biraju sa :

```
ze = Data(1:300)
```

Signali u izlaznim kanalima se dobijaju sa :

Data.InputData ili Data.u

Za vremenske serije , koristiti Data= iddata(y) , ili u = [ ].

iddata objekat može takodjer sadržavati samo jedan ulaz , ako stavimo y = [ ].
Interval sampliranja se može promjeniti sa (Data, 'Ts', 0.3), ili jednostavnije sa:

Data.Ts = 0.3

Korelaciona analiza

Procedura korelacione analize je implementirana u funkciji **impulse**:

impulse (Data)

Ova funkcija iscrtava procjenjeni impulsni odziv. Dodajući argument 'sd' kao u:

impulse (Data,'sd' , 3)

označava i region povjerenja koji odgovara u prethodnoj komandi, 3 standardne devijacije. Rezultat se može pohraniti i ponovno iscrtati:

```
ir = impulse(Data)
impulse(ir,'sd',3)
```

Alternativa je komanda **step** koja iscrtava odziv na step, izračunat iz procjene impulsa.

step (Data)

Spektralna analiza

Funkcija **spa** izvršava spektralnu analizu u skladu sa procedurom u jednačinama (6.35) do (6.37).

g = spa (Data)

Ovdje argument **Data** sadrži izlazno/ulazne podatke u **iddata** objektu. **g** se vraća kao objekat **idfrd** (identified frequency domain – identificirani frekventni domen), koji sadrži procjenjenu frekventnu funkciju G_N i procjenjeni spektar smetni Φ_v u jednačini (6.37), kao i procjenjenu neizvjesnost kovarijansi.

Frekventna funkcija , ili frekventni odziv **G u g** se može iscrtati sa komandom **bode , ffplot** ili **nyquist.** Spektar šuma se dobije sa **g ('n') ,** kao :

g = spa (Data)
bode (g)
bode (g ('n'))

i izvršava spektralnu analizu i iscrtava prvo G a onda Φ_v . Neizvjesnost procjene se prikazuje dodajući argument 'sd' kao u :

bode (g,'sd',3)

koja će prikazati , sa crta-tačka linijama, region povjerenja oko procjene. Dodajući argument 'fill' pokazaće popunjen region neizvjesnosti.

bode (g,'sd',3, 'fill')

Slićno:

nyquist (g)

daće Nyquistov plot frekventne funkcije, tj. grafički prikaz realnog dijela prema imaginarnom diejlu od G.

Ako Data = y je vremenska serija, tada Data nema ulaznog kanala, **spa** vraća procjenu spektra tog signala:

g = spa (y)
ffplot (g)

Kod izračunavanja jednačina (6.35) do (6.37), spa koristi kao prozor kašnjenja (lag window) Hammingov prozor za W (τ) sa default dužinom od M jednakom minimumu od 30 i 1/10 dijelom svih tačaka. Veličina prozora M se može promjeniti na proizvoljni broj sa:

g = spa (Data, M)

Pravilo je da kako M raste, procjenjene funkcije frekvencija, pokazuju oštrije detalje ali su i više podložne slučajnim smetnjama. Tipična sekvenca komandi koja testira različite velićine prozora je :

g10 = spa (Data, 10)
g25 = spa (Data, 25)
g50 = spa (Data, 50)
bode (g10, g25, g50)

Empirijska procjena prenosne funkcije se dobije kao odnos izlaza i ulaza Fourierove transformacije sa:

g = etfe (Data)

Ovo se takodjer može interpretirati kao procjena spektralne analize za velićinu prozora koja je jednaka dužini podataka.

Za vremenske serije, **etfe** daje periodogram kao procjenu spektra. Ova funkcija takodjer omogućuje izgladjenje (smoothing) grube procjene, i može biti dobra alternativa za signale i sisteme sa oštrim rezonancama.

Dodatne informacije o predstavljanju podataka sa iddata

Ulaznim i izlaznim kanalima su data default imena kao : y1, y2, u1, u2, itd.
Imena kanala se mogu setovati sa:

set (Data , 'Inputname', {'Voltage', 'Current'}, 'OutputName' , ' Temperature')

(dva ulaza i jedan izlaz u ovom primjeru). I ova imena će se pojavljivati na svim plotovima iz objekta. Takodjer , ova imena se i naslijedjuju od modela koji su procjenjeni iz ovih podataka.

Takodjer, inženjerske jedinice kanala se mogu specificirati koristeći osobine **OutputUnit** i **InputUnit**. Ove jedinice, kada se specificiraju, bit će korištene u plotovima.
Vremenske tačke pridružene samplovima se odredjuju sa intervalom sampliranja **Ts** i vremenom prvog sampla, **Tstart**.

Data.Tstart = 24

Stvarne vrijednosti vremenskih tačaka su date sa osobinom **SamplingInstants**, kao u:

plot (Data.sa , Data.u)

za iscrtavanje ulaza sa korektnim vremenskim tačkama. Autofill se koristi za sve ove osobine, i one su osjetljive na velika/mala slova.

Za brzo pisanje, 'u' je sinonim za ulaz (input) a 'y' za izlaz (output) kada referenciramo osobine.

Manipulacije sa kanalima

Lagani način da se setuju i dobiju osobine kanala je da se koristi subscripting. Subskripti su definirani kao:

Data (samples, outputs, inputs),

tako da je napr. Dat (:,3, :) je objekat podatka koji je dobijen iz Dat zadržavajući sve ulazne kanale, i samo izlazni kanal broj 3.
Kanali se mogu dobiti preko njihovih imena, tako da:

Dat (: , {'speed', ' flow' }, [ ])

je objekat podataka gdje su naznačeni izlazni kanali selektirani i nikakvi ulazni kanali nisu izabrani.
Nadalje:

Dat1(101:200, [3 4], [1 3]) = Dat2 (1001:1100, [1 2], [6 7])

će promjeniti samplove 101 do 200 izlaznih kanala 3 i 4 i ulaznih kanala 1 i 3 u **iddata** objekat Dat1 , na naznačene vrijednosti iz iddata objekta Dat2. Imena i jedinice ovih kanala će se takodjer promjeniti u skladu sa tome.

Da bi se dodali novi kanali, treba koristiti horizontalnu konkatenaciju objekata:

Dat = [Dat1 Dat2] ;

ili direktno dodati zapise podataka, tako da naprimjer:

Dat.u (:, 5) = u

će dodati peti ulaz u Dat.

Nejednako sampliranje

Osobina **SamplingInstants** daje trenutke sampliranja tačaka podataka. Može se uvjek dobiti sa **get (Dat, 'SamplingInstants')** ili sa **Dat.s** i onda se izračunava iz **Dat.Ts** i **Dat.Tstart**. **Sampling.Instants** se može takodjer podesiti na proizvoljni vektor iste dužine kao i podatci, tako da se može raditi i sa nejednakim sampliranjem. Ts se tada automatski setuje na [ ].

Multipli eksperimenti

iddata objekat može takodjer pohraniti podatke iz više odvojenih eksperimenata. Osobina **ExperimentName** se koristi da odvoji eksperimente. Broj podataka kao i osobine samplovanja mogu varirati od eksperimenta do eksperimenta, ali ulazni i izlazni kanali moraju biti isti. (koristiti NaN da se ispune nemjerljivi kanali u nekim eksperimentima). Zapisi podataka će biti čelije polja (arrays) , gdje čelije sadrže podatke iz svakog eksperimenta.

Multipli eksperimenti se mogu direktno definirati, ako se definiraju osobine 'y' i 'u' kao i 'Ts' i 'Tstart' kao čelije polja (cell arrays).

Obićno je lakše kreirati višeeksperimentalne podatke objedinjavanjem (merging) eksperimenata kao u :

Dat = merge (Dat1, Dat2)

Pohranjivanje višestrukih eksperimenata kao jedan **iddata** objekat je vrlo korisno kada se radi sa eksperimentalnim podatcima koji su sakupljeni u različitim prilikama, ili kada set podataka je rescijepljen da bi se otklonili "loši" dijelovi podataka.

Eksperimentalni podatci se mogu dobiti sa komandom : **get exp** kao i u **getexp (Dat,3)** ili **getexp (Dat, Period1)**.
Oni se takodjer mogu dobiti sa subskriptom sa četvrtim indeksom : Dat (:, :, :, 3) je eksperiment broj 3, a :

Dat (:, :, :, {'Day1', 'Day4'}) daje dva eksperimenta sa naznačenim imenima.

Subskripting se može kombinirati: Dat (1: 100, [2,3], [4:8], 3) daje 100 prvih samplova izlaznih kanala 2 i 3 i ulaznih kanala 4 do 8 od eksperimenta br. 3.

Može se takodjer koristiti kao poddoznačavanje (subassignment):

Dat (:, :, :, 'Run4')= Dat2

dodaje podatke u Dat2 kao novi eksperiment sa imenom 'Run4'.

Subreferenciranje

Samplovi, izlazni i ulazni kanali se mogu referencirati u skladu sa:

Data (samples, outputs, inputs)

Treba koristiti znak za kolonu (:) da označimo sve samplove/kanale i praznu matricu ([ ]) da označimo da nema samplova /kanala. Kanali se mogu referencirati ili po broju ili imenu. Za nekoliko imena, mora se koristiti polje čelije.

Dat2 = Dat (:, 'y3', {'u1', 'u4'})
Dat2 = Dat (:, 3, [1 4])

Mogu se takodjer koristiti i logički izrazi , naprimjer:

Dat3 = Dat2 (Dat2.sa > 1.27 & Dat2.sa< 9.3)

će izabrati uzorke sa vremenskim tagovima izmedju 1.27 i 9.3.
Subreferencirajući sa viličastim zagradama mi referenciramo eksperiment.

Data {Experiment} (samples, outputs, inputs)

Svaka subreferencirana varijabla se može doznačiti.

Data {'Exp3'}.z = flow (1: 700, :)
Data (1:10,1,1) = Dat1 (101:110,2,3)

Dodavanje kanala

Dat = [Dat1, Dat2,.......DatN]

kreira **iddata** objekat Dat, koji se sastoji od ulaznih i izlaznih kanala u Dat1,....DatN. Default imena kanala su ('u1', 'u2', 'y1', 'y2' . itd.) i promjeniće se tako da se izbjegne preklapanje u imenima, i novi kanali su dodati.

Ako Datk sadrži kanale sa imenima koje je specificirao korisnik, koji su već prisutni u kanalima Datj , j< k, ovi novi kanali će biti ignorisani.

Dodavanje samplova

Dat = [Dat1, Dat2,.......DatN]

kreira **iddata** objekat **Dat** čiji signali se dobiju sa postavljanjem ovih **Datk** jedan na drugoga. Tj.

Dat.y = [Dat1.y ; Dat2.y; ....DatN.y]

i slićno i za ulaze. Datk objekti moraju svi imati isti broj kanala i eksperimenata.

Procjena parametarskih modela

SIT toolboks sadrži nekoliko funkcija za procjenu parametarskih modela. Svi oni imaju istu komandnu strukturu:

m = function (Data, modstruc)
m = ...
function (Data, modstruc, 'Property1' , Value1'.,....' PropretyN', ValueN)

Argument Data je **iddata** objekat koji sadrži sekvence ulaznih i izlaznih podataka, dok **modstruc** specificira specifičnu strukturu modela koji treba biti procjenjen. Rezultirajući procjenjeni model je sadržan u m. To je model objekat koji pohranjuje razne informacije. Ukucavajuči :

m

dobićemo koncizni displej modela. Komanda

present (m)

daje još više detalja , dok

get (m)

daje kompletnu listu osobina modela. Vrijednosti osobina se mogu lako dobiti sa dot referenciranjem ; naprimjer:

m.par

daje procjenjene parametre.

U pozivu funkcije (....., 'Proprety1' , Value1 ,...., 'PropretyN', ValueN), je lista osobina koje mogu biti doznačene da utiču na strukturu modela, kao i na algoritam procjene. Model m se takodjer trenutačno priprema za prikazivanje i analizu njegovih karakteristika kao i za transformaciju u druge načine predstavljanja, kao u :

bode (m)
compare (Data, m)
[A, B, C, D , K] = ssdata (m)

ARX modeli

Da se procjene parametri a_i i b_i od ARX modela , jednačine (6.14), treba koristiti funkciju **arx**.

m = arx (Data, [na, nb, nk])

Ovdje na, nb i nk su odgovarajući redovi i kašnjenja u jednačini (6.15) , koja definira tačnu strukturu modela. Funkcija arx implementira metod procjene najmanjeg kvadrata greške, koristeći QR faktorizaciju za preodredjene linearne jednačine.

Alternativa je korištenje metode instrumentalne varijable (IV) opisane u sprezi sa jednačinom (6.39). Ovo se dobije iz:

m = iv4 (Data, [na nb nk])

koja daje automatski (i približno optimalni) izbor filtera N i M u jednačini (6.39).

i **arx** i **iv4** su primjenjljivi na bilo koje multivarijabilne sisteme.Ako imamo ny izlaza i nu ulaza, redovi su definirani kao: na je ny x ny matrica čiji i –j unos daju red polinoma koji povezuje prošle vrijednosti od y_j sa tekučim vrijednosti y_i (tj. prethodne vrijednosti y_j do y_j (t – na(i,j)) se koriste kada se procjenjuju y_i (t)). Slično, i-j ulaz od ny x nu matrice nu i nk, respektivno, daju red i kašnjenje od ulaznog broja j , kada se procjenjuje izlazni broj i.

AR modeli

Za jednostruki izlazni signal y (t) , prototip ARX modela je AR model.

$$A(q)\, y(t) = e(t) \qquad (6.40)$$

arx komanda pokriva takodjer i specijalni slučaj :

m = arx (y, na)

ali za skalarne signale, više opcija su raspoložive sa komandom:

m = ar (y , na)

koji ima opciju koja dozvoljava korisniku da izabere algoritam iz grupe od nekoliko popularnih tehnika za računanje AR modela sa najmanjim kvadratima. Medju njima su Burg-ov metod, metod geometrijske folije (geometric lattice) , Yule-Walker pristup, i modificirani kovarijantni metod. Prototip iv4 komande je :

m = ivar (y, na)

koja koristi tehniku instrumentalne varijable da izračuna AR dio vremenske serije.

Opšti polinomijalni modeli crne kutije (black-box)

Bazirano na metodi procjene greške u jednačini (6.38), korisnik može konstruirati modele bilo koje strukture. Za opšti model dat jednačinom (6.19), postoji funkcija:

m = pem (Data , nn)

gdje nn daje sve redove i kašnjenja.

nn = [na nb nc nd nf nk]

Nenulti redovi modela se mogu definisati kao osobina ili par ime osobine/ vrijednost osobine kao u :

m = pem (Data, 'na' , na , 'nb' , nb , 'nc' , nc , 'nk' , nk)

pem komanda pokriva sve slučajeve modela linearnog sistema crne kutije . Za specijalne slučajeve :

m = armax (Data, [na nb nc nk])
m = oe (Data , [na nf nk])
m = bj (Data , [nb nc nd nf nk])

se može koristiti.

Sve rutine takodjer pokrivaju jedno izlazne, višeulazne sisteme tipa :

$$A(q)y(t) = \frac{B_1(q)}{F_1(q)}u_1(t - nk_1) + \ldots + \frac{B_{nu}(q)}{F_{nu}(q)}u_{nu}(t - nk_{nu}) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (6.41)$$

gdje nb, nf i nk su vektori redovi iste dužine kao i broj ulaznih kanala koji sadrže svaki od redova i kašnjenja:

nb = [nb1 ....nbnu] ;
nf = [nf1 ....nfnu] ;
nk = [nk1 ....nknu] ;

Ove rutine procjene parametara zahtjevaju iterativno traženje za minimum funkcije u jednačini (6.39). Ovo traženje koristi specijalnu startnu proceduru baziranu na najmanjim kvadratima i instrumentalnom varijablom .

Iz početne procjene , procedura Gauss- Newtonove minimizacije se izvršava sve dok norma Gauss- Newtonovog pravca je manja od date tolerancije.

Rutina procjenjivanja takodjer vraća procjenjenu kovarijantnu matricu procjenjenog parametra vektora kao dio m.

Rutine pem, armax, oe, i bj se takodjer mogu startovati sa bilo kojom početnom vrijednošću mi , tj. u objektu modela zamjenjujući nn sa mi. Naprimjer:

m = pem (Data , mi)

Dok se traženje tipično inicijalizira koristeči ugradjenu start-up proceduru, dajuči samo redove i kašnjenja , mogućnost da se forsira specifični početni uslov je koristan u nekim uslovima.
Informacija o tome kako minimizacija napreduje se može pratiti u MATLAB komandnom prozoru s aosobinom **trace**.

Modeli u prostoru stanja

Parametrizacija za diskretni u vremenu model crne kutije (black box)

Predpostavimo prvo da ne postoji specifično znanje o internoj strukturi modela u prostoru stanja i diskretnog vremena. (jednačina (6.15)). Traži se bilo koji linearni model.Jednostavan pristup je da se koristi:

m = pem (Data)

Ovo procjenjuje model u prostoru stanja bilo kojeg reda (od 1 do 10) koji izgleda razumno.
Da bi se našao model crne kutije odredjenog reda n, koristiti:

m = pem (Data, n)

Da se dobije plot, iz kojeg se može odrediti red medju listom redova , nn = [n1, n2,...nN], koristiti:

m = pem (Data, 'nx' , nn)

Svi ovi modeli crne kutije se inicijaliziraju sa metodom podprostora n4sid. Da se dobije procjena iz ove rutine, koristiti

m = n4sid (Data, n)

Proizvoljno struktuirani modeli u diskretnom i kontinualnom vremenu

Za modele u prostoru stanja date strukture, najveći dio napora se odnosi na definiranje i manipuliranje sa strukturom. Jedanput kada je struktura definirana kao **ms**, korisnik može procjeniti parametre sa :

m = pem (Data, ms)

Kada su sistemi sa više izlaza, slijedeči kriterij se koristi za minimizaciju:

$$det \sum_{t=1}^{N} e(t)e^{T}(t) \qquad (6.42)$$

što predstavlja kriterij maksimalne sličnosti za Gausovski šum sa nepoznatom matricom kovarijanse.

Numerička minimizacija kriterija prognoze greške (jednačina (6.39)) ili (6.42) , može biti težak problem za parametrizaciju opšteg modela. Kriterij, kao funkcija slobodnih parametara, može definirati komplikovanu površinu sa mnogim lokalnim minimumima, uskim dolinama itd. Ovo može zahtjevati značajnu interakciju od strane korisnika, u obezbjedjenju razumnih početnih vrijednosti parametara, kao i u zamrzavanju izvjesnih

vrijednosti parametara (koristeći osobinu **FixedParameters**) , dok se ostalima dozvoljava da budu slobodni. Primjetimo da **pem** dozvoljava zamrzavanje bilo kojih parametara na njihove tekuče ili nominalne vrijednosti.
Procedura koja se često koristi za modele u prostoru stanja je da se dozvoli parametru šuma i matrici K da bude slobodan samo onda kada je dobijen razuman model dinamičkog dijela.

Opcione varijable

Estimacione funkcije prihvataju listu parova ime osobine/ vrijednost osobine koja može uticati i na strukturu modela i na algoritam procjene. Primjetimo da bilo koja osobina, kao i vrijednosti koje su stringovi , se može unjeti kao nedvosmislena, skračenica koja nije osjetljiva na velika/mala slova, kao naprimjer:

m = pem (Data, mi , 'fo' , 'si')

Primjena na sve estimacione modele

Slijedeće osobine se mogu primjeniti na sve estimacione metode:

- Focus
- MaxSize
- FixedParameter

Focus: Ova osobina utiče na težinsku funkciju koja se primjenjuje na uklapanje izmedju modela i podataka. Može se koristiti da obezbjedi da model aproksimira istinski sistem nad nekim intervalom frekvencija. Focus može poprimiti slijedeće vrijednosti:

- **Predikcija** : Ovo je default i znači da model je odredjen sa minimiziranjem grešaka predikcije. Korespondira sa frekventnom težinskom funkcijom koja je data sa ulaznim spektrom pomnoženim sa inverznim modelom šuma. Tipično, ovo favorizira dobro fitovanje kod viših frekvencija. Sa tačke gledišta statističke varijanse, ovo je optimalno otežavanje, ali su ipak aproksimacioni aspekti (bias) od fita zanemareni.
- **Simulacija**: Ovo znači da frekventno otežavanje uklapanja prenosne funkcije je dato sa ulaznim spektrom. Frekventni opsezi gdje ulaz ima značajnu snagu će biti bolje opisani od strane modela. Drugim riječima, aproksimacija modela je takva da će model proizvesti simulacije koje su najbolje moguće, kada se primjene na ulaze sa istim spektrom koji se koristi za procjenjivanje. Za modele koji nemaju model smetnje (A = C = D za **idpoly** modele i K = 0 za **idss** modele), nema razlike izmedju vrijednosti simulacije i predikcije. Za modele sa opisom smetnji , ovo se procjenjuje sa metodom procjene greške , fiksirajući procjenjenu prenosnu funkciju sa ulaza na izlaz. Rezultirajući model če garantirano biti stabilan.
- **Stabilnost**: Ovaj algoritam je modificiran tako da se garantira stabilan model, ali otežavanje još uvjek korespondira sa predikcijom.
- **Bilo koji SISO linearni filter**. Kada prenosna funkcija sa ulaza na izlaz je odredjena sa fitovanjem frekvencije, sa ovim filterom pomnoženo sa ulaznim spektrom kao funkcijom otežavanja. Model šuma je odredjen sa metodom

predikcije greške, dok se procjena prenosne funkcije fiksira. Da se dobije dobar model fitovanja nad specijalnim opsegom frekvencija, filter treba biti tako izabran sa pojasom propuštanja unutar cijelog opsega. Za model bez modela smetnje, rezultat je isti kao i da smo prvo primjenili prefiltriranje podataka koristeći **idfilt**. Filter se može specificirati na nekoliko načina:

- kao bilo koji **idmodel** sa jednim ulazom i izlazom
- kao **ss** , **tf**, ili **zpk** model iz SIT toolboksa
- kao { A, B, C, D} sa matricama u prostoru stanja za filter
- kao { brojnik , nazivnik } sa prenosnom funkcijom brojnik/nazivnik filtera.

MaxSize : Ne formira se ni jedna matrica sa više od MaxSize elemenata od strane **algorithm**. Umjesto toga, **for loops** će se korisititi. MaxSize će odlučiti o kompromisu izmedju memorije i brzine, i može spriječiti sporo korištenje virtuelne memorije. MaxSize može biti bilo koji pozitivni cijeli broj, ali se zahtjeva da ulazno-izlazni podatci sami sadrže manje od MaxSize elemenata. Default vrijednost za MaxSize je Auto, što znači da se vrijednost odredjuje u M file **idmsize**. Ovaj fajl se može editirati od strane korisnika da se optimizira brzina na računaru.

FixedParameter : Lista parametara koja će biti držana fiksnom na nominalnim ili početnim vrijednostima i neće se procjenjivati. Ovo je vektor od cjelobrojnih vrijednosti (integers), koji sadrži indekse fiksnih parametara ili imena čelija polja. Ako se koriste imena, mogući su i "*" ulazi (wildcard) , što može biti pogodno ako imamo grupe parametara u modelu.

Osobine algoritma koje vrijede za n4sid, koji procjenjuje modele u prostoru stanja

Ove osobine koje se primjenjuju na procjenu modela podprostora su:

- N4Weight
- N4Horizon

Ove osobine se takodjer onda mogu primjeniti i na **pem** za procjenu modela crne kutije u prostoru stanja, pošto pem se onda inicijalizira sa **n4sid** procjenom.

N4weight: Ova osobina odredjuje neke težinske matrice koje se koriste u dekompoziciji po singularnoj vrijednosti, koja je centralni korak u algoritmu. Dva izbora su na raspolaganju : **moesp** koji korespondira sa MOESP algoritmom od Verhaegena i **cva** koji je algoritam kanonske varijable Larimora. Default vrijednost je N4Weight = Auto , koja daje automatski izbor izmedju dvije opcije.

N4Horison: Odredjuje predikcione horizonte unaprijed i unazad, koji se koriste u algoritmu. Ovo je vektor red sa tri elementa : N4Horison = [r sy su], gdje **r** je maksimalni predikcioni horizont unaprijed, tj. algoritam koristi do r koraka unaprijed prediktore. **sy** je broj prethodnih izlaza, a **su** je broj prethodnih ulaza koji se koriste za predikciju. Ovi brojevi mogu imati značajan uticaj na kvalitet rezultirajućeg modela, i nema jednostavnih pravila za njihov izbor. Ako uzmemo da je N4Horizon k x 3 matrica, znači da svaki red od N4Horizon će biti testiran, i vrijednost koja daje najbolje predikciono uklapanje sa podatcima će biti izabrana.

Ako korisnik izabere samo jednu kolonu u N4Horizon, interpretacija je r = sy= su. Default izbor je : N4Horizon = Auto, koji koristi Akaikeov informacioni kriterij (AIC) za selekciju sy i su.

Osobine koje se primjenjuju na estimacione metode koristeći iterativno traženje za minimizaciju kriterija.

Osobine koje kontrolišu iterativno traženje su:

- Trace
- LimitError
- MaxIter
- Tolerance
- SearchDirection
- Advanced

Ove osobine se primjenjuju na **armax, bj, oe, i pem.**

Trace: Ova osobina odredjuje informaciju o iterativnom traženju koja je na raspolaganju u MATLAB komandnom prozoru:

- Trace = Off : Informacija se ne piše na ekran
- Trace = On: Informacija o vrijednostima kriterija i procesom traženja je data za svaku iteraciju.
- Trace = Full : tekuče vrijednosti parametara i smjer traženja su takodjer dati (izuzev kod slučaja " slobodne" **SSParametrization** za **idss** modele.)

LimitError : Ova varijabla odredjuje kako kriterij se modificira iz kvadratnog na onaj koji daje linearnu težinu velikim greškama. Greške koje su veće od **LimitError** puta procjenjena standardna devijacija će nositi linearnu težinu u kriteriju. Default vrijednost od LimitError je 1.6. Ako je LimitError = 0 onda je robustifikacija onemogućena i vodi ka čistom kvadratičnom kriteriju. Standardna devijacija je robustno procjenjena kao median od absolutnih devijacija od medijana, podjeljena sa 0.7.

MaxIter : Maksimalni broj iteracija izvršenih za vrijeme traženja minimuma. Iteracije će se zaustaviti kada se dostigne MaxIter, ili neki drugi kriterij zaustavljanja je zadovoljen. Default vrijednost za Maxiter je 20. Setovanje MaxIter = 0, će vratiti rezultat start-up procedure. Stvarni broj korištenih iteracija je dat sa osobinom **EstimationInfo.Iterations**.

Tolerance: Bazirano na Gauss-Newtonovom vektoru sračunatom pri tekučim vrijednostima parametara, pravi se procjena oćekivanog poboljšanja kriterija kod slijedeće iteracije. Kada je ovo oćekivano poboljšanje manje od tolerancije **Tolerance %**, iteracije se zaustavljaju. Default vrijednost je : 0.01.

SearchDirection: Smjer duž kojeg se izvršava linijsko traženje da se nadje manja vrijednost funkcije kriterija. Može poprimiti slijedeće vrijednosti:

- **gn** : Gauss-Newtonovski smjer (inverzni Hessian puta gradijent smjera). Ako se poboljšanje ne nadje duž ovoga smjera, pokušava se i sa smjerom gradijenta.
- **gns**: Regularizirana verzija Gauss-Newtonovskog smjera. Vlastite vrijednosti (eigenvalues) koje su manje od **pinvtot** Hessiana se zanemaruju, i Gauss-Newtonov smjer se računa u preostalom podprostoru.
- **lm**: Koristi se Levenberg-Marquard metod. Ovo znači da je slijedeća vrijednost parametra **-pinv(H+d*i) * grad** od prethodne vrijednosti, gdje je H hessian, i je jedinična matrica , grad je gradijent , d je broj koji se povećava dok se ne nadje donja vrijednost kriterija.
- **Auto**: Izbor izmedju gornjih vrijednosti se vrši u algoritmu. Ovo je default izbor.

Jedna od osobina povratnog modela je **EstimationInfo**. Ovo je struktura koja sadrži korisnu informaciju o estimacionom procesu.

Slijedeća važna opcija je **InitialState**,

Za procjene spektralne analize , možemo izračunati frekventne funkcije za proizvoljne frekvencije. Ako su frekvencije specificirane u vektoru redu w, tada:

g= spa (z, M, w)

rezultira u g koje se izračunava za ove frekvencije. Možemo generirati logaritamski razmještene frekvencije koristeći MATLAB l**ogspace** funkciju. Na primjer,

w = logspace (-3, pi, 128)

Definiranje strukture modela

Pošto SIT toolboks radi sa velikim brojem različitih struktura modela, važno je da se one mogu definirati na fleksibilan način.
U ovoj sekciji bit će opisano kako se strukture modela i modeli mogu direktno definirati. Ovo može biti zahtjevano, naprimjer, kada se kreira model za simulaciju. Takodjer, može biti potrebno definirati strukturu modela koji nisu tipa crne kutije, nego sadrže detaljniju internu strukturu, koja reflektuje neko fizikalno sagledavanje načina kako sistem radi.

Opšti izgled predstavljanja modela i struktura modela u SIT toolboksu je pomoću raznih modela objekata. U ovoj sekciji bit će uvedene komande (osim samih funkcija parametarske procjene), koje kreiraju različite modele.

Modeli objekti će sadržavati različit broj osobina. Za bilo koji model mi možemo pisati:

get (m)

da se vidi lista osobina modela, i

set (m)

da se vide koje su vrijednosti doznačene. Svaka vrijednost osobine se može dobiti sa subreferensiranjem kao:

m.A

i postaviti sa:

m.b (3) = 27

Polinomijalni modeli crne kutije: idpoly model

Opšti ulazno/izlazni oblik: (jednačina (6.39)):

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t-nk) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \tag{6.43}$$

je definirana sa pet polinoma A (q), B (q) , C (q), D (q)i F (q). Ovi su predstavljeni u standardnom MATLAB formatu za polinome. Polinomski koeficijenti se pohranjuju kao vektori redovi poredani po opadajućem stepenu. Naprimjer, polinom:

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \ldots + a_n q^{-n}$$

je prikazan kao :

A = [1 a1 a2 .....an]

Kašnjenja u sistemu su indicirana sa vodećim nulama u B (q) polinomu. Naprimjer, ARX model:

$$y(t) - 1.5y(t-1) + 0.7y(t-2) = 2.5u(t-2) + 0.9u(t-3) \tag{6.44}$$

je predstavljen sa polinomima :

A = [1 -1.5 0.7]

B = [0 0 2.5 0.9]

idpoly predstava jednačine (6.43) , se kreira komandom :

m = idpoly (A, B, C, D, F, lam, T)

lam je ovdje varijansa izvora bijeloga šuma e(t) i T je interval sampliranja. Elementi u repu se mogu izostaviti sa default vrijednostima. Sistem (jednačina (6.44)) se može predstaviti kao:

m = idpoly ([1 -1.5 0.7], [0 0 2.5 0.9])

U slučaju višestrukog ulaza (jednačina (6.41) , B i F su matrice, čiji broj reda k korespondira sa k-tim ulazom. Komanda idpoly se takodjer može koristiti da definira vremenski kontinualne sisteme.

Kada je m definirano, polinomi i njihovi redovi se mogu dobiti i mjenjati kao u:

m.a % za A polinom
roots (m.a)
m.a (3) = 0.95

Multvarijabilni ARX modeli : idarx model

Multivarijabilni ARX model sa nu ulaza i ny izlaza je dat sa:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t) \qquad (6.45)$$

Ovdje A (q) je ny x ny matrica čiji ulazi su polinomi po operatoru kašnjenja q^{-1}. Možemo ih predstaviti kao:

$$A(q) = I_{ny} + A_1 q^{-1} + \ldots + A_{na} q^{-na} \qquad (6.46)$$

kao i sa matricom:

$$A(q) = \begin{bmatrix} a_{11}(q) & a_{12}(q) & \ldots & a_{1ny}(q) \\ a_{21}(q) & a_{22}(q) & \ldots & a_{2ny}(q) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{ny1}(q) & a_{ny2}(q) & \ldots & a_{nyny}(q) \end{bmatrix} \qquad (6.47)$$

gdje ulazi a_{kj} su polinomi po operatoru kašnjenja q^{-1}. :

$$a_{kj}(q) = \delta_{kj} + a_{kj}^{1} q^{-1} + \ldots + a_{kj}^{na_{kj}} q^{-na_{kj}} \qquad (6.48)$$

Ovaj polinom opisuje kako stare vrijednosti izlaza broj j utiču na broj k. Ovdje δ_{kj} je Kronecker –delta, jednak je 1 kada je k = j, inače je jednak 0. Slićno, B (q) je ny x nu matrica:

$$B(q) = B_0 + B_1 q^{-1} + \ldots B_{nb} q^{-nb} \qquad (6.49)$$

ili :

$$B(q) = \begin{bmatrix} b_{11}(q) & b_{12}(q) & \dots & b_{1nu}(q) \\ b_{21}(q) & b_{22}(q) & \dots & b_{2nu}(q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{ny1}(q) & b_{ny2}(q) & \dots & b_{nynu}(q) \end{bmatrix} \qquad (6.50)$$

sa :

$$b_{kj}(q) = b^{1}_{kj} q^{-nk_{kj}} + \dots + b^{nb_{kj}}_{kj} q^{-nk_{kj} - nb_{kj} + 1}$$

Kašnjenje sa ulaza broj j na izlaz broj k je nk_{kj}. Da se poveže sa definicijom strukture u terminima na, nb i nk u komandama **arx** i **iv4**, primjetimo da **na** je matrica čiji kj-element je na_{kj}, dok kj-elementi od nb i nk su nb_{kj} i nk_{kj} respektivno.

idarx predstava modela (jednačina (6.45)) , se može kreirati sa :

ma = idarx (A, B)

gdje A i B su 3D polja (arrays), dimenzija ny x ny x – (n + 1) i ny x nu x – (nb+1) , respektivno, koja definira matrične polinome (jednačine (6.46) i (6. 49).

```
A(:,:,k+1) = Ak
B(:,:,k+1) = Bk
```

Primjetimo da A (:, :, 1) je uvjek jedinična matrica , i da koeficijenti vodećih nula u matrici B definiraju kašnjenja.

Posmatrajmo slijedeći sistem sa dva izlaza i tri ulaza:

$$y_1(t) - 1.5y_1(t-1) + 0.4y_2(t-1) + 0.7y_1(t-2) =$$
$$0.2u_1(t-4) + 0.3u_1(t-5) + 0.4u_2(t) - 0.1u_2(t-1) + 0.15u_2(t-2) + e_1(t)$$
$$y_2(t) - 0.2y_1(t-1) - 0.7y_2(t-2) + 0.01y_1(t-2) =$$
$$u_1(t) + 2u_2(t-4) + 3u_3(t-1) + 4u_3(t-2) + e_2(t)$$

koji u matričnoj notaciji se može pisati kao:

$$y(t) + \begin{bmatrix} -1.5 & 0.4 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix} y(t-1) + \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.01 & -0.7 \end{bmatrix} y(t-2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} u(t-1) + \begin{bmatrix} 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} u(t-2) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u(t-3) +$$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} u(t-4) + \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u(t-5)$$

Ovaj sistem je definiran i simuliran za neku vrijednost ulaza u, i onda procjenjen u korektnoj ARX strukturi sa slijedećim stringovima komandi:

```
A(:,:,1) = eye(2);
A(:,:,2) = [-1.5 0.4; -0.2 0];
A(:,:,3) = [0.7 0 ; 0.01 -0.7];
B(:,:,1) = [0 0.4 0;1 0 0];
B(:,:,2) = [0 -0.1 0;0 0 3];
B(:,:,3) = [0 0.15 0;0 0 4];
B(:,:,4) = [0 0 0;0 0 0];
B(:,:,5) = [0.2 0 0;0 2 0];
B(:,:,6) = [0.3 0 0;0 0 0];
m0 = idarx(A,B);
u = iddata([], idinput([200,3]));
e = iddata([], randn(200,2));
y = sim(m0, [u e]);
na = [2 1;2 2];
nb = [2 3 0;1 1 2];
nk = [4 0 0;0 4 1];
me = arx([y u],[na nb nk])
me.a % The estimated A-polynominal
```

Modeli crne kutije u prostoru stanja: idss model

Osnovni modeli u prostoru stanja su :

Inovaciona forma diskretnog vremena:

$$\begin{aligned} x(kT+T) &= Ax(kT) + Bu(kT) + Ke(kT) && (a) \\ y(kT) &= Cx(kT) + Du(kT) + e(kT) && (b) \\ x(0) &= x0 && (c) \end{aligned} \qquad (6.51)$$

Ovdje T je interval sampiranja, u (kT) je ulaz u trenutku kT, a y (kT) je izlaz u trenutku kT.

Sistem izražene dinamike kontinualan u vremenu:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) + \tilde{K}w(t) \\
y(t) &= Hx(t) + Du(t) + w(t) \\
x(0) &= x0
\end{aligned}
\qquad (6.52\ )
$$

Često je lakše definirati parametrizirani model u prostoru stanja kontinualan u vremenu , pošto fizikalni zakoni su najčešće opisani preko diferencijalnih jednačina. Matrice F, G, H i D sadrže elemente sa fizikalnim značenjem (naprimejr, materialne konstante). Numeričke vrijednosti ovih mogu ili ne moraju biti poznate. Da bi se procjenili nepoznati parametri, bazirani na sampliranim podatcima (predpostavljajući T je interval sampliranja), prvo treba transformisati jednačinu (6.52) u (6.51) koristeći formule iz jednačine (6.27). Vrijednost Kalmanove matrice pojačanja (jednačina (6.51)), ili $\tilde{K}$ u jednačini (6.52) zavisi od predpostavljenog karaketera aditivnih šumova w(t) i e(t) u jednačini (6.25), i njegovog kontinualnog opozita. Ovo daje *direktno parametriziranu inovacionu formu.*

Ako je interna struktura šuma važna, možemo koristiti strukture sive kutije (**idgrey object**) kao u primjeru.
Diskretni vremenski model (jednačina (6.51)), može se postaviti u **idss** model sa:

m = idss (A, B, C, D, K, X0, 'Ts' , T)

i za model kontinualnog vremena (jednačina (6.52)), treba koristiti:

m = idss (F, G, H, D, Kt, X0, 'Ts' ,0)

Postavljanje intervala samplovanja Ts na nulu znači kontinualni vremenski model. Model m može se sada koristiti za simulaciju i može biti ispitivan pomoću raznih komandi. Parametrizacija matrica je po default slobodna, to jest, bilo koji elementi u matrici se slobodno podešavaju estimacionim rutinama. Parametri će biti podešeni sa :

me = pem (Data, m)

Iterativno traženje za najbolje uklapanje se sada inicijalizira u nominalnim matricama A, B, C, D, K, X0. Primjetimo da komanda me = pem (Data,4), koja definira red modela , prvo procjenjuje (koristeći n4sid) startni model m, od kojeg se inicijalizira traženje.
U ovoj slobodnoj paramterizaciji , možemo odlučiti kako da radimo sa matricom K modela smetnje. Stavljajući :

m.Disturbancemodel = 'None'

fiksira K matricu na nulu, i time kreira model izlazne greške.

Stavljajući :

m.InitialState = 'zero'

postavlja se početni vektor stanja x0 na nulu.

Osobina nk odredjuje kašnjenja od raznih ulaza kao i za **idpoly** modele. Dakle:

m.nk = [0, 0, ..., 0]

(bez kašnjenja) znači da svi elementi matrice D trebaju biti procjenjeni, dok :

m.nk = [1, 1, ..., 1]

fiksira matricu D na nulu.

Sa parametrizacijom A,B i C koji su potpuno slobodni, tada osnova za realizaciju u prostoru stanja se automatski izabire da da dobro kondicionirana izračunavanja. Alternativa je da se specificira kanonska forma observera za A, B, C sa:

m.sspar = ' Canonical'

(radije nego 'free'). Ovo je još uvjek model crne kutije, pošto kanonska forma pokriva sve modele izvjesnog reda. Modifikacije strukture se mogu medjusobno kombinovati u trenutku pozivanja procjene:

me = pem (Data, m, 'sspar', 'can' , 'dist' , 'none' , 'ini' , 'z')

što je isto kao :

```
set(m,'sspar','can','dist','none','ini','z')
me = pem(Data,m);
```

Struktuirani modeli prostora stanja sa slobodnim parametrima : idss model

SIT toolboks nam omogućava da definiramo proizvoljne parametrizacije matrica u jednačinama (6.51) i (6.52). Da definiramo strukturu, koriste se takozvane **matrice strukture.** Ovo su "matrice sjenke" za A, B, C, D, K i X0 i imaju iste veličine i koincidiraju sa ovim za sve matrične elemente koji su poznati. Matrice strukture su označene sa As, Bs, Cs, Ds, Ks i X0s i imaju ulaz NaN kod onih elemenata koji korespondiraju sa nepoznatim parametrima koje treba procjeniti.

Naprimjer:

m.As = [NaN 0; 0 NaN]

postavlja matricu strukture za A , zvanu As, kao dijagonalnu matricu, gdje dijagonalni elementi su slobodno podesivi. Definirajući :

m.A = [2 0 ; 0 3]

postavlja nominalne/početne vrijednosti ovih dijagonalnih elemenata na 2 i 3 respektivno.

Primjer 6.1 : Struktura u diskretnom vremenu .

Posmatrajmo model diskretnog vremena:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & \theta_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} e(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + e(t)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sa pet nepoznatih parametara Θ_i , i = 1,..5. Predpostavimo nominalne/početne vrijednosti ovih parametara da su -1, 2, 3, 4 i 5. Ova struktura je definirana sa:

```
m = idss([1, -1;0, 1],[2;3],[1,0],0,[4;5])
m.As = [1, NaN; 0 ,1];
m.Bs = [NaN;NaN];
m.Cs = [1, 0];
m.Ds = 0;
m.Ks = [NaN;NaN];
m.x0s = [0;0];
```

Definicija slijedi u dva koraka. Prvo definira se nominalni model. Nakon toga, struktura (poznate i nepoznate vrijednosti parametara) se definiraju sa matricama struktura As, Bs, itd.

Primjer 6.2 . **Struktura Kontinualnog modela**

Posmatrajmo slijedeću strukturu modela :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \theta_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + e(t)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} \theta_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ona predstavlja električni motor, gdje $y_1(t) = x_1(t)$ je ugaona pozicija osovine motora a $y_2(t) = x_2(t)$ .je ugaona brzina. Parametar – Θ_1 je inverzna vremenska konstanta a – Θ_2 / Θ_1 je statičko pojačanje sa ulaza na ugaonu brzinu. Motor je u stanju mirovanja u trenutku 0, ali u nepoznatoj ugaonoj poziciji. Predpsostavimo da Θ_1 je oko -1 a Θ_2 je oko 0.25. Ako takodjer znamo da varijansa grešaka u mjerenju pozicije je 0.001 i da mjerenje ugaone brzine je 0.1, možemo definirati **idss** model koristeći :

```
m = idss([0 1;0
    -1],[0;0.25],eye(2),[0;0],zeros(2,2),[0;0],'Ts',0)
m.as = [0 1; 0 NaN]
m.bs = [0 ;NaN]
m.cs = m.c
m.ds = m.d
m.ks = m.k
```

```
m.x0s = [NaN;0]
m.noisevar = [0.01 0; 0 0.1]
```

Struktura m se sada može koristiti da se procjene nepoznati parametri Θ_i iz observiranih podataka:

Data = iddata ([y1 y2], u, 0.1)

sa

model = pem (Data, m)

Iterativno traženje za minimum se inicijalizira sa parametrima jednakim nominalnom modelu m. Model sa kontinualnim vremenom se automatski samplira da se usaglasi sa intervalom sampliranja podataka. Struktura se može takodjer koristiti da simulira gornji sistem sa intervalom sampliranja T = 0. , za ulaz u i realizaciju šuma e.

```
e = randn(300,2)
u = idinput(300);
simdat = iddata([],[u e],'Ts',0.1);
y = sim(m,simdat) % The continuous system will automatically be
                  % sampled using Ts =0.1
```

Sada se koriste nominalne vrijednosti parametara , i sekvenca šuma se skalira u skladu sa matricom **m.noisevar.**
Kada procjenjujemo modele, možemo pokušati niz "susjednih" strukture , kao što je " šta će se desiti ako fiksiramo parametar na neku vrijednost", ili " šta će se desiti ako oslobodimo ove parametre". Ovo se lako realizuje sa strukturnim matricama As, Bs, itd. Naprimjer, da se oslobodi parametar x_2 (0), možemo koristiti:

model = pem (Data, m, 'x0s' , [NaN ; NaN]

Da bi manipulirali početnim uslovima , funkcija **init** je takodjer korisna.

Modeli u prostoru stanja sa kuplovanim parametrima : idgray model

U nekim situacijama možemo željeti da nepoznati parametri u matricama u jednačinama (6.51) i (6.52) su medjusobno povezani. Tada NaN karakteristika nije dovoljna da opiše ove veze. Umjesto, mi trebamo da provedemo djelomično "greybox " (siva kutija) modeliranje i napišemo M-file koji opisuje strukturu. Format je:

```
[A,B,C,D,K,x0] = mymfile(par,T,aux);
```

gdje **myfile** je korisnički definirano ime za M-file, **par** sadrži parametre kao vektor kolonu, **T** je interval sampliranja, a **aux** sadrži pomoćne varijable. Ove varijable se koriste da objedine opcije, tako da neki različiti slučajevi se mogu ispitati bez da se editira M-file. Matrice A, B, C, D, K i x0 se odnose ili na kontinualni u vremenu opis (jednačina (6.52)), ili na diskretni opis (6.51). Kada se uklapa model sa kontinualnim vremenom u samplirane podatke sa procesa, estimacione rutine izvršavaju nužno sampliranje modela. Da se dobije ista struktura kao u primjeru 6.2, možemo učiniti slijedeće:

```
function [A,B,C,D,K,x0] = mymfile(par,T,aux)
A = [0 1; 0 par(1)];
B = [0;par(2)];
C = eye(2);
D = zeros(2,2);
K = zeros(2,1);
x0 =[par(3);0];
```

Jedanput kada je M-file napisan, idgrey model **m** je definiran sa komandom:

```
m = idgrey('mymfile',par,'c',aux);
```

gdje **par** sadrži nominalne (inicijalne) vrijednosti odgovarajućih ulaza u strukturu. 'c' signalizira da je odgovarajuća parametrizacija kontinualna u vremenu. **aux** sadrži vrijednosti pomoćnih parametara. Primjetimo da T i aux moraju se tretrati kao ulazni argumenti, čak i kad se ne koriste od strane koda.

Primjeri idgrey struktura modela

Sa korisnički definiranim strukturama, imamo kompletnu slobodu u izboru modela linearnih sistema. Ova sekcija će dati dva primjera ovakvih struktura.

Primjer x-3. Prenos toplote

Posmatrajmo sistem opisan sa jednačinom prenosa toplote :

Sistem se sastoji od metalne šipke sa koeficijentom toplinske difuzije κ , koja je izolirana na bližem kraju , i zagrijavana na daljem kraju sa snagom u (W). Izlaz iz sistema je temepratura bližeg kraja. Ovaj sistem je opisan sa parcijalnom diferencijalnom jednačinom u vremenu i prostoru. Zamjenjujući drugi prostorni izvod sa odgovarajućom diferentnom aproksimacijom, daje kontinualni u vremenu model u prostoru stanja (6.52), gdje dimenzija x zavisi od veličine mreže u prostoru korištenom u aproksimaciji. Takodjer je poželjno da se može raditi sa različitim veličinama mreže bez da se editira fajl modela. Ovo se može opisati sa slijedećim M-fileom :

```
function [A,B,C,D,K,x0] = heatd(pars,T,aux)
Ngrid = aux(1); % Number of points in the space-discretization
L = aux(2); % Length of the rod
temp = aux(3); % Assuming uniform initial temperature of the rod
deltaL = L/Ngrid;    % Space interval
kappa = pars(1); % The heat-diffusion coefficient
htf = pars(2); % Heat transfer coefficient at far end of rod
A = zeros(Ngrid,Ngrid);
for kk = 2:Ngrid-1
A(kk,kk-1) = 1;
A(kk,kk) = -2;
A(kk,kk+1) = 1;
end
A(1,1) = -1; A(1,2) = 1; % Near end of rod insulated
A(Ngrid,Ngrid-1) = 1;
A(Ngrid,Ngrid) = -1;
A = A*kappa/deltaL/deltaL;
B = zeros(Ngrid,1);
B(Ngrid,1) = htf/deltaL;
C = zeros(1,Ngrid);
C(1,1) = 1;
D = 0;
K = zeros(Ngrid,1);
x0 = temp*ones(Ngrid,1);
```

Sada možemo definirati model kao :

```
m = idgrey('heatd',[0.27 1],'c',[10,1,22])
```

za 10-i red aproksimacije toplinske šipke dužine jedan metar, sa početnom temperaturom od 22 stepena. Početna procjena toplinske vodljivosti je 0.27, i koeficijent prenosa topline je 1.

Parametri modela su procjenjeni kao:

me = pem (Data, m)

Ako želimo da pokušamo sa većom mrežom , tj. da je **Ngrid** veće, to ćemo realizovati sa:

me = pem (data, m, 'Filearg', [20, 1, 22])

Primjer x-4 Parametrizirani modeli smetnji

Posmatrajmo diskretni u vremenu model **:**

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + w(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + e(t)$$

gdje w i e su nezavisni bijeli šumovi sa kovarijansnim matricama R1 i R2. Predpostavimo da mi znamo varijansu mjerenog šuma R2, i da je samo prva komponenta od w(t) nenulta. Ovo se može ostvariti sa slijedećim M-fileom:

```
function [A,B,C,D,K,x0] = mynoise(par,T,aux)
R2 = aux(1); % The assumed known measurement noise variance
A = [par(1) par(2);1 0];
B = [1;0];
C = [par(3) par(4)];
D = 0;
R1 = [par(5) 0;0 0];
K = A*dlqe(A,eye(2),C,R1,R2); % from the Control System Toolbox
x0 = [0;0];
```

Strukture u prostoru stanja : Početne vrijednosti i numerički izvodi:

Za struktuirane modele u prostoru stanja je ponekad teško da se nadju dobre početne vrijednosti parametara, sa kojima ćemo početi numeričko traženje minimuma jednačine (6.38). Uvjek je najbolje, ukoliko je to moguće, koristiti fizikalno razmatranje da se sugeriraju te vrijednosti. Za slučajnu inicijalizaciju, koristi se komanda **init**. Pošto uvjek postoji rizik da numerička minimizacija može se zaglaviti u lokalnom minimumu, preporučuje se da se pokuša sa nekoliko različitih vrijednosti inicijalizacija za Θ.

U traženju minimuma , gradijent predikcione greške e (t) se računa sa numeričkom diferencijacijom. Veličina koraka se odredjuje sa M-file **nuderst**. U svojoj default verziji , veličina koraka je jednostavno 10^{-4} puta apsolutna vrijednost parametra koji se razmatra. Kada struktura modela sadrži parametre sa različitim redovima , treba pokušati skalirati vrijable tako da parametri su približno iste veličine.

Ispitivanje modela

Kada se model procjeni treba ispitati njegove osobine. Treba ga simulirati, testirati procjene dobijene iz modela, izračunati njegove polove i nule, itd. Dakle treba transformisati model u različite oblike predstavljanja. U ovom poglavlju bit će obradjeni:

- Parametarski modeli: osnovno korištenje, pristup osobinama, simulacija i predikcija. Takodjer manipilusanje sa kanalima, naročito sa kanalima sa ulazom šuma.
- Modeli u frekventnom domenu
- Iscrtavanje osobina modela
- Transformacije u druge oblike predstavljanja
- Transformacije izmedju kontinualnog i diskretnog vremena

Parametarski modeli : idmodel i njegova djeca

idmodel je objekat sa kojim korisnik nema direktnu relaciju. On sadrži sve opšte osobine objekata modela **idarx**, **idgray**, **idpoly**, i **idss**, koji se dobijaju kao rezultat raznih estimacionih rutina.

Osnovno korištenje

Ako samo procjenjujemo model iz podataka, objekti modela trebaju biti transparentni. Sve parametarske estimacione rutine vraćaju **idmodel** rezultate.

m= arx (Data, [2 2 1])

Model **m** sadrži sve relevantne informacije, Samo unoseći **m**, dobićemo kratki pregled o modelu. **present (m)** takodjer daje informacije o neizvjesnostima u procjenjenim parametrima. **get (m)** daje kompletnu listu osobina modela.
Većina interesantnih osobina se može direktno dobiti subreferenciranjem:

m.a
m.da

Karakteristike modela **m** se mogu direktno ispitati i prikazati komandama kao što su **impulse, step, bode, nyquist , pzmap**. Kvalitet modela se procjenjuje sa komandama kao **compare, i resid.** Ako imamo na raspolaganju Control Systems toolbox , ukucavanjem **view (m)** dobijemo pristup raznim displej funkcijama.

Da bi dobili matrice prostora stanja, polinome prenosnih funkcija , itd. postoje komande:

arxdata, polydata, tfdata, ssdata, zpkdata

a sa komandama **idfrd i frqresp** , može se izračunati frekventni odziv modela.

Simulacija i predikcija

Bilo koji model m se može simulirati sa :

y = sim (m, Data)

gdje Data je **iddata** objekat sa samo ulaznim kanalima..

Data = iddata ([ ] , [u v])

Broj ulaznih kanala mora biti ili jednak broju mjerenih kanala u m, u kom slučaju se dobija simulacija bez šuma, ili jednak sumi broja ulaznih i izlaznih kanala u m. U ovom drugom slučaju posljednji ulazni signali se interpretiraju kao bijeli šum. Oni se onda skaliraju sa **NoiseVariance** matricom od m i dodaju na izlaz preko modela smetnji:

y = Gu + He

$$e = L\,v$$

gdje matrica L je data iz kovarijanse šuma $\wedge \times \wedge = LL^T$.

$$L = chol\ (\ m.\ NoiseVariance\ )$$

Izlaz se vraća kao **iddata** objekat sa samo izlaznim kanalima. Tipični string komandi je:

```
A = [1 -1.5 0.7];
B = [0 1 0.5];
m0 = idpoly(A,B,[1 -1 0.2]);
u = iddata([],idinput(400,'rbs',[0 0.3]));
v= iddata([],randn(400,1));
y = sim(m0, [u v]);
plot(y)
```

Inverzni model (jednačina (6.38)), koja računa predikcione greške iz datih ulazno/izlaznih podataka, je simuliran sa:

e = pe (m, [y u])

Da se izračuna k-ti korak predikcije unaprijed izlaznog signala na bazi modela m, procedura je slijedeća:

yhat = predict (m, [y u] , k)

prognozirana vrijednost $\hat{y}(t|t-k)$ se računa koristeći informaciju u u(s) do vremena s = t i informaciju u y(s) do vremena s = t-k. Stvarni način kako je informacija u prethodnim izlazima korištena, zavisi od modela smetnje m. Naprimejr, model izlazne greške (tj. H = 1 u jednačini (6.10) podrazumjeva da nema informacije o prethodnim izlazima , pa prema tome, predikcije i simulacije koincidiraju.

predict može evaluirati kako dobro model vremenske serije je sposoban da prognozira budučе vrijednosti podataka. Daćemo primjer, gdje y je originalna serija , od , naprimjer, podataka mjesećne prodaje. Model je procjenjen na bazi podataka za prvu polovinu godine, a zatim njegova sposobnost da prognozira narednu polovinu godine je provjerena i poredjena sa podatcima za drugu polovinu godine.

```
plot(y)
y1 = y(1:48), y2 = y(49:96)
m4 = ar(y1,4)
yhat = predict(m4,y2,6)
plot(y2,yhat)
```

Komanda **compare** je korisna za bilo kakva poredjenja koja uključuju **sim** i **predict** komande.

Rad sa ulaznim i izlaznim kanalima

Za multivarijabilne modele, mi konstruišemo submodele koji sadrže podskup ulaza i izlaza sa jednostavnim subreferenciranjem. Izlazni i ulazni kanali se mogu referencirati u skladu sa:

m (outputs, inputs)

Koristiti kolonu (:) da označimo sve kanale i praznu matricu ([ ]) da označimo da nema kanala. Kanali se mogu referencirati sa brojem ili imenom. Za nekoliko imena , mora se koristiti čelija polja.

m3 = m ('position' , {' power' , 'speed'})

ili

m3 = m (3, [1 4])

Dakle m3 je model koji je dobijen iz m razmatranjem prenosnih funkcija od ulaznih brojeva 1 i 4 (sa ulaznim imenima 'power' i 'speed') na izlaz broj 3 (sa imenom 'position'):

Sa modelom sa jednim izlazom m

m4 = m (inputs)

će selektirati odgovarajuće ulazne kanale, a za model sa jednim ulazom:

m5 = m (outputs)

će izabrati indicirane izlazne kanale.
Subreferenciranje je vrlo korisno, naprimjer, kada plotujemo samo neke kanale.

Kanali šuma

Procjenjeni modeli imaju dvije vrste ulaznih kanala: mjereni ulazi **u** i ulazi šuma **e**. Za opšti linearni model m, imamo:

$$y(t) = G(q)\,u(t) + H(q)\,e(t) \qquad (6.53)$$

gdje je **u** nu – dimenzionalni vektor, mjerenih ulaznih kanala i **e** je ny- dimenzionalni vektor kanala šuma. Kovarijantna matrica od **e** je data sa osobinom ' NoiseVariance'. Ponekad, ova matrica Λ će se pisati u faktorisanoj formi:

$$\Lambda = LL^T$$

Ovo znači da **e** se može pisati kao :

$$e = L\,v$$

gdje v je bijeli šum sa jediničnom kovarijantnom matricom (nezavisni izvori šuma sa jediničnim varijansama).

Ako je m vremenska serija (nu = 0) , G je prazna i model je dat sa :

$$y(t) = H(q)\,e(t) \qquad (6.54)$$

Za model m u jednačini (6.53), restrikcija na prenosnu funkciju matrice G se dobije sa:

m1 = m (' measured') ili samo m1 = m (' m ')

Tada je **e** postavljeno na 0 i H se otklanja.

Analogno :

m2 = m (' noise ') ili samo m2 = m ('n ')

kreira model vremenske serije m2 iz **m** ignorisanjem mjernog ulaza. To jest m2 je dato sa jednačinom (6.54).

Za sistem sa mjerenim ulazima , bode, step i mnoge druge transformacione i displej funkcije rade sa matricom prenosne funkcije G. Da se dobije graf osobina modela smetnje H, važno je da se naprave transformacije m (' n '). Naprimjer:

bode (m ('n'))

će crtati spektar aditivnog šuma u skladu sa modelom m , dok

bode (m)

plotira frekventne odzive G.

Da se analiziraju detaljnije doprinosi šuma, može biti korisno konvertovati kanale šuma u mjerene kanale, koristeći komandu **noisecnv**:

m3 = noisecnv (m)

Ovo kreira model **m3** sa svim ulaznim kanalima, od mjerenih u i izvora šuma e, koji su tretirani kao mjereni signali. To jest, m3 je model od **u** i **e** na **y** , koji opisuje prenosne funkcije G i H. Informacija o varijansi inovacija **e** je tada izgubljena.

Da bi se uključila ta informacija , **e** treba biti prvo normalizirano e = Lv , tako da v postaje bijeli šum sa jediničnom kovarijantnom matricom.

m4 = moisecnv (m, ' Norm ')

Ovo će kreirati model m4 sa u i v tretirano kao mjerni signali.

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)Lv(t) = \begin{bmatrix} G\ HL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Naprimjer , step odzivi od v na y će sada takodjer odražavati tipičnu veličinu uticaja smetnje, zbog skaliranja sa L. U obadva ova slučaja, prethodni izvori šuma, koji su postali regularni ulazi će automatski dobiti ulazna imena koja su u relaciji sa odgovarajućim izlazom. Normalizirani izvori šuma e imaju imena kao : `'e@y1'` (šum e na izlaznom kanalu sa imenom y1), dok normalizirani izvori v se zovu `'v@y1'`.

Dobijanje prenosnih funkcija

Funkcije koje dobijaju osobine prenosnih funkcija , **ssdata, tfdata, i zpkdata** će funkcionirati sa modelom (jednačina (6.53)) sa mjerenim ulazima , na slijedeći način:

fcn (m) - vraća osobine G (ny izlaza i nu ulaza)

fcn (m ('n ')) - vraća osobine prenosne funkcije H (ny izlaza i ny ulaza)

fcn (noisecnv (m))- vraća osobine prenosne funkcije [G H] (ny izlaza i ny + nu ulaza).

fcn (noisecnv (m, 'Norm')) - vraća osobine prenosne funkcije [G HL] (ny izlaza i ny+ nu ulaza .

Analogno :

fcn (noisecnv (m ('n'), 'Norm'))

vraća osobine prenosne funkcije HL (ny izlaza i ny ulaza). Ako je m model vremenske serije fcn (m) vraća osobine H , dok

fcn (noisecnv (m , 'Norm'))

vraća osobine HL.

Primjetimo da procjenjena kovarijantna matrica **NoiseVariance** je sama po sebi nesigurna. Ovo znači da informacija o nesigurnosti H je različita od HL.

Dodavanje kanala

m = [mq, m2, ...mN]

kreira **idmodel** objekat **m**, koji se sastoji od ulaznih kanala u m1,....mN. Izlazni kanali od mk moraju biti isti. Analogno:

m = [m1; m2; .....mN]

kreiraju idmodel objekat **m** koji se sastoji od svih izlaznih kanala u m1, m2, ...mN. Ulazni kanali od mk će biti svi isti.

Format frekventne funkcije : idfrd model

Frekventne funkcije i spektri se pohranjuju kao **idfrd** (Identified frequency response data) model objekat (koji nije dijete proizašlo iz **idmodel**). Ovaj format modela se koristi sa spa i etfe da isporuči svoje rezultate. Šta više, bilo koji idmodel se može transformirati u **idfrd** objekat.

Frekventna funkcija i spektar smetnji koji odogovara idmodel m se računa kao:

h = idfrd (m)

Ovo daje G i Φ_v u jednačini (6.11) zajedno sa njihovim procjenjenim kovarijansama, koje se prevode iz kovarijantne matrice procjenjenih parametara. Ako m korespondira sa modelom kontinualnim u vremenu, frekventne funkcije se računaju u skladu sa tim.

Funkcije se dobijaju sa n.ResponseData, h.CovarianceData, h.SpectrumData i h.NoiseCovariance ili bilo koja skračenica od imena neosjetljiva na mala/velika slova. Frekventni vektor je sadržan u h.Frequency.

Dodatno, **idfrd** model se može definirati direktno iz frekventnih funkcija. Alternativa je računanje funkcija odziva bez njihovog pohranjivanja u **idfrd** objekat.

[Response, Frequency , Covariance] = freqresp (m)

Grafovi osobina modela

Postoji nekoliko komandi u toolboksu za crtanje karakteristika modela , kao:

- bode
- compare
- ffplot
- impulse
- nyquist
- pzmap
- step

Sve one imaju istu sintaksu. Da bi se vezali na odredjeni model , treba koristiti:

command (Model)

gdje **command** je bilo koja od funkcija koja je gore navedena.

command (Mod1, Mod2,...., ModN)

pokazuje poredjenje nekoliko modela . Modk može biti bilo koji **idmodel** model. Oni se mogu koristiti sa bilo kojim od LTI modela Control Systems toolboksa. Za neke komande Modk može takodjer biti **idfrd** i **iddata** objekti. Za multivarijabilne modele , plotovi se grupiraju tako da svaki ulazno/izlazni kanal (za sve modele) se zajedno iscrtavaju. **Inputname** i **OutputName** osobine modela se koriste za ovo. Broj kanala ne treba da bude isti u različitim modelima , što je vrlo korisno kada se pokušava naći dobar model multivarijabilnog sistema.

command (Mod1, PlotStzle1,...ModN, PlotStyleN)

dozvoljava da definišemo boje , tipove linija i markere koji su pridruženi različitim modelima. PlotStyle uzima vrijednost kao 'b' (za blue – plavo , 'b:' – za plavu isprekidanu liniju, ili ' b*-' – za plavu punu liniju sa tačkama podataka označenim sa zvjezdicom '*').

Da bi se pokazala neizvjesnost karakteristika modela , koristiti:

command (Mod1,...ModN, 'sd' , SD)

Ovo će označiti, koristeći crta-tačka liniju, region povjerenja oko nominalnog modela koji odgovara Sd standardnim devijacijama, (za Gaussovsku distribuciju). Ovaj region je izračunat koristeči kovarijantnu matricu za procjenjene parametre.

command (Mod1, ...ModN, 'sd' , SD, 'fill')

pokazuje region nesigurnosti kao popunjen region.

Ako model sadrži mjerene ulazne kanale, plot pokazuje prenosne funkcije od ovih mjerenih ulaza na izlaze, tj. G u jednačini (6.53). Da se iscrta odziv od izvora šuma, koristiti:

command (Model ('n '))

Za graf frekventnog odziva, ovo pokazuje aditivni poremećajni spektar , tj. spektar signala H (q) e(t) u jednačini (6.53) , tako da osobine izvora šuma e su uključene u plot.

Za druge grafove , osobine prenosne funkcije H su pokazane, tj. ne radi se normalizacija šuma. Isto važi i ako je Model vremenska serija. To znači da , naprimjer, step pokazuje step odziv prenosne funkcije H , bez uzimanja u obzir veličine kovarijantne matrice od e. Da bi se uključili ovi efekti , smetnje trebaju biti prvo konvertovane u normalizovane izvore šuma, koristeći komandu **noisecnv**.

Izlaz modela

Važan i vizuelno sugestivan plot, je da se poredi mjereni izlazni signal sa simuliranim ili prognoziranim izlazima iz modela. Ovo se dobije sa:

compare (Data, model)

Ulazni signal u Data se koristi od strane modela da simulira izlaz. Ovaj simulirani izlaz se pokazuje zajedno sa mjerenim izlazom, koji otkriva koje karakteristike u podatcima model može a koje ne može da reprodukuje. Takodjer i legenda pokazuje uklapanje izmedju signala, u terminima koliko je izlazne varijacije reprodukovano od strane modela.

Frekventni odziv

Tri funkcije nude grafički displej frekventnih funkcija i spektra: **bode, ffplot i nyquist.**

Funkcija **bode (G)**

crta Bodeov dijagram od G (logaritamske skale i frekvencije u rad/sec). Ako je G spektar, samo jedan amplitudni plot (spektar snage) je dat. Ovdje G može biti bilo koji **idmodel** ili **idfrd** objekat.

Komanda **ffplot** ima istu sintaksu kao i **bode** ako radi sa linearnim frekventnim skalama, i Hz kao jedinicom. Komanda **nyquist** takodjer ima istu sintaksu, ali proizvodi Nyquistove plotove, tj. grafove frekventne funkcije u kompleksnoj ravni.

Tranzijentni odziv

Impulsni i step odzivi modela su pokazani sa komandama:

impulse (Model) i step (Model)

impulse i **step** slijede opštu sintaksu , ali mogu takodjer prihvatiti **iddata** objekte kao argumente.

Nule i polovi

Nule i polovi se crtaju sa komadom:

pzmap (Model)

ovo će dati plot sa 'x' oznakama za polove i 'o' oznakama za nule.

Opšte

Ako imamo na raspolaganju Control System toolbox , tada komanda:

view (Model)

će otvoriti LTI viewer sa pristupom nizu displeja modela. Ipak informacija o neizvjesnosti se ne može pokazati.

Transformacija u druge predstave modela

Unutar strukture u kojoj je model kreiran, korisnik može dobiti parametarsku informaciju sa **get** ili subskriptingom. Naprimjer, za model u prostoru stanja, **Mod.A** je A matrica , dok **Mod.dA** sadrži njene standardne devijacije. Za polinomijalni model, **Mod.a** i **Mod.da** su A-polinom i njegova standardna devijacija.

Dodatno, bez obzira na specifičnu strukturu modela, postoji niz komandi koje računaju različite prezentacije modela. Sve one imaju osnovnu sintaksu:

[G, dG] = command (Model)

gdje G sadrži karakteristike modela i dG njihove standardne devijacije ili kovarijanse. Transformacione komande su :

```
[A,B,C,D,K,X0,dA,dB,dC,dD,dK,dX0] = ssdata(Model)

[a,b,c,d,f,da,db,dc,dd,df] = polydata(Model)

[A,B,dA,dB] =arxdata(Model)

[Num,Den,dNum,dDen] = tfdata(Model)

[Z,P,K,CovZ,CovP,covK] = zpkdata(Model)

G = idfrd(Model)

[H,w,CovH] = freqresp(Model)
```

Posljednje dvije komande su bile prethodno opisane. Tri prve komande jasno transformišu u prostor stanja, polinom, i multivarijabilnu ARX predstavu.

Modeli kontinualnog i diskretnog vremena

Kontinualni vremenski modeli

Kontinualni vremenski modeli se kreiraju i prepoznaju po osobini 'Ts' = 0. Svi **idmodel** objekti mogu se kreirati i analizirati kao modeli sa kontinualnim vremenom postavljajući Ts = 0 u trenutku kreiranja, kao u :

m = idpoly (1, [0 1 1], 1, 1, [1 2 3] , 'Ts' , 0)

za model :

$$y = \frac{s+1}{s^2+2s+3}u + e$$

Sve karakteristike modela se sada računaju i iscrtavaju za kontinualno vrijeme. Vremenske i frekventne skale su odredjene koristeći za interval samplovanja vrijednost iz podataka od kojih je model procjenjen. Za neprocjenjeni model, uzima se default izbor, koji može zahtjevati da se unesu frekventni i vremenski opsezi sa komandama.

Za simulaciju i predikciju, modeli kontinualnog vremena se prvo konvertuju u diskretno vrijeme, koristeći interval sampliranja i medjusamplovsko ponašanje podataka.

Procjena modela sa kontinualnim vremenom

Estimacione rutine podržavaju procjenu kontinualnog modela u prostoru stanja na nekoliko načina. Najlakši je :

mc = n4sid (Data, nx, 'Ts' , 0)

Ovo kreira kontinualni model sa slobodnom parametrizacijom, na bazi n4sid procjene. Dalje iteracije iz ove procjene se mogu postići sa:

mc = pem (Data, mc, 'ss' , 'can')

ili direktno sa :

mc = pem (Data, nx, 'Ts' , 0, 'ss', 'can')

Traženje za kontinualnim modelom mora biti izvršavano u kanonskoj (ili bilo kojoj drugoj struktuiranoj) parametrizaciji. Uklapanje se još uvjek vrši sa sampliranim podatcima u **Data**. Model se samplira sa intervalom sampliranja podataka za uklapanje. Informacija o ulaznom medjusamplovskom ponašanju u **data.InterSample** se koristi da odredi da li sampliranje treba biti zoh (zero order hold.- kolo nultog reda sa držanjem) ili foh (first order hold – kolo prvog reda , sa linearnom aproksimacijom izmedju dva uzorka).
Sve ovo daje model crne kutije u prostoru stanja bez bilo kakve unaprijed propisane unutarnje strukture. U ovim slučajevima , i za zoh ulaz, može biti lakše prvo procjeniti model crne kutije u diskretnom vremenu, a onda ga transformisati u kontinualno vrijeme sa **d2c** kao što je opisano u nastavku teksta. Za foh ulaz može biti bolje direktno procjeniti kontinualni model, pošto mapiranje iz diskretnog u kontinualni model pod foh predpostavkom može biti komplikovano.

Glavni razlog za identifikaciju kontinualnog modela je da osigura specifičnu strukturu za kontinualne matrice u prostoru stanja. Rezultirajuća struktura **mi** se uklapa sa podatcima na uobićajeni način :

m = pem (data, mi)

Transformacije

Transformacije izmedju predstava modela u kontinualnom i diskretnom vremenu se postižu sa **c2d** i **d2c**. Primjetimo da nije dovoljno samo doznačiti novu vrijednost od Ts za model objekta. Odogovarajuća mjera nesigurnosti (procjenjena kovarijantna matrica internih parametara) se takodjer transformiše u večini slučajeva. Sintaksa je :

```
modc = d2c(modd)
modd = c2d(mc,T)
```

Ako model u diskretnom vremenu ima neka čista kašnjenja (nk > 1) , default komanda ih otklanja prije formiranja kontinualnog modela , i pridodaje ih koristeći osobinu I**nput Delay** u modelu **modc**. Ova osobina se koristi da doda odgovarajuće fazno kašnjenje i šiftuje podatke, kada se god model korsti. **d2c** takodjer nudi opciju da aproksimira mrtvo vrijeme sa sistemom konačne dimenzije. Primjetimo da osobine smetnji se prevode sa formulom (6.29). Kovarijantna matrica se prevodi sa Gaussovskom aproksimativnom formulom koristeći numeričke izvode.

Zatim se poziva M-file **nuderst** . Korisnik može željeti da editira za one aplikacije gdje parametri imaju vrlo različite velićine redova.

Primjer koji slijedi poredi Bode plotove procjenjenog modela sa njegovim opozitom u kontinualnom vremenu:

```
m= armax(Data,[2 3 1 2]);
mc = d2c(m); bode(m,mc)
```

Selekcija i validacija strukture modela

Nakon analize podataka , tipično je da kreiramo veliki broj modela sa različitim redovima polinoma i strukturama. Sada treba da odlučimo koji je najbolji , i da li je taj model adekvatan za naše namjere. Ovo su problemi validacije modela.

Validacija modela je srce problema identifikacije, ali nema neke apsolutne procedure kako da se provede. Pametno je imati različite alate sa kojima možemo evaluirati kvalitete modela. Ova sekcija opisuje tehnike koje možemo koristiti da evaluiramo kvalitete modela koristeći SIT toolboks.

Poredjenje različitih struktura

Prirodno je porediti rezultate dobijene iz strukture modela sa različitim redovima i stepenima polinoma. Za modele u prostoru stanja ovo se lako dobije koristeći vektorski argument za red u **n4sid** ili **pem**.

```
m = n4sid(Data,1:10)
m = pem(Data,'nx',3:15)
```

Ovo poziva plot iz kojeg "najbolji" red se izabire. Izostavljajući argument reda, m = n4sid (Data) ili pem (Data) će uraditi default izbor najboljeg reda.

Za modele ARX tipa , različiti redovi i kašnjenja se mogu efikasno analizirati sa komandom **arxstruc**. Potrebno je skupiti u matricu NN sve ARX strukture koje želimo da istražujemo, tako da svaki red od NN je tipa :

[na nb nk]

sa :

V = arxstruc (Date, Datv, NN)

tako da je po jedan ARX model uklopljen sa setom podataka Date za svaku od struktura u NN. Nadalje, za svaki od ovih modela, suma kvadrata predikcionih grešaka se računa, kada se primjene na set podataka Datv. Rezultirajuće funkcije gubitaka se pohranjuju u V zajedno sa odgovarajučim strukturama.

Da bi se izabrala struktura koja ima najmanju funkciju gubitka, za validacioni set Datv, koristiti:

nn = selstruc (V, 0)

Takva procedura je poznata kao kros validacija , i dobar je način da se približimo problemu selekcije modela.

Obićno je i dobra ideja da se vizuelno inspicira kako se uklapanje mjenja sa brojem procjenjenih parametara. Graf uklapanja naprema broju parametara se dobije sa :

selstruc (V)

Ova rutina promptira korisnika da izabere broj parametara koje treba procjeniti na bazi vizuelne inspekcije grafa , i onda da izabere strukturu koja najbolje uklapa za taj broj parametara.

Komanda **struc** pomaže generirati tipične strukturne matrice NN za sisteme sa jednim ulazom. Tipična sekvenca komandi je:

```
V = arxstruc(Date,Datv,struc(2,2,1:10));
nn = selstruc(V,0);
nk = nn(3);
V = arxstruc(Date,Datv,struc(1:5,1:5,nk-1:nk+1));
selstruc(V)
```

gdje prvo uspostavimo pogodnu vrijednost kašnjenja **nk** testiranjem modela drugog reda, sa kašnjenjem izmedju 1 i 10. Najbolje uklapanje će izabrati to kašnjenje, a zatim sve kombinacije od ARX modela sa do pet a i b parametara se testiraju sa kašnjenjima oko izabrane vrijednosti (što daje ukupno 75 modela).

Ako se model validira na istom setu podataka iz kojih je i procjenjen, tj. ako Date = Datv, uklapanje će se uvjek poboljšati pošto se povećava fleksibilnost strukture modela.

Potrebno je da kompenziramo za ovaj automatski gubitak funkcije gubitaka. Postoji nekoliko pristupa ovome. Možda je najbolja tehnika ona koja se naziva kriterij Akaikeove konačne predikcione greške(Akaike's Final Prediction Error – FPE), i sa njim bliskog kriterija Informacionog teoretskog kriterija (Information Theoretic Criterion – AIC), gdje se model testira sa drugim setom podataka.

FPE se formira kao :

$$FPE = \frac{1 + \frac{d}{N}}{1 - \frac{d}{N}} V$$

gdje je d ukupni broj procjenjenih parametara a N je dužina zapisa podataka. V je funkcija gubitaka (kvadratnog uklapanja), za datu strukturu.
AIC se formira kao:

$$AIC = \log\left(V\left(1 + 2\frac{d}{N}\right)\right)$$

Sada u skladu sa Akaike-vom teorijom , u skupu različitih modela, treba izabrati onaj sa najmanjim FPE (ili AIC). FPE vrijednosti biće pokazane sa modelnim parametrima , ako samo ukucamo ime modela. On je takodjer i u jednom od polja od **EstimationInfo** , i može mu se pristupiti sa :

FPE = fpe (m)

Slićno, AIC vrijednost od procjenjenog modela se dobije sa :

AIC = aic (m)

Struktura koja minimizira AIC se dobije kao :

nn = selstruc (V, 'AIC')

gdje se V generira sa arxstruc.

Sa njima u relaciji je i kriterij Rissanena: Minimalne dužine opisa (Minimum Description Length – MDL), koji izabira strukturu koja dozvoljava najkraću ukupni opis observiranih podtaka. . Ovo se dobije sa :

nn = selstruc (V, 'MDL')

Ako je prisutan značajan nivo šuma, ARX modeli moraju biti višeg reda da bi mogli istovremeno opisivati karakteristike šuma i dinamike sistema. (Za ARX modele , model smetnje 1/A(q) je direktno kuplovan sa dinamičkim modelom B(q) /A (q))