

Univerzitet u Sarajevu

Elektrotehnički fakultet u Sarajevu

Odsjek za telekomunikacije

Prozoriranje signala i curenje spektra

Završni rad

I ciklusa studija

Mentor:

Red.prof.dr Melita Ahić-Đokić

Kandidat:

Almir Djedović

Sarajevo, septembar 2012

Red. prof. dr Melita Ahić-Đokić, dipl.el.inž.
Viši asistent mr Emir Sokić, dipl.el.inž.
Odsjek za telekomunikacije
Sarajevo, 30.11.2011.

Tema za završni rad

studenta I ciklusa studija koji studira na ETF-u u skladu sa principima Bolonjskog procesa
na Odsjeku za telekomunikacije (ak.god.2011/12)

Tema: “Prozoriranje signala i curenje spektra”

Student: Djedović Almir

Zadatak:

U radu je potrebno definirati vrste, značaj i primjene različitih transformacija signala. Posebno obratiti pažnju na Fourierovu transformaciju (FT) i Fourierovu transformaciju diskretnog signala (DTFT). Potrebno je definirati teoremu o uzorkovanju i aliasing. Uvesti pojam prozorske funkcije i njene FT, zbog čega se koristi, koji tipovi postoje, koje su razlike između njih, te analizirati curenje spektra za različite prozorske funkcije, tj. uticaj prozora na spektar signala. Kao zaključak kvalitativno uporediti njihov uticaj na potiskivanja bočnih lukova i rezoluciju spektra. Potrebno je softverski realizirati i analizirati različite tipove prozorskih funkcija. Dati grafičku interpretaciju gore navedenih problema u nekom od programske okruženja.

Metode rješavanja:

Za izradu softverskog dijela završnog rada i računarsku analizu preporučuje se upotreba MATLAB softverskog paketa, mada je dozvoljeno korištenje i drugih okruženja (LabView, C/C++, Java itd.).

Literatura:

1. Melita Ahić-Đokić, “*Signali i sistemi*”, Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, 2010.
2. Eleanor Chu, “*Transforms, Analysis, Applications and Fast Algorithms*”. University of Guelph, Guelph, Ontario, Canada.
3. Patrick Gaydecki, “*Foundations of Digital Signal Processing, Theory, algorithms and hardware design*”, The Institution of Engineering and Technology, London, United Kingdom .
4. Ivars Bilinskis, “*Digital Alias-free Signal Processing*”, Institute of Electronics and Computer Science, Riga Latvia.
5. John G. Proakis, Dimitris G. Manolakis, “*Digital Signal Processing, Principles, Algorithms and Applications* ”, *Third Edition*. Northeastern University, Boston College
6. Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky: “*Signals and systems*”, Prentice Hall, 1997.

Potpis mentora:

Red.prof.dr Melita Ahić-Đokić

Sažetak

U ovom radu analizirano je curenje spektra signala, što je čest problem kod digitalne obrade signala i predloženo adekvatno rješavanje istog pomoću prozorskih funkcija. Rad se sastoji iz tri dijela. Radi boljeg razumijevanja obrađivane problematike, prvo su navedni i objašnjeni osnovni pojmovi, počevši od funkcije i transformacije, pa do problema uzorkovanja. Drugi dio, koji je glavni, uvodi pojam prozorskih funkcija i njihov značaj. Nakon uvođenja pojma prozorskih funkcija, predstavljen je njihov značaj, a zatim i implementacija i analiza nekih prozorskih funkcija (Pravougaona, Trougaona (Bartlettova), Hannova, Hammingova, Blackmanova, Kaiserova i Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija) kroz analitičke izraze, njihove osnovne karakteristike te prikaz spektra prozora. Poslije predstavljanja mogućnosti, prednosti i manu navedenih prozorskih funkcija, izvršeno je i njihovo međusobno poređenje kroz tabele. Na kraju rada analiziran je uticaj proziranja na konkretnom signalu, koji je predstavljen kao zbir dvije sinusoida, te je izvršeno poređenje sa teoretskim rezultatima.

Abstract

This paper analyzes the spectrum of the signal leakage, which is a common problem with digital signal processing, and the proposed deal adequately with the same window function. The work consists of three parts. For a better understanding of the issues dealt with, as the said first and covers basic concepts, starting from the function and transformation, and sampling problems. The second part, which is the principal, introduced the concept of window functions and their significance. After introducing the concept of windowing function, their significance is presented, followed by implementation and analysis of certain window function (rectangular, triangular (Bartlett), Hanning, Hamming, Blackman, Kaiser and Dolf-Chebyshev window function) through the analytical expressions, their basic characteristics and spectrum display window. After presenting features, advantages and disadvantages of these window functions were performed and their comparison with each other through tables. At the end of the paper the influence of Roof penetration on the specific signal, which is presented as a sum of two sinusoids, and the comparisons with theoretical results.

Sadržaj

Zadatak završnog rada	2
Sažetak	3
Abstract	3
Uvod	6
1 Osnovni pojmovi	7
1.1 Definicija pojma funkcije	7
1.2 Kontinualni signal	8
1.3 Diskretni signal	9
1.4 Fourierov red	10
1.5 Pojam transformacije	12
1.6 Fourierova transformacija i integral	13
1.7 Fourierova transformacija diskretnog signala (DTFT)	15
1.8 Teorema o uzorkovanju i aliasing	16
2 Analiza prozorskih funkcija	20
2.1 Pojam prozorske funkcije i curenja spektra	20
2.2 Pravougaona prozorska funkcija	21
2.3 Bartlettova (trougaona) prozorska funkcija	23
2.4 Hannova prozorska funkcija	26
2.5 Hammingova prozorska funkcija	28
2.6 Blackmanova prozorska funkcija	30
2.7 Kaiserova prozorska funkcija	33
2.8 Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija	36

3 Poređenje prozorskih funkcija	39
3.1 Poređenje prozorskih funkcija po relativnom slabljenju bočnih lukova	39
3.2 Poređenje prozorskih funkcija po širini glavnog luka	43
3.3 Poređenje prozorskih funkcija po faktoru curenja	44
3.4 Praktična realizacija i analiza uticaja prozorskih funkcija na signal	45
Zaključak	57
Popis slika	58
Lista skraćenica	60
Literatura	61

Uvod

Predmet ovog rada su prozorske funkcije i njihova primjena u cilju smanjenja pojave curenja spektra. Rad je odabran s ciljem da se posveti veća pažnja problemu curenja spektra, koje uzrokuje *razmazivanje* energije originalnog signala na druge frekvencije u spektru i njegovog adekvatnog rješavanja primjenom prozorskih funkcija. Postoji mnogo prozorskih funkcija. U ovom radu su, zbog ograničenosti prostora obrađene samo neke kao što su: pravougaona, trougona (Bartlettova), Hammingova, Hannova, Blacanova, Dolf-Čebiševljeva i Kaiserova prozorska funkcija. Neke od poznatih su još i: Gaussova, Blackman-Harrisova, Flat-Top itd. Sa prozorskim funkcijama nastoji se suziti glavni luk u kojem je koncentrirano najviše energije i osigurati što veće slabljenje bočnih lukova. Svaka od prozorskih funkcija ima svoju prednost, odnosno nedostatak, tako da je nemoguće naći prozorsknu funkciju koja je najbolja po pitanju širine glavnog luka i istovremeno najbolja po pitanju slabljenja bočnih lukova. Zadatak prilikom dizajna jeste da se odabere, na osnovu poznavanja karakteristika prozorskih funkcija, ona koja će obezbijediti najbolje osobine za datu primjenu.

U prvom dijelu su objašnjeni pojmovi koji će omogućiti jednostavnije praćenje daljeg rada, počevši od osnovnih pojmoveva funkcije, signala, pa do pojma transformacije.

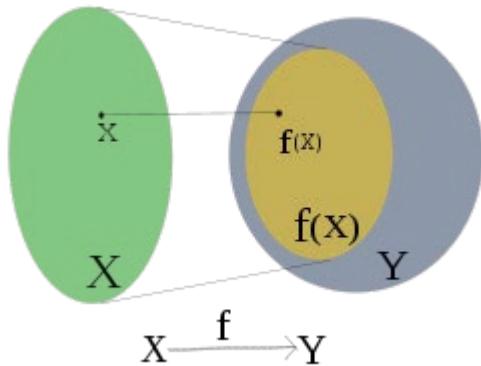
U drugom dijelu je definisan problem curenja spektra, njegovog nastanka i njegovo rješavanje primjenom prozorskih funkcija. Obrađeno je sedam prozorskih funkcija. Za svaku od njih je dat analitički oblik, prikaz u vremenskom i frekventnom domenu. Na svakom grafiku funkcije u frekventnom domenu su predstavljeni faktor curenja, relativno slabljenje bočnih lukova i širina glavnog luka. Na pojedinim graficima su funkcije direktno uspoređivane, kako u frekventnom tako i u vremenskom domenu. Za pojedine funkcije je dato slabljenje bočnih lukova po oktavi. Sva ova analiza je izvršena detaljno da bi se u trećem dijelu moglo izvršiti što potpunije upoređivanje prozorskih funkcija.

U trećem dijelu, kao što je rečeno, izvršeno je poređenje prozorskih funkcija tako da su sortirane u tri tabele po relativnom slabljenju bočnih lukova, širini glavnog luka i faktoru curenja, a zatim je doveden signal koji predstavlja zbir dvije sinusoide i razmatrane su frekventne karakteristike signala pomnoženog prozorskom funkcijom.

1 Osnovni pojmovi

1.1 Definicija pojma funkcije

Neka su X i Y dva neprazna skupa. Funkcija je svako preslikavanje $f: X \rightarrow Y$, pri čemu je svakom elementu iz skupa $x \in X$ pridružen tačno jedan element skupa $y \in Y$ tj. $y = f(x)$, kao na slici 1.1. Skup X se naziva domenom, a skup Y kodomenom ili skup vrijednosti funkcije. Preciznije se funkcija može definisati kao uređena trojka (F, X, Y) [1] pri čemu je F ma koji podskup skupa $X \times Y$, sa osobinom da unutar podskupa F nema elementa koji predstavljaju uređene parove koji imaju iste prve komponente, a različite druge komponente. Ako je pri tome $X \subseteq \mathbb{R}$ i $Y \subseteq \mathbb{R}$ onda se (F, X, Y) zove realna funkcija jedne realne promjenljive. Ovom funkcijom se najčešće opisuju signali u vremenskom domenu. S druge strane, za $X \subseteq \mathbb{R}$ i $Y \subseteq \mathbb{C}$ opisana je transformacija.



Slika 1.1. Preslikavanje skupa X u skup Y

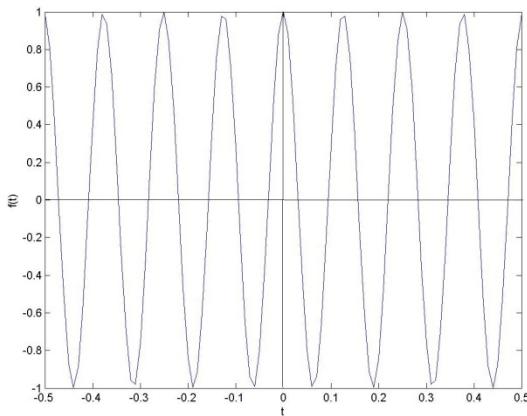
1.2 Kontinualni signal

Generalno, u radu će se pod signalima podrazumijevati realne ili kompleksne funkcije najčešće jedne nezavisne vremenske varijable. Signali mogu biti:

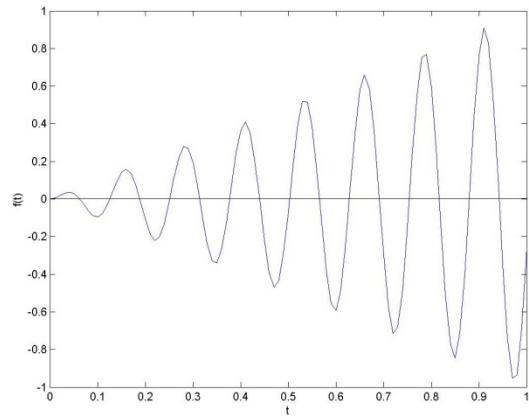
- jednodimenzionalni ili višedimenzionalni,
- kontinualni (CT) ili diskretni (DT),
- deterministički ili stohastički (slučajni ili probabilistički).

Signali se mogu podjeliti i na sljedeći način:

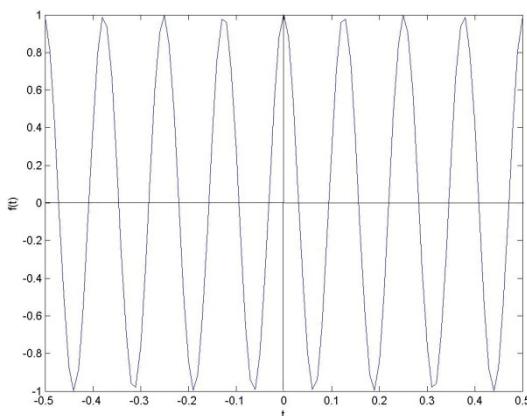
- periodični i aperiodični (Slika 1.2. i Slika 1.3.),
- parni i neparni (Slika 1.4. i Slika 1.5.),
- signali snage i energije (Slika 1.6. i Slika 1.7.).



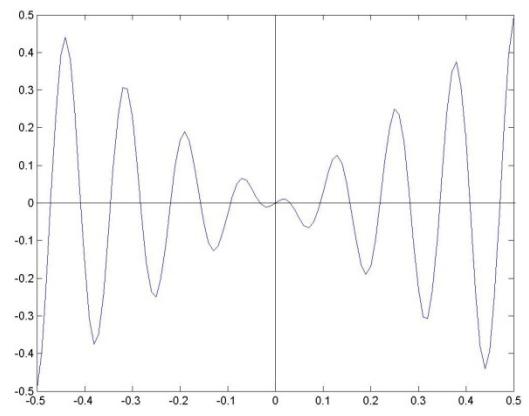
Slika 1.2. *Periodični signal*
(Signal se ponavlja sa periodom 0.1s)



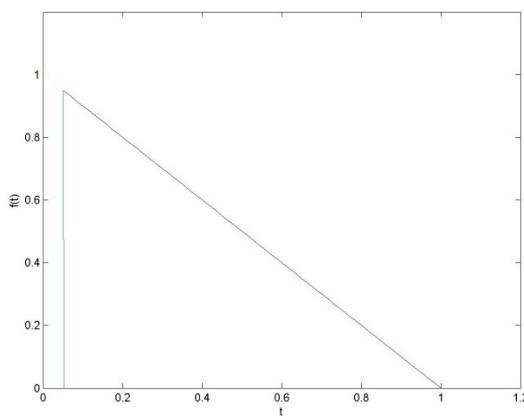
Slika 1.3. *Aperiodični signal*
(Signal se ne ponavlja)



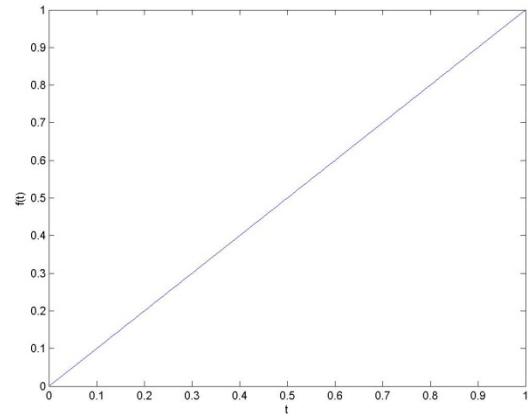
Slika 1.4. *Parni signal*
(Simetrija u odnosu na ordinatu)



Slika 1.5. *Neparni signal*
(Simetrija u odnosu na koordinatni početak)



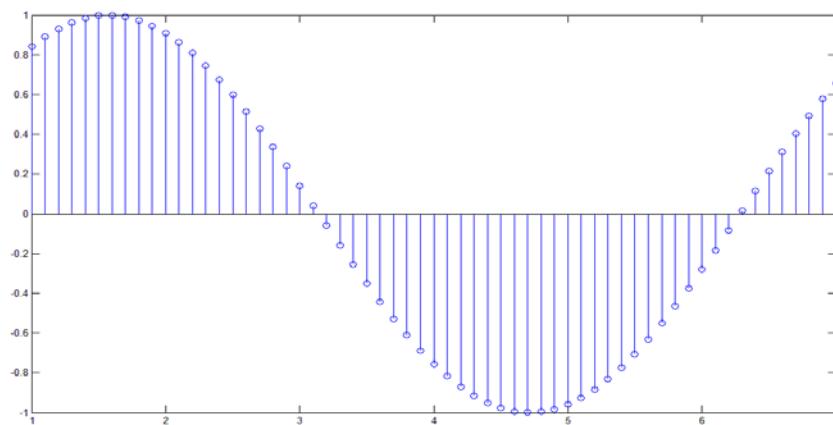
Slika 1.6. Signal energije
(Amplituda signala opada u konačnosti)



Slika 1.7. Signal snage
(Amplituda signala ne opada u konačnosti)

1.3 Diskretni signal

Diskretni vremenski signal je funkcija koja je definisana u diskretnim – tačno određenim vremenskim trenucima, a za sva ostala vremena nije definisana. Iako diskretni signal može biti definisan u proizvoljnim vremenskim trenucima u intervalu $-\infty$ do $+\infty$, analizirat će se diskreti signali koji su dobijeni iz kontinualnih i to u vremenskim trenucima $t = nT$, gdje je T fiksni vremenski interval u sekundama poznat kao vrijeme uzorkovanja, a n je cijeli broj $n \in \mathbb{Z}$. Ako uzorkujemo signal u jednakim vremenskim trenucima od T sekundi tada se generiše $f(nT) = f(t)|_{t=nT}$ niz brojeva. Budući da je T fiksno, $f(nT)$ je funkcija samo cijelog broja n , odakle možemo uzeti $f(t)$ kao funkciju od n tj. skraćeno $f(n)$. Diskretni signal je prikazan na slici 1.8.



Slika 1.8. Diskretni signal

Diskretizacija, odnosno uzimanje odabiraka signala, koja predstavlja fizički proces, se matematički opisuje kao množenje signala $f(t)$ beskonačnim nizom Dirakovih implusa $\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t-nT)$. Za razliku od diskretnog signala koji je definisan samo u diskretnim trenucima vremena matematička predstava diskretnog signala je kontinualna funkcija vremena, ali je jednaka nuli u svim trenucima osim možda u trenucima $t = nT$. U tim trenucima matematička predstava signala je jednaka Dirakovim funkcijama čije su površine jednake vrijednostima diskretnog signala $f(n)$. Iako diskretni signali imaju šire značenje od numeričke predstave pomoću kontinualnih signala, ova matematička predstava se usvaja za sve diskrete signale, neovisno o načinu njihovog nastanka.

1.4 Fourierov red

Fourierov red je jedan od najvažnijih alata za rješavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina. Teorija Fourierovih redova je relativno komplikirana, ali je njena primjena nadasve jednostavna. Fourierov red je općenitiji od Taylorovog, jer se mnoge diskontinuirane periodičke funkcije koje su od velikog praktičnog interesa (a ne mogu se razviti u Taylorov red), mogu razviti u Fourierov red. Fourierov red se bazira na rastavljanje svake periodične funkcije na red trigonometrijskih funkcija tj. red sinusa i kosinusa. Neka je data neka funkcija $f(t)$ sa periodom $T \in \mathbb{N}$, tako da vrijedi $f(t + T) = f(t)$. Prema Fourieru ova funkcija se može predstaviti u obliku [2]:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \frac{2\pi k t}{T} + B_k \sin \frac{2\pi k t}{T} \quad (1.1)$$

Fourierov red ne konvergira uvijek, a čak i kad konvergira, vrijednost reda se može razlikovati od vrijednosti funkcije. Jedno od glavnih pitanja u harmonijskoj analizi je da se odredi kada red konvergira, a kada je jednak originalnoj funkciji. Ako je funkcija kvadratno integrabilna na intervalu $[-\pi, \pi]$, tada Fourierov red konvergira ka funkciji skoro u svakoj tački. U inženjerskim primjenama, za Fourierov red se, u opštem slučaju, pretpostavlja da konvergira svuda osim u tačkama prekida funkcije, pošto se funkcije koje nalazimo u inženjerstvu, bolje ponašaju od onih koje matematičari mogu dati kao kontraprimjer. Pojedinačno, Fourierov red konvergira apsolutno i uniformno u $f(t)$ kad god je izvod od $f(t)$ (koja ne mora uvijek postojati) kvadrat integrabilna funkcija [3]. Koeficijente Fourierovog reda možemo računati na osnovu relacije (1.2).

$$A_k = \frac{2}{T} \int_a^b f(t) \cos \frac{2\pi k t}{T} dt, \quad B_k = \frac{2}{T} \int_a^b f(t) \sin \frac{2\pi k t}{T} dt, \quad T = b - a, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Zavisno od konteksta primjene Fourierov red se može javiti u različitim formama:

- **Harmonični prikaz zajedno sa istosmjernom komponentom**

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{2\pi k t}{T} + B_k \sin \frac{2\pi k t}{T} \quad (1.3)$$

gdje se za $k = 0$ dobije $A_0 \cos 0 + B_0 \sin 0 = A_0$. U navedenom primjeru se uzima $\frac{A_0}{2}$.

- **Red pomaknutih kosinusa**

$$f(t) = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k\right) \quad (1.4)$$

Pojedinačni izrazi $D_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k\right)$ se nazivaju harmonici. Frekvencijski skokovi između harmonika su $\Delta f = f_{k+1} - f_k = \frac{1}{T}$. Odatle periodički signal ima diskretan spektar, a skokovi u frekvencijskom domenu su obrnuto proporcionalni periodu T u vremenskom domenu. Vrijedi da je:

$$D_0 = \frac{A_0}{2}, \quad D_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{A_k}{B_k} \quad (1.5)$$

- **Eksponencijalni oblik**

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j \frac{2\pi k t}{T}} \quad (1.6)$$

pri čemu je veza između koeficijenata:

$$X_{\pm k} = \frac{A_k \mp j B_k}{2}, \quad k \geq 0 \quad (1.7)$$

- **Prikaz pomoću kosinusa, sinusa i pomoćne varijable $\theta = \frac{2\pi t}{T}$**

$$g(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta \quad (1.8)$$

Umjesto varijable t definiše se varijabla $\theta = \frac{2\pi t}{T}$, koja se kreće od 0 do 2π i vrijedi $g(\theta + 2\pi) = g(\theta)$.

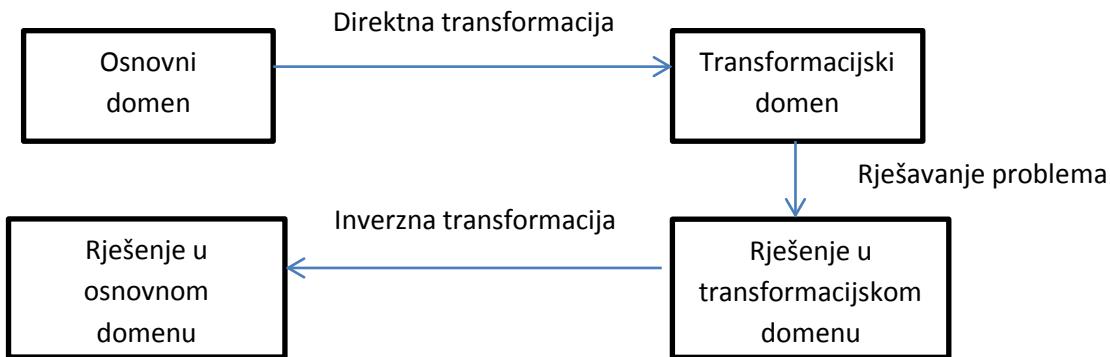
- **Eksponencijalni oblik i pomoću varijable $\theta = \frac{2\pi t}{T}$**

$$g(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\theta} \quad (1.9)$$

Umjesto vremena t na prva tri načina funkcija se može rastavljati i u frekventnom domenu preko učestanosti f , pa se uvedena varijabla θ naziva još i neutralnom varijablom.

1.5 Pojam transformacija

Transformacije omogućavaju prelazak iz jednog domena u drugi, s ciljem olakšanja određenih problema. One imaju različite primjene počevši od matematike gdje se koriste za rješavanje diferencijalnih i integralnih jednačina, računanja odziva linearnih dinamičkih sistema pa do elektrotehnike i fizike. Rješavanje problema primjenom transformacije prikazano je na slici 1.9.



Slika 1.9. Direktna i inverzna transformacija

Transformacije su definisane i u kontinualnom i u diskretnom području. Najčešće se koriste integralne transformacije. Integralnim transformacijama se može u mnogim slučajevima uprostiti rješavanje zadatka. Opšti oblik integralne transformacije je dat izrazom [4]:

$$X(z) = \int_a^b G(z,t)x(t) dt ; \quad a,b \in \bar{R}, z \in \mathbb{C} \quad (1.10)$$

Upravo zbog ovog integrala one nose i naziv integralne transformacije. Ovdje je $X(z)$ slika, koja je kompleksna funkcija jednog argumenta, a $G(z, t)$ jezgro transformacije. U ovisnosti od funkcije jezgra i granica a, b izvode se različite transformacije:

1. Za $a = 0, b = +\infty, G(z, t) = e^{-zt}$ Laplaceova transformacija
2. Za $a = -\infty, b = +\infty, G(z, t) = e^{-zt}$ dvostrana Laplaceova transformacija
3. Za $a = -\infty, b = +\infty, G(z, t) = e^{-itz}$ Fourierova transformacija.

4. Za $a = 0, b = +\infty, G(z, t) = t^{z-1}$ Mellinova transformacija.

5. Za $a = -\infty, b = +\infty, G(z, t) = \frac{1}{z+t}$ Hilbertova transformacija

6. Za $a = 0, b = +\infty, G(z, t) = ze^{-zt}$ Heavisideova transformacija, koja je još u literaturi poznata kao Garson-Laplaceova transformacija.

Postoje još mnoge druge transformacije kao što su: Hankelova, Jacobijeva, Radonova, Stiltjesova, Gegenbauerova, Laguerrova, Hermiteova i Wavelet transformacija. Naravno, da bi se funkcija mogla transformisati iz realnog u kompleksni domen, a specijalno u frekvencijski domen, ona mora zadovoljavati posebne kriterije koje zahtijeva ta transformacija. Često imamo slučaj da za datu funkciju ne postoji transformacija. Tako npr. kod Hilbertove transformacije koja se definiše relacijom [5]:

$$y(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|t-\tau| \geq \delta} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{t-\tau > \delta} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau + \int_{t-\tau < -\delta} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau \right] = x(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (1.11)$$

javlja logaritamski singularitet.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t-\tau)}{\pi \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau \quad (1.12)$$

Singulariteti su u tačkama $\tau = 0$ u prvom slučaju, odnosno $\tau = t$ u drugom slučaju. Navedeni problem se rješava uzimanjem glavne vrijednosti integrala [6]:

$$y(t) = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t-\tau)}{\pi \tau} d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{x(t-\tau)}{\pi \tau} d\tau + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{x(t-\tau)}{\pi \tau} d\tau \right\} \quad (1.13)$$

odnosno, u drugom slučaju:

$$y(t) = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left\{ \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{x(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau + \int_{t+\varepsilon}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau \right\} \quad (1.14)$$

1.6 Fourierova transformacija i integral

Za razliku od Fourierovih redova, koji se prvenstveno koriste za periodične signale Fourierovu transformaciju koristimo za aperiodične signale. Do izraza za Fourierovu transformaciju možemo doći polazeći od periodičnog signala $x_{T_0}(t)$ sa periodom T_0 . Aperiodični signal iz posmatranog signala dobijemo u graničnom slučaju kada $T_0 \rightarrow \infty$ tj. [7]:

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) \quad (1.15)$$

Periodični signal $x_{T_0}(t)$ možemo razviti u Fourierov red:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kf_0) e^{jk2\pi t f_0} f_0 \quad (1.16)$$

$$X(f) = \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (1.17)$$

gdje je $T_0 X(kf_0)$ zamjena za koeficijente C_k i $T_0 = \frac{1}{f_0}$. U slučaju da je $t_0 = -\frac{T_0}{2}$ i da $T_0 \rightarrow \infty$ ($f_0 \rightarrow 0$) slijedi:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (1.18)$$

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kf_0) e^{jk2\pi t f_0} f_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad (1.19)$$

Da bi postojala Fourierova transformacija funkcije ta ista funkcija treba zadovoljavati određene uvjete. O tome najbolje govori sledeća definicija [4]:

Definicija 1.1. Ako je funkcija $x(t)$ absolutno integrabilna i ako zadovoljava Dirichletove uvjete na bilo kojem konačnom intervalu u \mathbb{R} , tada funkciju:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (1.20)$$

nazivamo Fourierovom transformacijom ili kompleksnim Fourierovim likom funkcije $x(t)$, a funkciju $x(t)$ originalom i skraćeno pišemo kao:

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad (1.21)$$

Funkcija je absolutno integrabilna ukoliko vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (1.22)$$

dok su Dirichletovi uvjeti dati sljedećom teoremom:

Teorema 1.1. Prepostavke za funkciju $x(t) : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ su (tzv. Dirichletovi uvjeti):

- i) postoji konačan skup $A \subset [-\pi, \pi]$ tako da je $x(t)$ neprekidna u svakoj tački skupa $[-\pi, \pi] \setminus A$. Ukoliko je $A \neq \{\}$ onda u svakoj tački skupa A funkcija $x(t)$ ima skok prve vrste ;
- ii) Postoji podjela (subdivizija):

$$-\pi = x_0 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = \pi$$

segmenta $[-\pi, \pi]$ na konačno mnogo dijelova takva da je $x(t)$ monotona na svakom od segmenata $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$).

Definicija 1.2. Ukoliko postoji Fourierov integral dat relacijom:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad (1.23)$$

onda ovu funkciju nazivamo inverzna Fourierova transformacija funkcije $X(f)$ i možemo pisati kraće

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} \quad (1.24)$$

Značenje Fourierove transformacije je višestruko i ovisi od primjene. Česta je primjena kada se funkcija – signal, koja je definirana na cijelom realnom pravcu, pretvara u funkciju koja za određenu frekvenciju f vraća $X(f)$, vrijednost iz koje možemo saznati informacije o amplitudi i fazi za frekvenciju f . Mnogo je operacija lakše obaviti preko Fourierove transformacije funkcije, među kojima je najbitnija konvolucija. Jednako tako Fourierova transformacija ima puno svojstava koja olakšavaju analiziranje funkcije – signala.

1.7 Fourierova transformacija diskretnog signala (DTFT)

DTFT (eng. *Discrete-time Fourier Transform*) ili Fourierova transformacija diskretnog signala je kompleksna funkcija učestanosti ω . Fourierova transformacija diskretnog signala $x[n]$ ima oblik [5]:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (1.25)$$

dok je inverzan oblik:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega \quad (1.26)$$

Što se označava na sljedeći način:

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) \text{ ili } x[n] \xleftrightarrow{F.T} X(e^{j\omega}) \quad (1.27)$$

DTFT je specijalan slučaj z-transformacije za $z = e^{j\omega}$, odnosno, Fourierova transformacija diskretnog signala

identična je z-transformaciji izračunatoj u tačkama koje leže na jediničnom krugu kompleksne z-ravni za $z = e^{j\omega}$ i $0 \leq \omega < 2\pi$.

Ako suma u gornjoj relaciji ima konačnu vrijednost može se izračunati $X(e^{j\omega})$ i kaže se da Fourierova transformacija konvergira. Dovoljan uslov za konvergenciju se izvodi na sljedeći način:

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| |e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty \quad (1.28)$$

što znači da je niz čiji je zbir apsolutnih vrijednosti konačan ima Fourierovu transformaciju. Kako su stabilne sekvence apsolutno sumabilne, svaki stabilan sistem će imati konačnu Fourierovu transformaciju. Osim toga svaka sekvenca konačne dužine je apsolutno sumabilna, odakle slijedi da se implusni odziv sistema sa konačnim implusnim odzivom (eng. *Finite Impulse Response-FIR*) uvijek može predstaviti pomoću Fourierove transformacije, kao da je i FIR sistem uvijek stabilan. Takođe, postoje sekvence koje nisu apsolutno sumabilne, ali zadovoljavaju uslov kvadratne sumabilnosti:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < \infty \quad (1.29)$$

Za ovakve sekvence se može definisati transformacija preko granične vrijednosti, ako se ne zahtijeva uslov uniformne konvergencije. Često imamo slučaj da treba odrediti Fourierovu transformaciju sekvence koja nije ni apsolutno, ni kvadratno sumabilna. Generalizacijom koncepta Fourierove transformacije, koja se ogleda u činjenici da se dozvoljava diskretnost i u frekventnom domenu, može se odrediti i Fourierova transformacija i takvih sekvenci. Napomenimo još da se konvolucija u frekventnom domenu naziva još cirkularna ili periodična.

$$x[n] \cdot w[n] \xleftrightarrow{F.T.} X(e^{j\omega}) \otimes W(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) \quad (1.30)$$

pri čemu se do periodične konvolucije dolazi na sljedeći način:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)w(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \right] e^{-j\omega n} \quad (1.31)$$

Promjenom redoslijeda sumiranja i integracije dobije se:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n) e^{-j(\omega-\theta)n} \right] X(e^{j\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j(\omega-\theta)}) X(e^{j\theta}) d\theta = W(e^{j\omega}) \otimes X(e^{j\omega}) \quad (1.32)$$

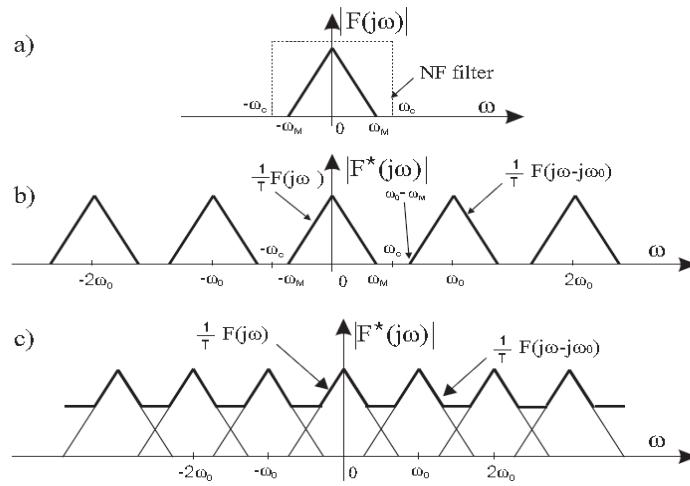
1.8 Teorema o uzorkovanju i aliasing

Osnovni problem rekonstrukcije signala je dobijanje originalnog signala iz uzorka i on prepostavlja da ulaz u sistem predstavljaju uzorci kontinualnog signala, a izlaz iz sistema je kontinualni signal. Pitanje koje se u

ovom slučaju postavlja je koliko često treba uzimati uzorke da bi sadržaj informacije koju nosi originalni kontinualni i uzorkovani signal bili ekvivalentni. Problem se rješava koristeći Fourierovu transformaciju uz određene uslove. Ako su ti uslovi zadovoljeni, moguće je rekonstruisati originalni signal iz uzorka. Međutim, takav pristup ne može biti primijenjen ni na jedan praktični sistem. Za praktičnu primjenu postoje određena ograničenja koja trebaju biti razmotrena. Neka je kontinualni signal $x(t)$ spektralno ograničen tj. neka ima spektar $X(j\omega)$ jednak nuli za $|\omega| > \omega_M$. Da bi se izbjeglo preklapanje između dva susjedna spektra zvjezdaste funkcije učestanost odabiranja uzorka, odnosno period mora zadovoljavati relaciju [5]:

$$\omega_0 \geq 2\omega_M \text{ ili } f_0 \geq 2f_M \text{ ili } T \leq \frac{\pi}{\omega_M} = \frac{1}{2f_M} \quad (1.33)$$

Ovaj uslov se naziva **Nyquistov uslov**. Njime je određeno maksimalno dozvoljeno vrijeme između uzimanja uzorka, odnosno minimalna frekvencija uzimanja uzorka. Nejednačina $T \leq \frac{\pi}{\omega_M}$ naziva se teorema o uzorkovanju (Nyquistova teorema, Shannonova teorema ili teorema Koteljnikova). Dakle, ako je $\omega_0 \geq 2\omega_M$, gdje je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, učestanost uzimanja uzorka, onda se signal $x(t)$ može jednoznačno rekonstruisati iz uzorka $x(kT)$, gdje je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Učestanost $2\omega_M$ naziva se Nyquistov opseg diskretizacije (eng. *Nyquist sampling rate*). Učestanost ω_M , koja odgovara polovini Nyquistovog opsega naziva se Nyquistova učestanost. Kolika će se izabrati učestanost uzorkovanja zavisi od primjene za koju se uzorkovanje koristi. Svrha uzorkovanja u obradi signala je digitalna obrada signala, a zatim rekonstrukcija originalnog signala iz uzorka. Prilikom obrade signala učestanost uzorkovanja zavisi i od osobina kontinualnog signala. Praktično, teorema o uzorkovanju se može shvatiti i ovako: ako se signal koji se uzorkuje sporo mijenja (npr. atmosferski pritisak ili temperature zraka) tada nema potrebe uzorkovati signal malim periodom diskretizacije (npr. jedna sekunda), jer je vremenska konstanta promjene ovakvih signala reda nekoliko sati. Međutim, ako se mjeri brzina kretanja vozila, očigledno da će period uzorkovanja od jedne sekunde možda biti i predug. Dakle, ako se signal brzo mijenja uzorka treba uzimati dovoljno brzo, a ako se mijenja sporo tada period diskretizacije može biti i duži. Brzina promjene signala je zapravo vezana za više frekvencije u spektru tog signala – signal koji ima bogat spektar na višim frekvencijama ima i velike brzine promjene. Prema tome, signal se mora uzorkovati barem dva puta brže nego što se mijenja. U nekim slučajevima uslov $\omega_0 \geq 2\omega_M$ je suviše strog. Npr. za uskopojasni signal koji ima nenulti spektar, a koji se često sreće u telekomunikacijama, minimalna učestanost uzorkovanja jednaka je dvostrukoj širini spektra kontinualnog signala, a ne dvostrukoj najvišoj učestanosti u spektru, odnosno $\omega_0 \geq 2(\omega_2 - \omega_1)$. Kod ovakog uzorkovanja treba obavezno provjeriti da ne dolazi do preklapanja spektra. Kako su skoro svi signali koji se koriste u praksi, vremenski ograničeni, tj. imaju konačno trajanje, onda njihov spektar ne može biti frekventno ograničen. Isto tako, ako je signal frekventno ograničen, onda je vremenski neograničen. Međutim, signal može biti istovremeno i vremenski i frekventno neograničen npr. povorka implusa perioda T , ima za Fourierovu transformaciju povorku implusa perioda $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Na sljedećim slikama su prikazani spektri diskretiziranog signala $F^*(j\omega)$, koji se sastoji od skaliranih replika signala $F(j\omega)$ za slučajeve kada je zadovoljen uslov $\omega_0 \geq 2\omega_M$ i kada je $\omega_0 < 2\omega_M$.

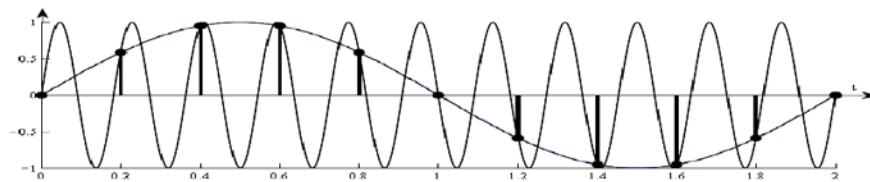


Slika 1.10. a) Spektar originalnog kontinualnog signala

b) Spektar diskretizirane funkcije ograničenog kontinualnog signala bez preklapanja spektra

c) Spektar diskretizirane funkcije ograničenog kontinualnog signala sa preklapanjem spektra

Posmatrajmo sinusni signal u kontinualnom vremenu $\sin(\omega t)$, koji je diskretiziran svakih T sekundi ($t = kT$). On kao takav daje diskretni signal, koji će biti jedinstven samo pod gore navedenim uslovima. Uzorci dvije ili više sinusoida u kontinualnom vremenu, različitih frekvencija, mogu generirati isti niz implusa u diskretnom vremenu, pa je nemoguće odrediti o kojoj se sinusoidi radi. Isto tako ukoliko se sinusoida diskretizira povorkom implusa čiji je period jednak periodu sinusoide, dobit će se niz istih uzoraka i biće nemoguće odrediti da li je originalni signal konstantan ili sinusoidalan. Kako je opseg u kome se vremenski signal mijenja direktno povezan s maksimalnom frekvencijom signala, treba naći vezu između Fourierove transformacije kontinualnog i diskretiziranog signala. Takođe, beskonačan broj kontinualnih signala može generirati isti niz implusa. Ovaj fenomen je poznat kao **aliasing** efekat, jer implicira da bilo koji diskretni sinusni signal ima bezbroj kontinualnih identiteta. Aliasing prouzrokuje zabunu u digitalnom procesiranju signala, što čini nemogućim rekonstrukciju originalnog signala iz uzoraka. Prema tome, aliasing je nepoželjan, a posljedica je nedovoljne frekvencije uzimanja uzoraka kontinualnog signala. Da bi se izbjegao, signal se mora na određeni način frekventno ograničiti tj. njegova Fourierova transformacija (spektar) mora biti nula van konačnog opsega učestanosti. Takođe, učestanost uzimanja uzoraka mora zadovoljavati gore navedeni Nyquistov kriterij $\omega_0 \geq 2\omega_M$. Ukoliko ova teorema nije ispoštovana, ne samo da će biti izgubljena informacija o signalu, nego će se dobiti pogrešna informacija o signalu. Za primjer sa slike 1.11. frekvencija diskretizacije ne smije biti manja od dvostruke frekvencije sinusoide, ili drugačije rečeno, diskretizirana sinusoida mora imati minimalno dva uzorka po periodu. Ako je frekvencija uzorkovanja (sampling rate) ispod ovog minimum spektar diskretiziranog signala će se sastojati od osnovnog i replika osnovnog spektra koji će biti prekopljeni, što znači da će se pojaviti pogrešan signal za sinusoidu na nižoj frekveniciji.



Slika 1.11. Aliasing efekat



Slika 1.12. Joseph Fourier (1768 – 1830)

Jean Baptiste Joseph Fourier je rođen marta 21., 1768. u Auxerre-u, Francuska. U ranoj dobi pokazao je interes za matematiku te je uspio da se probije među najpoznatije francuske, ali i svjetske matematičare i fizičare. Uveo je u analizu Fourierov red i Fourierov integral – prikaz funkcije u terminima trigonometrijskih funkcija. U Francuskoj akademiji nauka podnio je Memoar, čija će kasnije objavljena verzija u Parizu, a kasnije i u Čikagu, označiti prekretnicu u razvoju matematičke fizike i njene primjene u mnogim ostalim naučnim disciplinama. U tom radu, između ostalog, iznio je tvrdnju da se manje – više na konačnom intervalu proizvoljna funkcija može predstaviti kao suma linearne funkcije i reda sinusa oblika $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ – gdje je l dužina posmatranog intervala. Ta tvrdnja naišla je na opravданu sumnju akademika. Naime, u smislu obične konvergencije ili konvergencije po tačkama tvrdnja nije tačna ni za klasu neprekidnih funkcija, jer je 1876. godine Du Bois – Reymond konstruisao primjer funkcije čiji Fourierov red divergira u tački njene neprekidnosti. Klasa realnih funkcija za koje je program Fourierove teorije provodiv uveden je pet godina kasnije u radu C. Jordana: "Fourierov red analitičke funkcije konvergira svuda, a u slučaju neprekidne funkcije ta konvergencija je i uniformna". Tek 1900. godine Lebesgueovim

uvodenjem pojma mjere i integral dobijen je matematski alat primijeren potrebama Fourierove teorije. Fourier je svoja prva ispitivanja vršio na realnoj funkciji jedne realne promjenljive zadanoj oblikom:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4}, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Ova funkcija nije periodična, ali se može produžiti do periodičke funkcije ako se postavi da je $y(x + 2k\pi) \equiv y(x)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ona je po dijelovima neprekidna, a ima prvi izvod $y'(x) = 0$, u svim tačkama osim u tačkama $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$. Fourierov red ove funkcije je red kosinusa $y(x) = \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \dots$, koji konvergira i predstavlja tu funkciju u svakoj od tačaka njene neprekidnosti, a u tačkama prekida je:

$$y\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\frac{\pi}{4}, \quad y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

Problematika sa Fourierovim redovima i integralima je jako opširna i mnogi odgovori na pojedina pitanja nisu još uvijek pronađeni.

2 Analiza prozorskih funkcija

2.1 Pojam prozorske funkcije i curenja spektra

Vremenski kontinualni sistemi općenito imaju implusne odzive beskonačno dugog trajanja. Implusni odziv se prvo diskretizuje, a zatim mu se ograniči trajanje (eng. *truncation*). Ovakvo ograničavanje implusnog odziva u frekventnom domenu se manifestira oscilacijama, što je poznato kao Gibbsov efekat. Efikasan način smanjenje oscilacija jeste iskoristiti konačnu sekvencu težinskih koeficijenata (prozor) $[\omega]$. Ograničavanje signala u vremenu ekvivalentno je prozoriranju signala. Signal u vremenu možemo ograničiti tako što ćemo ga pomnožiti sa nekom vremenski ograničenom funkcijom koju nazivamo prozorska funkcija. Kao što znamo, bilo kakvo množenje signala u vremenskom domenu je ekvivalentno konvoluciji u frekventnom domenu. Konvoluiranjem se širi i izobličava spektar orginalnog signala. Poslije množenja sa prozorskom funkcijom dolazimo do implusnog odziva konačnog trajanja [9]:

$$h_w[n] = h[n]w[n] \quad (2.1)$$

pri čemu je $w[n] = 0$, za $n < 0$ i $n > M$, $M \in \mathbb{N}$, dok u frekventnom domenu imamo $H_w(f) = H(f) \otimes W(f)$

Dakle, analizirati će se prozorske funkcije dužine $L = M + 1$. Ovo dovodi do pojave curenja spektra (eng. *leakage*), što se može desiti i računanjem FFT aperiodičkog signala. Bočni lukovi dovode do curenja spektra. Prethodna pojava uzrokuje *razljevanje* energije signala u širokom opsegu frekvencija. Umjesto pojedinačnih spektralnih komponenti u spektru se pojavljuju glavni luk (eng. *main lobe*) i bočni lukovi (eng. *side lobes*). U radu će biti analizirane prozorske funkcije dužine $L = 64$, tj. za $M = 63$, u slučaju drugačije dužine to će biti obavezno naglašeno. Prozorske funkcije se sada biraju da umanjuju efekat distorzije. Poželjne karakteristike prozora su:

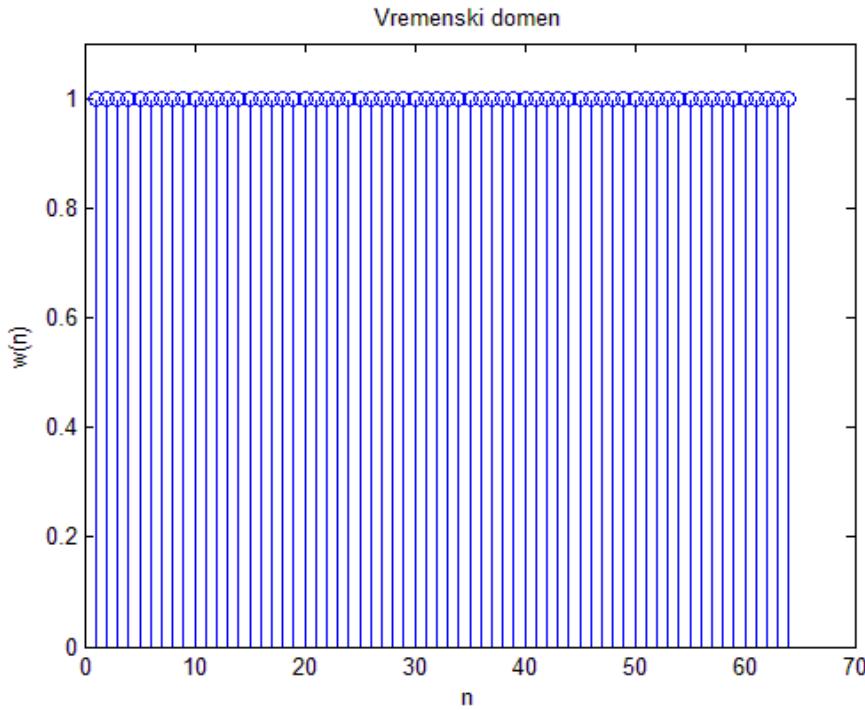
1. Suziti glavni luk frekventnog odziva u kojem je koncentrisana najveća energija.
2. Osigurati da bočni lukovi u spektru prozora imaju što veće slabljenje.

Drugim riječima kazano karakteristike prozora nam olakšavaju detektovanje centralne frekvencije ili amplitude na odgovarajućoj frekvenciji. S aspekta Fourierove analize gornja dva zahtjeva su u konfliktu. U zavisnosti šta određujemo odabraćemo odgovarajuću prozorskiju funkciju. Tako npr. ako prozorska funkcija osigurava gladak završetak prozora dolazi do potiskivanja bočnih lukova, ali i širenja glavnog luka. Postoje prozorske funkcije kod kojih je potiskivanje bočnih lukova skoro 100 dB, pri čemu će se gledati potiskivanje u odnosu na normalizovani glavni luk. Postoji mnogo prozorskih funkcija u ovom radu će biti obrađene neke od njih kao što su: Pravougaona, Trougaona (Bartlettova), Hannova, Hammingova, Blackmanova, Kaiserova i Dolf-Čebiševljeva.

2.2 Pravougaona prozorska funkcija

Pravougaona prozorska funkcija, koja se još naziva *uniformna*, ili jednostavno *prozor* prikazana je na slici 2.1. i definiše se sljedećom relacijom [10]:

$$w[n] = 1, \quad 0 \leq n \leq M, \quad M \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$



Slika 2.1. Pravougaona prozorska funkcija u vremenskom domenu

Amplituda pravougaone prozorske funkcije se najčešće koristi kao mjerilo za izražavanje amplituda drugih prozorskih funkcija. Pravougoani prozor ne vrši nikakvu modifikaciju ulaznog signala, nego samo njegovo odsijecanje. Ona je značajna radi prikazivanja implusnih odziva u realnim sistemima. Tako recimo implusni odziv idealnog niskopropusnog filtra ima oblik:

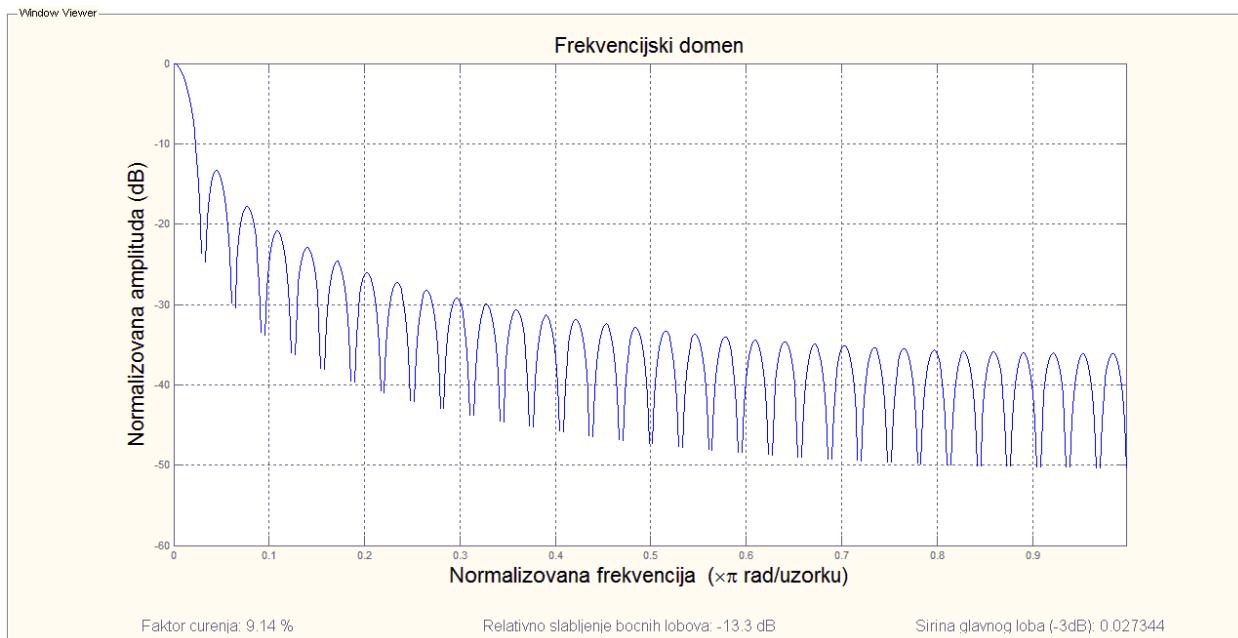
$$h_i(n) = \frac{\sin \omega n}{\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.3)$$

Množeći ovaj implusni odziv sa pravougonim prozorom dobijemo implusni odziv konačnog trajanja:

$$h[n] = h_i[n]w[n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (2.4)$$

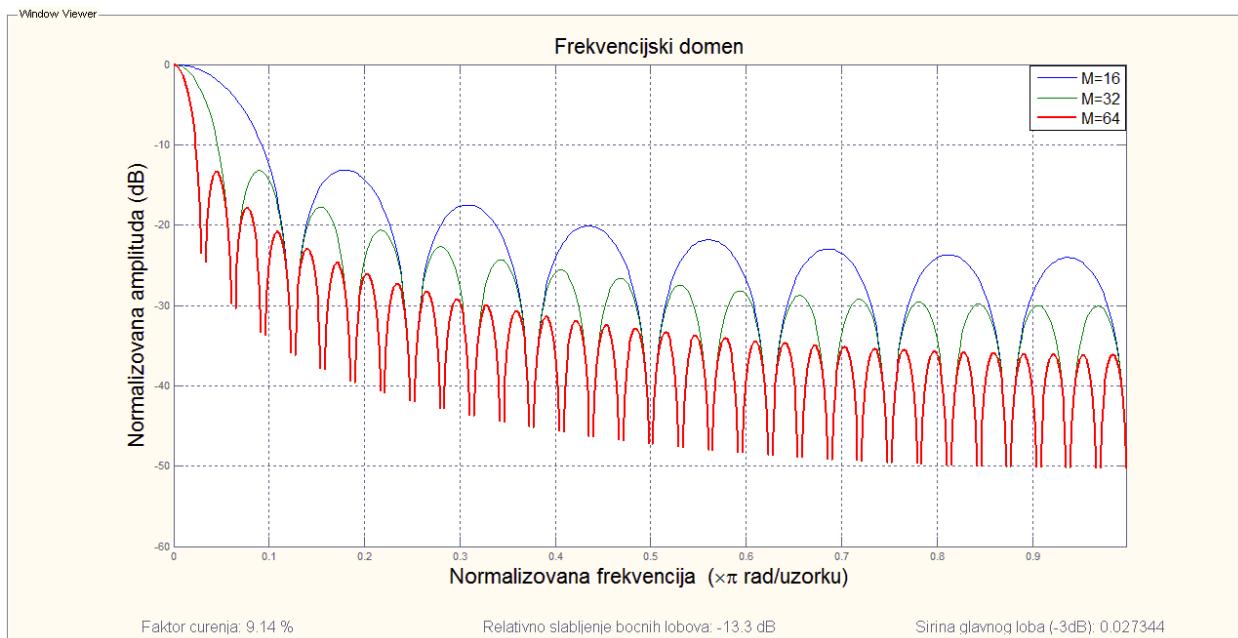
Koristeći definicioni izraz Fourierova transformacija diskretnog signala pravougaone prozorske funkcije je:

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega(M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega \frac{M}{2}} \frac{\sin \frac{\omega(M+1)}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad (2.5)$$



Slika 2.2. Spektar pravougaone prozorske funkcije

Spektar pravougaone prozorske funkcije ima linearnu faznu karakteristiku, a amplituda spektra pravougaone prozorske funkcije je $(\sin \omega(M + 1)/2)/(\sin \omega/2)$. Širina glavnog luka iznosi $4\pi/(M + 1)$. Osnovni nedostatak pravougaone prozorske funkcije je malo slabljenje bočnih lukova u amplitudskom spektru. Amplituda prvog bočnog luka iznosi 22% (-13 dB) od maksimalne amplitude glavnog luka. Takođe, bočni lukovi opadaju s nagibom od -6 dB/oktavi . Kada se formira konvolucija u spektalnom domenu između spektra $W(e^{j\omega})$ i ulaznog signala, zbog postojanja jakih bočnih lukova nastaje značajna modifikacija spektra ulaznog signala. Zbog ovakvih karakteristika pravougaone prozorske funkcije, direktna primjena DFT na ulazni signal onemogućava detekciju niskofrekvenčnog signala u prisustvu visokofrekvenčnog signala. Velika amplituda bočnih lukova u spektru pravougaone prozorske funkcije je posljedica diskontinuiteta sekvence $w[n]$. Poznato je da sekvence koje imaju manje bočne lukove u spektru nemaju diskontinuitete u vremenskom domenu [10]. Sve dobre prozorske funkcije imaju blag prijelaz od centra funkcije prema krajevima. Neke karakteristike pravougaonog prozora se mogu poboljšati povećanjem dužine M i tada se povećava amplituda bočnih lukova, dok se širina bočnih lukova smanjuje, ali pri tome površina ispod njih ostaje nepromijenjena. Ovo se može najbolje vidjeti na slici 2.3.



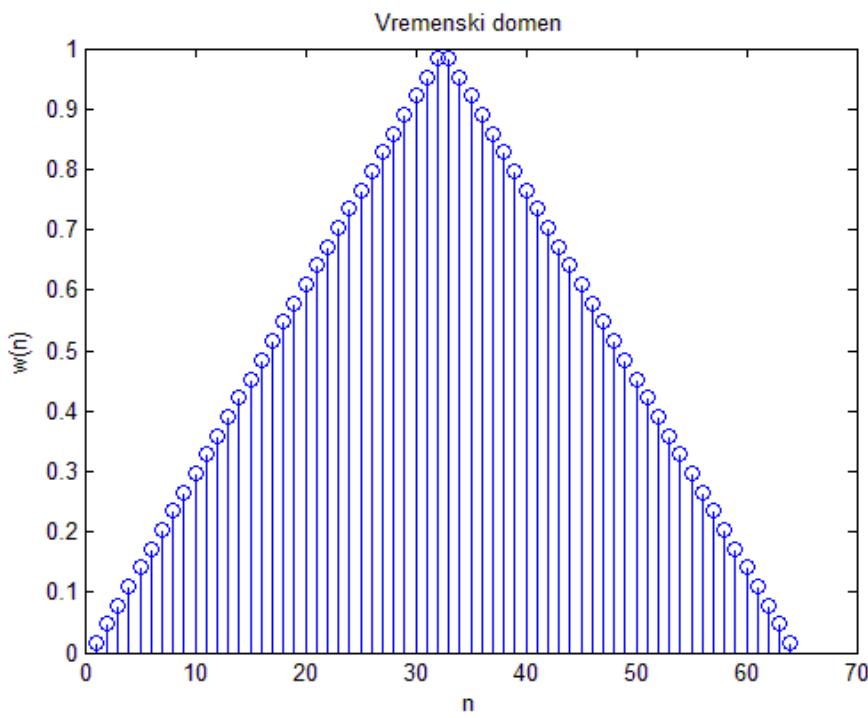
Slika 2.3. Poređenje spektara za različite dužine prozora

2.3 Bartlettova (trougaona) prozorska funkcija

Trougaona (Bartlettova) prozorska funkcija je jedna od mnogih koje smanjuju efekat curenja spektra. Slabljenje u nepropusnom opsegu ovog prozora je veće nego kod pravougaone prozorske funkcije, ali je selektivnost manja. Naime, filteri dizajnirani pomoću ovog prozora imaju veće prijelazno područje nego oni koji su dizajnirani pomoću pravougaonog prozora. Trougaoni prozor se može predstaviti sa [11]:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{M}; & 0 \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 2 - \frac{2n}{M}; & \frac{M+1}{2} < n \leq M \end{cases} \quad (2.6)$$

U opisanom slučaju trougaona prozorska funkcija je simetrična, a u nizu joj nedostaje posljednja tačka. Vremenski oblik prozora je prikazan na slici 2.4.

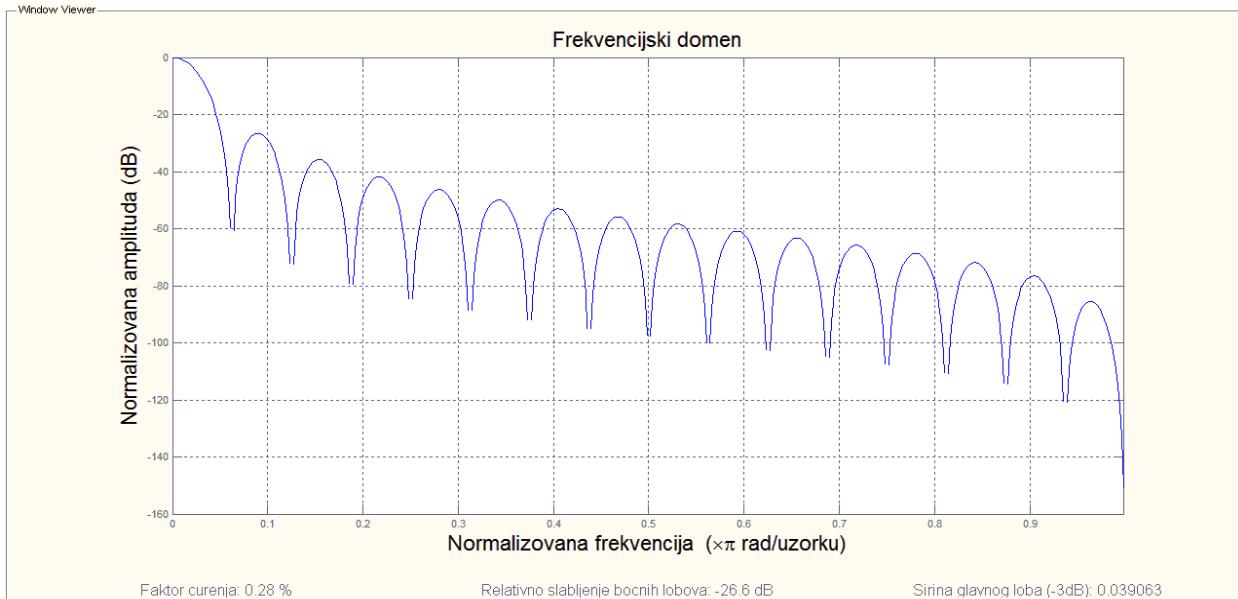


Slika 2.4. Vremenski oblik trougaonog prozora

Spektar trougaone prozorske funkcije dobijemo primjenom Fourierove transformacije na 2.6.,

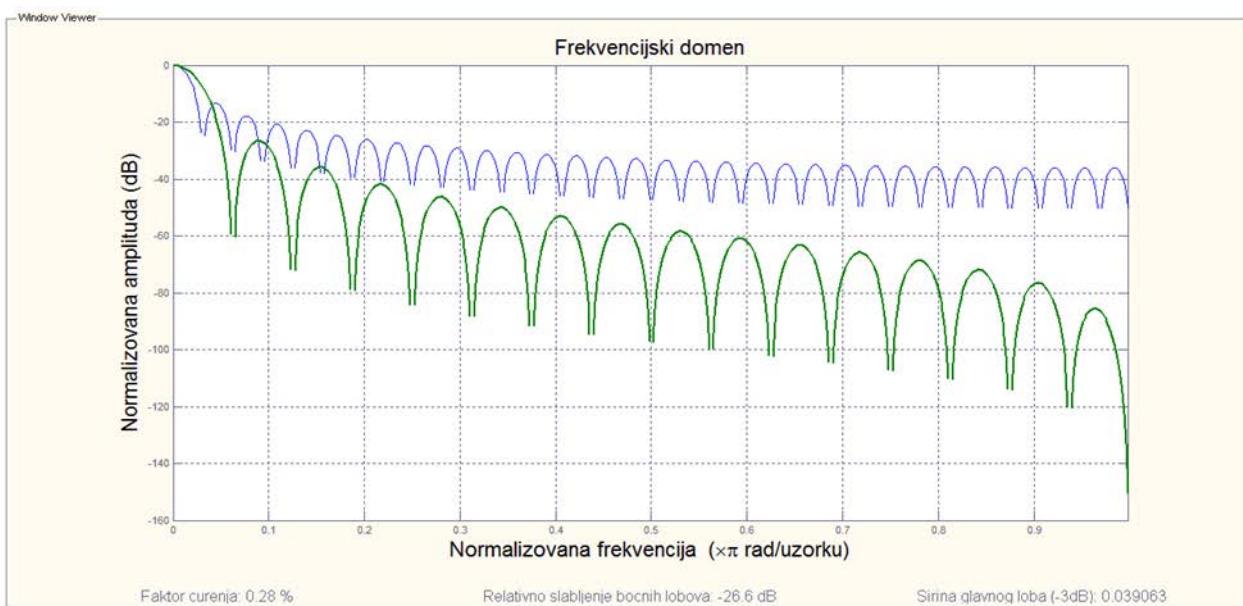
$$W(e^{j\omega}) = \frac{2}{M+1} \left[\frac{\sin \frac{\omega(M+1)}{4}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right]^2 e^{-j\omega(\frac{M+1}{2}-1)} \quad (2.7)$$

odnosno, amplitudski spektar trougaone prozorske funkcije predstavlja kvadrat amplitudskog spektra pravougaonog prozora. Ovo je bilo očekivano, jer se trougaona prozorska funkcija može predstaviti kao konvolucija dva pravougaona prozora. Kvadrat se pojavljuje, jer konvolucija u vremenskom domenu odgovara množenju u frekvencijskom domenu. Odgovarajući spektar je prikazan na slici 2.5.



Slika 2.5. Spektar trougaone prozorske funkcije

Faktor curenja iznosi 0.28%. Maksimalna amplituda bočnih lukova iznosi -26 dB ispod glavnog luka, dok je širina glavnog luka 0.039063 i udvostručena je u odnosu na pravougaoni prozor. Bočni lukovi opadaju sa -12 dB/oktavi . Uporedni spektri pravougaonog i trougaonog prozora su dati na slici 2.6.



Slika 2.6. Spektar pravougaone i trougaone prozorske funkcije

2.4 Hannova prozorska funkcija

Da bi se smanjili bočni lukovi potrebno je napraviti blag prijelaz na krajevima prozorske funkcije. To se može postići korištenjem kosinusnih (sinusnih) funkcija oblika $\cos^\alpha x$ ili $\sin^\alpha x$. Razlika između prozorskih funkcija kosinusnog i sinusnog tipa je u vremenskom pomjeraju za polovinu dužine sekvene i u tome što je sinusna funkcija simetrična u odnosu na koordinatni početak. Prema tome, za primjenu u spektralnoj analizi pomoću DFT pogodniji je sinusni oblik funkcije:

$$w[n] = \sin^\alpha \left(\frac{n\pi}{M} \right), \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (2.8)$$

gdje slobodni parametar α ima vrijednost $1 \leq \alpha \leq 4$.

Najčešća vrijednost parametra u jednačini (2.10) je $\alpha = 2$. Tada se dobiva *Hannova prozorska funkcija* koja je dobila naziv po austrijskom meteorologu Hanu (Julius von Hann). Ova prozorska funkcija se sreće pod nazivima *kvadratni kosinus*, *podignuti kosinus* ili *Hanning prozorska funkcija*. Njen oblik je:

$$w[n] = \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)}{2}, \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (2.9)$$

Množenje uzorkovanog signala sa Hannovim prozorom može se tumačiti i kao dodavanje originalnom signalu, koji je skaliran sa $\frac{1}{2}$, dva skalirana i frekvencijski pomjerena signala kako slijedi:

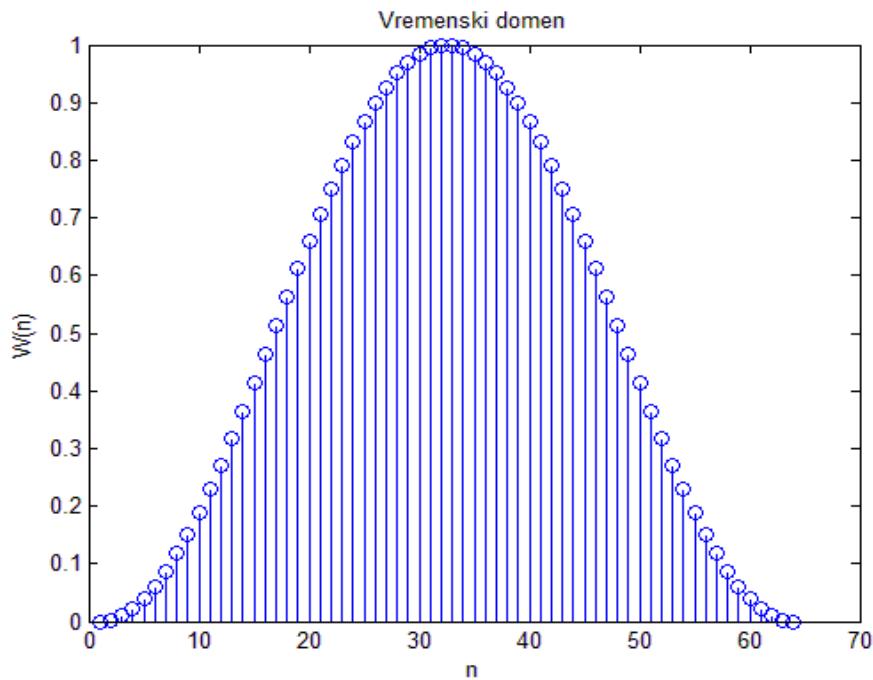
$$x[n] \cdot w[n] = \frac{x[n]}{2} - \frac{x[n]}{4} e^{j2\pi\frac{n}{M}} - \frac{x[n]}{4} e^{-j2\pi\frac{n}{M}} \quad (2.10)$$

$$\text{pošto je: } \cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \quad (2.11)$$

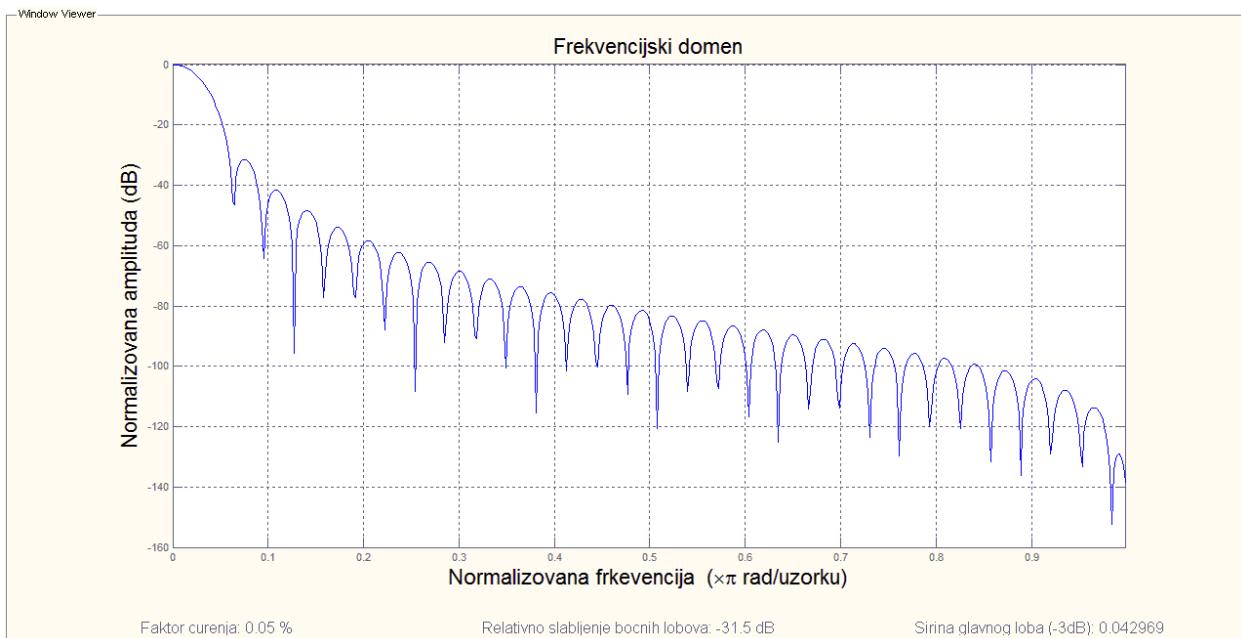
U frekvencijskom domenu ovo je ekivalentno cirkularnoj konvoluciji DFT-a originalnog signala duž sekvene $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$. Zadani prozor je jednostavan za razumjeti, budući da se na originalnu verziju signala dodaju dvije skalirane, frekvencijski pomaknute i linearno frekventno modulisane verzije tog istog signala. Spektar Hannovog prozora ima analitički oblik:

$$W(e^{j\omega}) = 0.5W_R(e^{j\omega}) - 0.25 \left[W_R\left(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{M})}\right) + W_R\left(e^{j(\omega + \frac{2\pi}{M})}\right) \right] \quad (2.12)$$

Iz izraza za Hannovu prozorsku funkciju (2.9) se vidi da je $w[n] = 0$ na krajevima intervala, tj. Hannova prozorska funkcija nema diskontinuiteta. Amplituda najvećeg bočnog luka je potisnuta za -32 dB u odnosu na maksimalnu amplitudu glavnog luka. Širina glavnog luka iznosi $8\pi/(M+1)$. Zbog glatkog prelaza sa nenultih na nulte vrijednosti spektar ima znatno manje bočne lukove koji opadaju sa $-18 \text{ dB}/\text{oktavi}$. Hannova prozorska funkcija i njen spektar su prikazani na slici 2.7. i 2.8.



Slika 2.7. Hannova prozorska funkcija u vremenskom domenu



Slika 2.8. Spektar Hannove prozorske funkcije

Hannova prozorska funkcija ima vrlo interesatnu interpretaciju u frekvencijskom domenu. Kao što je navedeno, iz izraza (2.12) se vidi da spektar Hannove prozorske funkcije predstavlja superpoziciju spektra pravougaonog prozora pomnoženog sa 0.5, i spektara pravougaonih prozora pomjerenih za $\pm 2\pi/M$ i pomnoženih sa -0.25. Interesantno je da se maksimumi pomjerenih spektara nalaze na mjestima gdje centralni spektar ima nule. Ovakvo sumiranje tri spektra ima za cilj da smanji amplitudu prvog bočnog luka. Međutim, ova spektralna interpretacija ima vrlo složenu praktičnu primjenu. Naime, kada se određuje DFT, iz spektra $W(e^{j\omega})$ uzimaju se odabirici sa razmakom $2\pi/M$, odnosno, tačno na mjestima gdje se nalaze nule spektra $W_R(e^{j\omega})$. Dakle, u rezultantnom spektru postoje samo tri nenulta odabirka na pozicijama $-2\pi/M$, 0 i $2\pi/M$, odnosno, na mjestima gdje se nalaze centralni uzorci tri spektra koji ulaze u superpoziciju. Direktna primjena uočene pojave omogućava da se množenje u vremenskom domenu sa Hannovom prozorskom funkcijom zamjeni superpozicijom spektara u frekvencijskom domenu. Dakle, spektar signala ograničenog Hannovim prozorom $Y[k]$ dobija se ako se nađe spektar signala bez množenja prozorskog funkcijom i primjeni formula (2.13):

$$Y[k] = \frac{1}{2} \left\{ X[k] - \frac{1}{2}(X[k-1] + X[k+1]) \right\} \quad (2.13)$$

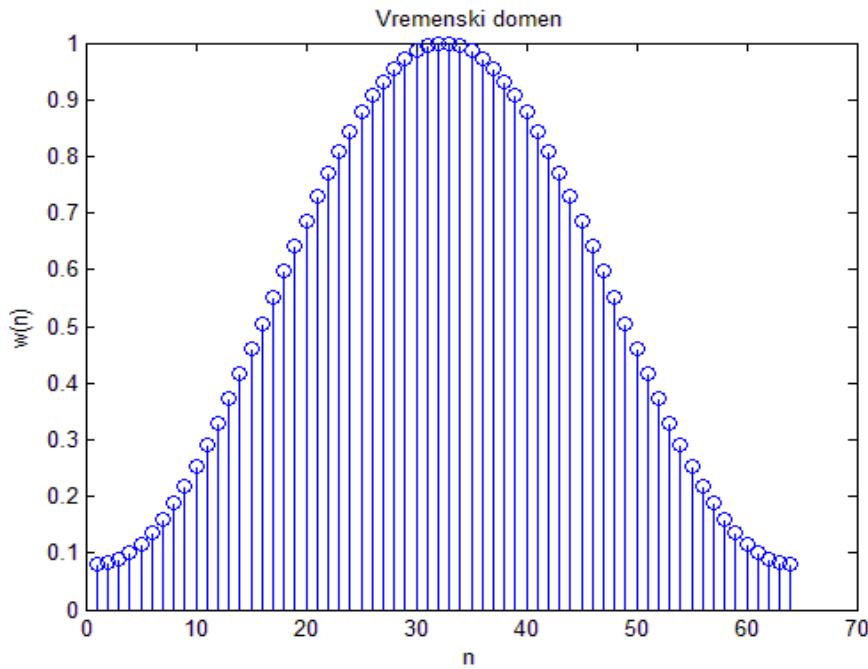
za svaki DFT odabirak. Kako se superpozicioni koeficijenti $\pm 1/2$ lahko realizuju pomjeranjem udesno, a ne množenjem, vidi se da se N realnih množenja u vremenskom domenu zamjenjuje sa $2N$ realnih sabiranja i $2N$ pomjeranja udesno u spektralnom domenu. Tako se smanjuje memoriski prostor, jer nije potrebno čuvati vrijednosti odabiraka prozorske funkcije. U nekom slučajevima izračunavanje spektra prema (2.13) može predstavljati značajno ubrzanje.

2.5 Hammingova prozorska funkcija

Hammingova prozorska funkcija (Raised Cosine Window) je poboljšana verzija Hannovog prozora. Ova funkcija je definisana kao:

$$w[n] = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M}, \quad 0 \leq n \leq M \quad (2.14)$$

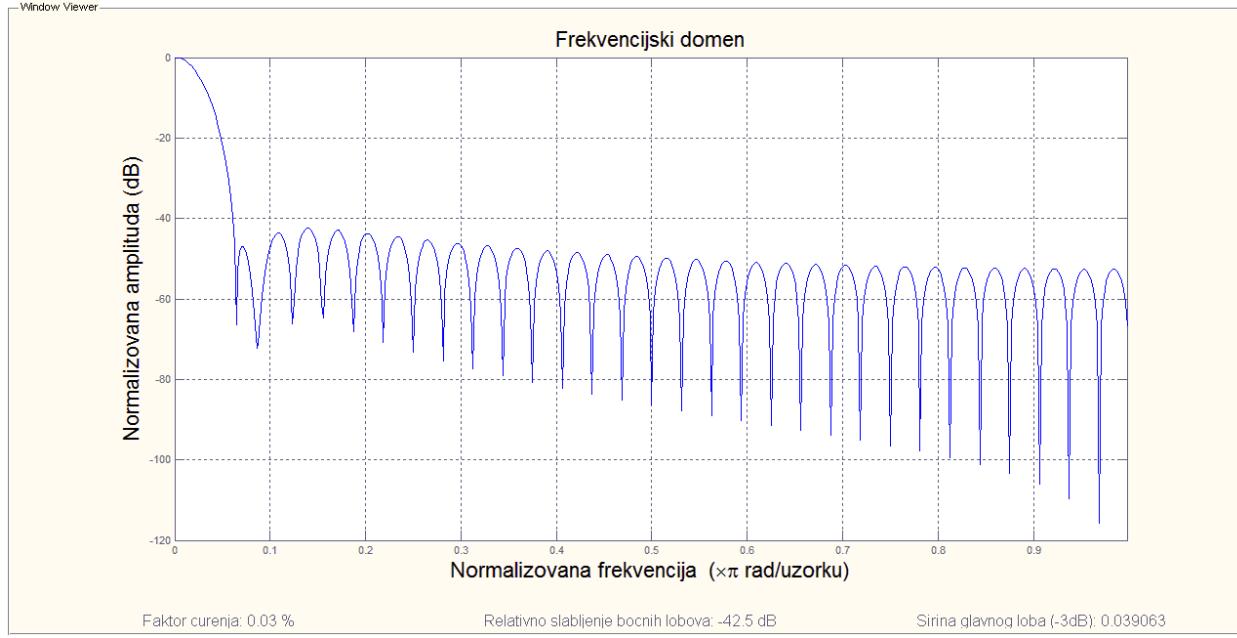
Uvrštavajući za $n = 0$ ili $n = M$ slijedi $w[0] = w[M] = 0.08$, što pokazuje da Hammingov prozor ima diskontinuitet na krajevima.



Slika 2.9. Hammingova prozorka funkcija u vremenskom domenu

Najefikasnija analiza prozorskih funkcija se vrši u frekventnom domenu. Analitički oblik spektara Hammingovog prozora je:

$$W(e^{j\omega}) = 0.54W_R(e^{j\omega}) - 0.23 \left[W_R\left(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{M})}\right) + W_R\left(e^{j(\omega+\frac{2\pi}{M})}\right) \right] \quad (2.15)$$



Slika 2.10. Spektar Hammingove prozorske funkcije

Propusni opseg Hammingove funkcije je dva puta veći u odnosu na pravougaonu prozorsku funkciju. Istovremeno Hammingova funkcija pokazuje jače slabljenje izvan propusnog opsega. Takođe se može pokazati da ovo slabljenje ne zavisi od dužine prozorske funkcije M . S druge strane, povećavanje dužine M ima za posljedicu smanjenje propusnog opsega. Ako je M suviše malo npr. reda dužine *pitch* perioda (perioda glasa) ili kraće, kratkotrajna energija, koja je karakteristika govornog signala, će značajno oscilovati zavisno od pojedinih sitnih oscilacija u vremenskom obliku signala. Ako je pak M suviše veliko, reda veličine nekoliko *pitch* perioda, kratkotrajna energija će biti suviše spora i ona neće nositi informacije o značajnim promjenama oblika signala. U relaciji (2.14) za vremenski oblik Hammingovog prozora koeficijent 0.54 obezbjeđuje energiju glavnog luka od 99.96% ukupne energije prozora. Maksimalna amplituda bočnih lukova je -43 dB u odnosu na maksimalnu amplitudu glavnog luka. Zbog toga što kod Hammingovog prozora postoji diskontinuitet na krajevima od 0.08 bočni lukovi opadaju samo sa $-6\text{ dB}/\text{oktavi}$. Napomenimo još da je često korišten i Hammingov prozor:

$$w[n] = 0.54 + 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M}, \quad -\frac{M-1}{2} \leq n \leq \frac{M-1}{2} \quad (2.16)$$

kod koga je spektar u analitičkom obliku:

$$W(e^{j\omega}) = 0.54W_R(e^{j\omega}) + 0.23 \left[W_R \left(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{M})} \right) + W_R \left(e^{j(\omega + \frac{2\pi}{M})} \right) \right] \quad (2.17)$$

2.6 Blackmanova prozorska funkcija

Blackmanov prozor zajedno sa pravougaonim, Hammingovim i Hannovim prozorom se naziva generalizirani kosinusni prozor. Blackmanov prozor je definisan [12]:

$$w[n] = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{M} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{M}, \quad 0 \leq n \leq M \quad (2.18)$$

Spomenuta sva četiri prozora (2.2), (2.6), (2.8) i (2.14) se mogu predstaviti u sljedećem obliku:

$$w[n] = a_0 - a_1 \cos \frac{2\pi n}{M} + a_2 \cos \frac{4\pi n}{M}, \quad 0 \leq n \leq M \quad (2.19)$$

Svaki od pomenutih prozora je samo specijalan slučaj relacije (2.19) sa drugačijim koeficijentima a_0 , a_1 i a_2 , koji su dati u Tabeli 2.1.

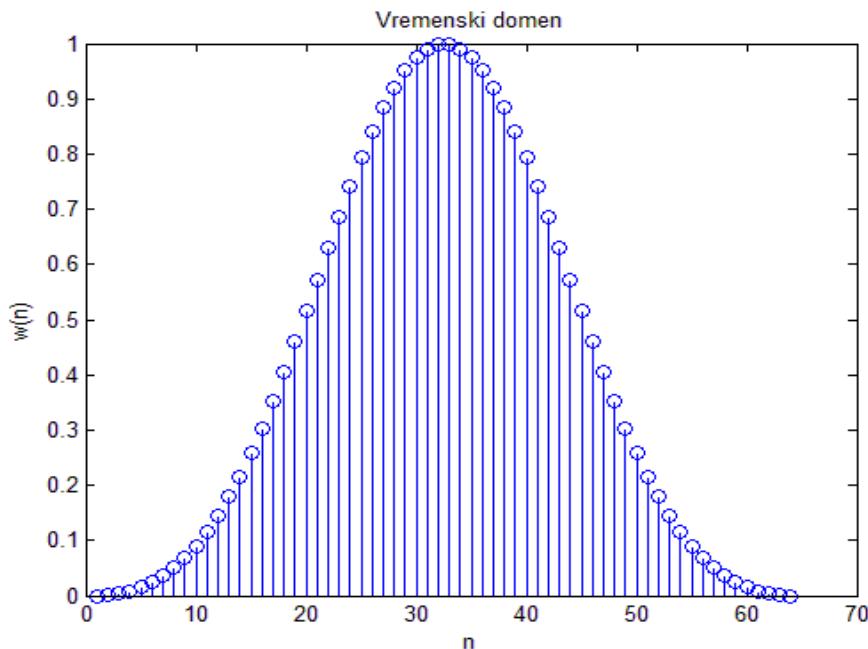
Tabela 2.1. Koeficijenti generaliziranih kosinusnih prozora

Tip Prozora	a_0	a_1	a_2
Pravougli	1	0	0
Hammingov	0.54	0.46	0
Hannov	0.5	0.5	0
Blackmanov	0.42	0.5	0.08

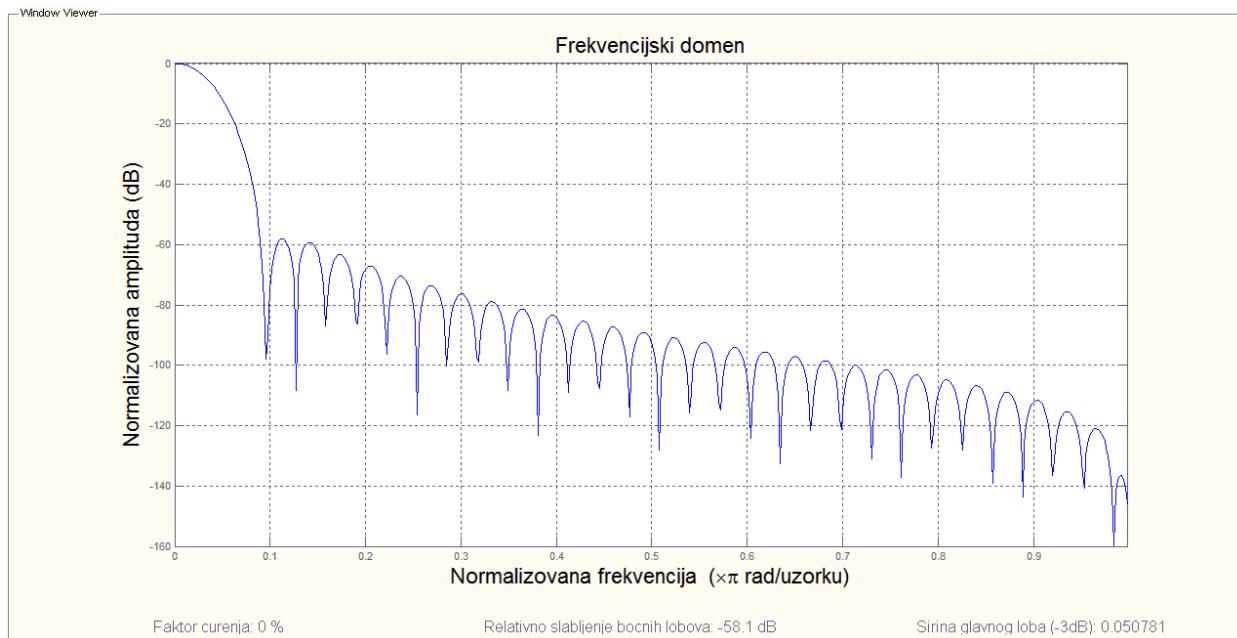
Za razliku od Hammingovog, Blackmanov posjeduje još jedan član dvostruko veće frekvencije. Analitički oblik Blackmanovog spektra je dat [12]:

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M (-1)^k \frac{a_k}{2} \left[W_R \left(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{M})} \right) + W_R \left(e^{j(\omega + \frac{2\pi}{M})} \right) \right] \quad (2.20)$$

Maksimalna amplituda bočnih lukova iznosi $-58 dB$ u odnosu na maksimalnu amplitudu glavnog luka, a bočni lukovi opadaju sa $-18 dB/oktavi$, što je postignuto na račun povećanja širine glavnog luka $12\pi/(M + 1)$. Ukoliko se koeficijenti odrede optimizacionim postupkom, dobivaju se još bolji rezultati.

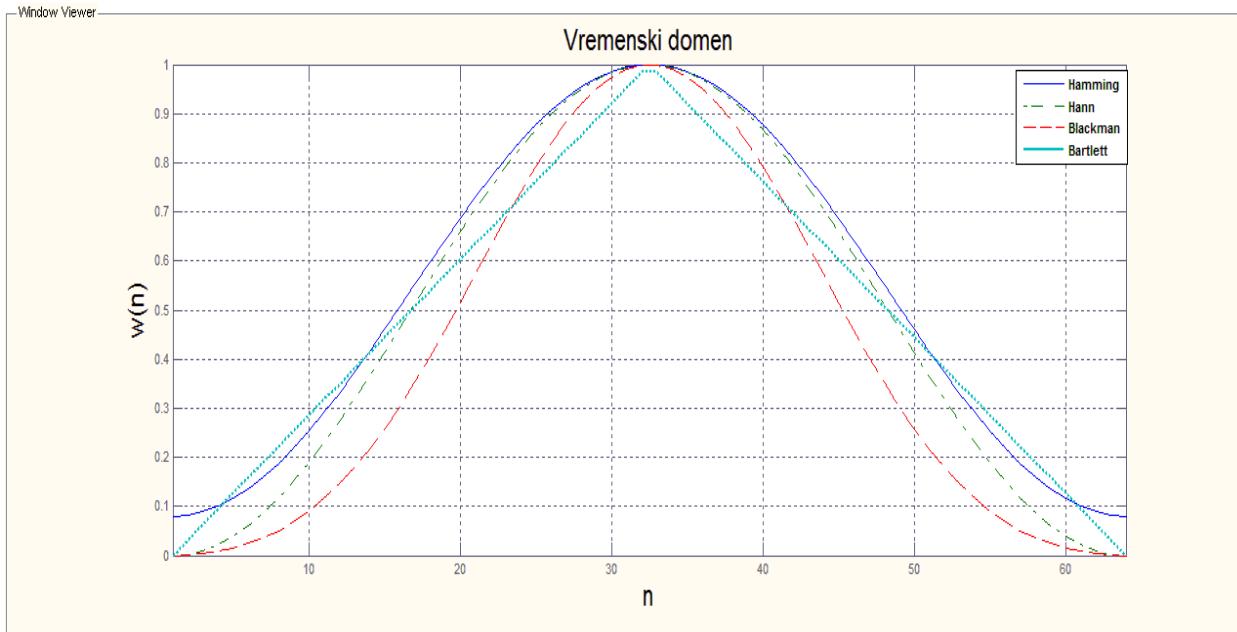


Slika 2.11. Blackmanova prozorska funkcija u vremenskom domenu



Slika 2.12. Spektar Blackmanove prozorske funkcije

Po konvenciji, svi prozori se crtaju kao kontinualne funkcije, iako je svaki od prozora definiran kao sekvenca, za cijelobrojno n . Na sljedećoj slici je prikazano uporedno pet prozora: pravougaoni, trougaoni (Bartlettov), Hannov, Hammingov i Blackmanov prozor.



Slika 2.13. Vremenski oblik pravougaone, Hammingove, Hannove Bartlettove i Blackmanove prozorske funkcije

Poređenjem spektara pojedinih prozora može se vidjeti da su zahtjevi za što uži glavni luk i što manju amplitudu bočnih luka međusobno suprostavljeni, i da različiti prozori predstavljaju različit kompromis između njih. Pravougaoni prozor ima najuži glavni luk širine $4\pi/(M + 1)$, što za dato M daje najuži prelazni opseg između propusnog i nepropusnog opsega filtra. Zato je prvi bočni luk oslabljen samo za 13 dB . Bartletov, Hannov i Hammingov prozor imaju širinu glavnog luka u spektru od $8\pi/(M + 1)$, a relativnu amplitudu prvog bočnog luka od 26 dB , 32 dB i 43 dB . To znači da se korištenjem ovih filtera dobiva manja selektivnost, ali bolje ponašanje u nepropusnom opsegu. Konačno, kao druga krajnost Blackmanov prozor ima širinu glavnog luka od $12\pi/(M + 1)$, dok je prvi bočni luk 58 dB ispod glavnog luka. Izbor pravog prozora u procesu projektovanja filtra zavisi od postavljenih zahtjeva za selektivnost koju filter treba da ostvari za datu dužinu implusnog odziva, te se neki definitivni zaključci o dobrim i lošim prozorima ne mogu dati. Ipak, ako ovi zahtjevi nisu striktno definirani, često se koristi Hammingov prozor kao kompromisno rješenje. U Tabeli 2.2. date su uporedno najvažnije karakteristike razmatranih prozora u frekvencijskom domenu, kao i minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu filtra projektovanog pomoću odgovarajućeg prozora.

Tabela 2.2 Karakteristike standardnih prozora

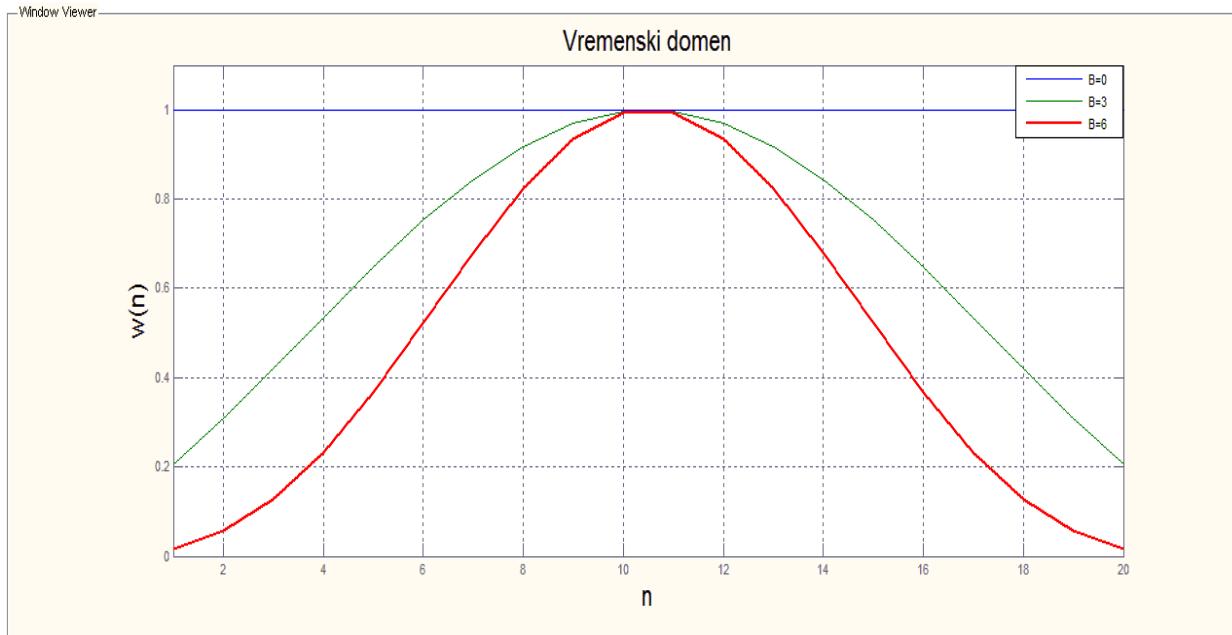
Prozor	Slabljenje prvog bočnog luka dB	Prijelazna zona glavnog luka	Min. slabljenje filtra, nepropusni opseg $20\log\delta \text{ dB}$
Pravougaoni	-13	$4\pi/(M + 1)$	-21
Bartlett	-26	$8\pi/(M + 1)$	-26
Hann	-32	$8\pi/(M + 1)$	-44
Hamming	-43	$8\pi/(M + 1)$	-53
Blackman	-58	$12\pi/(M + 1)$	-74

2.7 Kaiserova prozorska funkcija

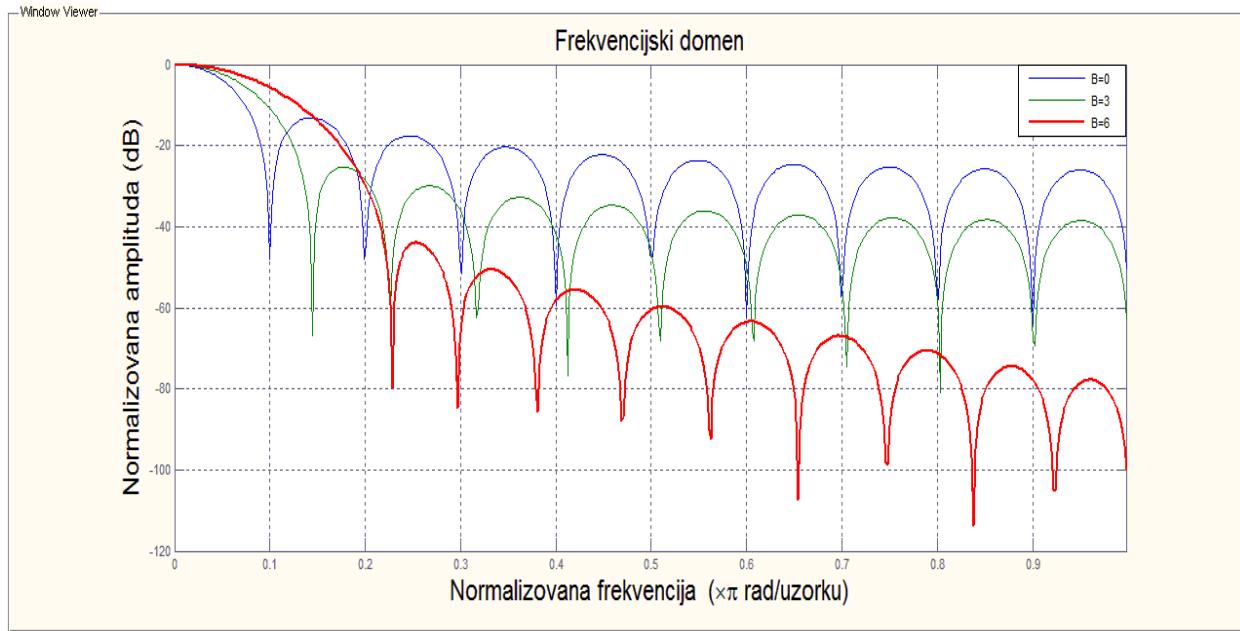
Zadovoljenje zahtjeva da glavni luk bude što uži, a da slabljenje prvog bočnog luka bude što veće se može riješiti korištenjem sferoidnih talasnih funkcija, koje su složene za izračunavanje, te nisu našle široku primjenu u realizaciji FIR filtera. Ipak Kaiser je 1966. godine otkrio da skoro optimalni prozor može biti oblikovan korištenjem modifikovane Besselove funkcije prve vrste koja je dosta lakša za izračunavanje od pomenutih sferoidnih talasnih funkcija. Kaiserova prozorska funkcija je definisana prema [13]:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0\left[\beta\left(1 - \left(\frac{n-\alpha}{\alpha}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{inac}e \end{cases} \quad (2.21)$$

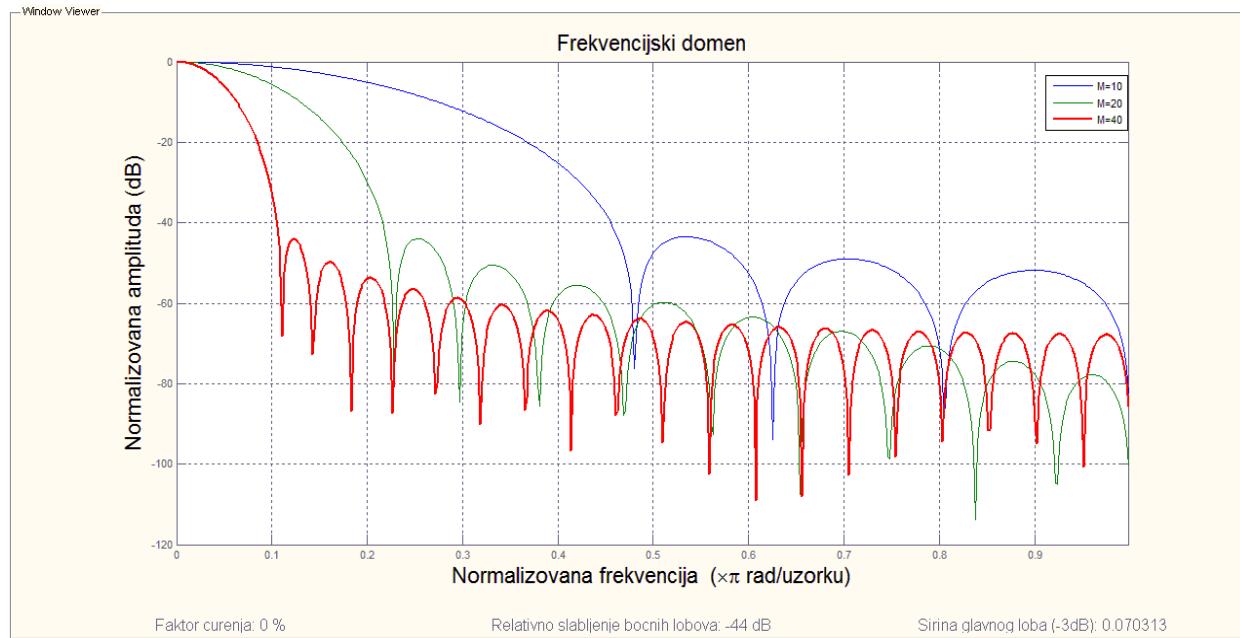
gdje je $\alpha = M/2$, a $I_0(\cdot)$ predstavlja modifikovanu Besselovu funkciju prve vrste nultog reda. Kao što se može primijetiti iz (2.21) Kaiserova prozorska funkcija ima dva parametra, faktor oblika β i dužinu M kojima se može praviti kompromis između širine prijelaznog opsega i slabljenja u nepropusnom opsegu. Na slici 2.14 su prikazani vremenski oblici Kaiserove prozorske funkcije dužine 21 uzorak ($M = 20$), za različite vrijednosti parametra β . Primijetimo da se, ukoliko je $\beta = 0$, Kaiserova prozorska funkcija svodi na pravougaoni prozor iste dužine. Na slici 2.15. su prikazane normalizovane amplitudne karakteristika prozora sa slike 2.14. Na slici 2.16. su prikazane amplitudske karakteristike Kaiserovih prozorskih funkcija za fiksni parametar $\beta = 6$ i tri različite dužine $M + 1$.



Slika 2.14. Vremenski oblik Kaiserove prozorske funkcije za različite vrijednosti parametra β



Slika 2.15. Frekvenčni oblik Kaiserove prozorske funkcije za različite vrijednosti parametra β



Slika 2.16. Amplitudske karakteristike Kaiserovih prozorskih funkcija različite dužine za $\beta = 6$

Sa slikama 2.14. – 2.16. je jasno da se zadovoljenje gore navedenih zahtjeva može postići pažljivim izborom parametara β i M . Ako je funkcija u vremenskom domenu više "zaobljena" (veće β), prvi bočni luk je više

oslabljen, ali je glavni luk širi. Međutim, na slici 2.16. se može vidjeti da povećanje dužine prozorske funkcije, za konstantnu vrijednost parametra β , uzrokuje sužavanje glavnog luka dok slabljenje prvog bočnog luka ostaje konstantno. U stvari, Kaiser je brojnim numeričkim eksperimentima došao do formula koje dozvoljavaju dizajneru filtra da unaprijed predviđe vrijednosti parametara β i M potrebnih da bi se zadovoljile specifikacije filtera. Kaiser je 1974. godine takođe otkrio, da u slučaju da su dozvoljene varijacije u propusnom i nepropusnom opsegu iste amplitudne δ (eng. *ripple*), dominantni uticaj na ovu vrijednost, u većini praktičnih slučajeva, ima parametar β . Pretpostavimo da je ova vrijednost δ unaprijed zadata tj. amplitudska karakteristika u propusnom opsegu treba da zadovolji uslov da je $1 - \delta \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta$, a u nepropusnom opsegu ($\omega \geq \omega_s$) treba da zadovolji uslov $|H(e^{j\omega})| \leq \delta$ i tada je prijelazna zona definisana sa:

$$\Delta \omega = \omega_s - \omega_p \quad (2.22)$$

za niskopropusni filter, a propusni opseg je definisan $\omega \leq \omega_p$. Ako se definiše:

$$A = -20 \log \delta \quad (2.23)$$

Kaiser je empirijski odredio da je, ako želimo zadovoljiti zadati uslov A , potrebno usvojiti β tako da važi:

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7) & A > 50 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), & 21 \leq A \leq 50 \\ 0, & A < 21 \end{cases} \quad (2.24)$$

Primijetimo da se, za $A < 21$ uslov (2.24) svodi na korištenje pravougaone prozorske funkcije. Osim toga da bi se postigle unaprijed zadate specifikacije za A i $\Delta \omega$, M mora zadovoljavati uslov:

$$M = \frac{A - 8}{2.285 \Delta \omega} \quad (2.25)$$

Jednačina (2.25) daje za izbor dužine prozorske funkcije vrijednosti u opsegu ± 2 za veoma širok raspon zadatih parametara A i $\Delta \omega$.

2.8 Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija

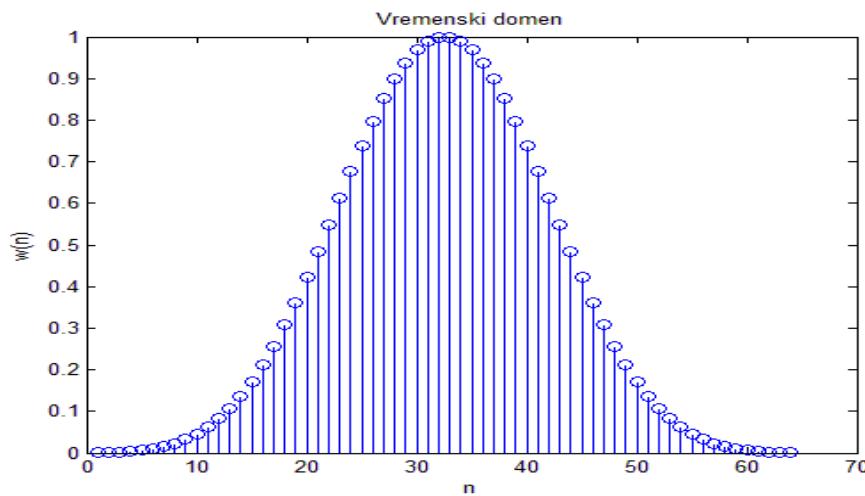
Problem određivanja optimalne prozorske funkcije može se matematički postaviti i na drugačiji način kao optimizacioni problem određivanja prozorske funkcije čiji glavni luk ima minimalnu širinu za zadato slabljenje bočnih lukova. Ovaj problem je poznat iz teorije antenskih nizova i njegovo rješenje u kontinualnom slučaju zahrjeva korišćenje Dirakovih impulsa. U slučaju diskretnih sistema postoji egzaktno rješenje u spektralnom domenu. Uzorci Dolf-Čebiševljeve (Dolph-Chebyshev) prozorske funkcije su dati:

$$W[k] = (-1)^k \frac{\cos \left\{ N \cos^{-1} [\beta \cos \left(\frac{\pi k}{M+1} \right)] \right\}}{\cosh[N \cosh^{-1}(\beta)]}, \quad k = 0, 1, \dots, M \quad (2.26)$$

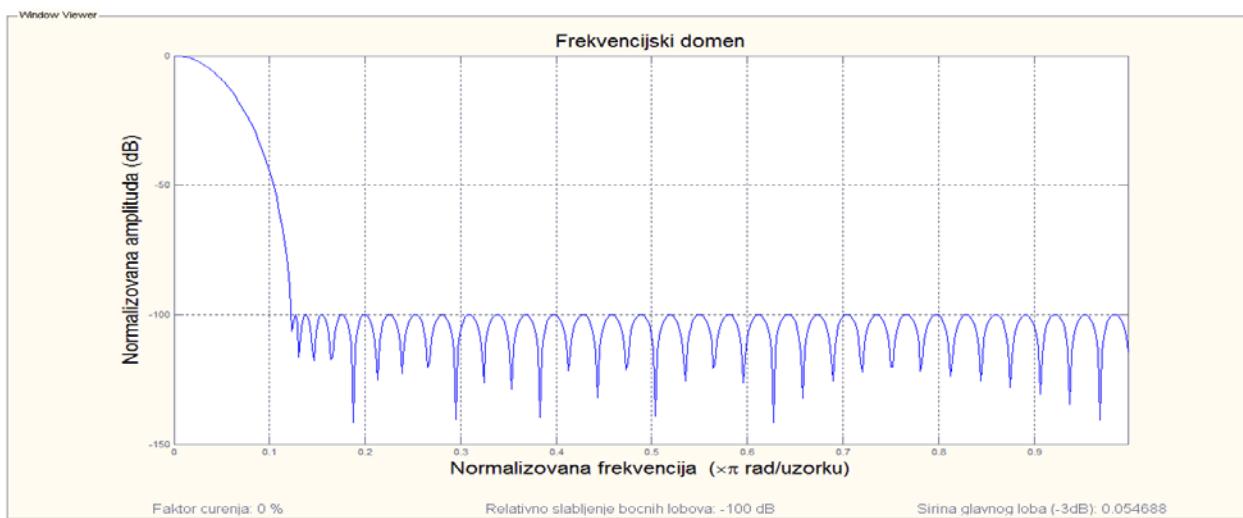
gdje je:

$$\beta = \cosh \left[\frac{1}{N} \cosh^{-1}(10^\alpha) \right] \quad (2.27)$$

a α predstavlja logaritam odnosa amplitude glavnog luka i jednakih amplituda bočnih lukova. Uzorci Dolf-Čebiševljeve prozorske funkcije u vremenskom domenu $w[n]$, se dobijaju primjenom inverzne DFT na uzorce $W[k]$ iz (2.26), poslije čega se vrši skaliranje da bi maksimalna amplituda bila jednaka jedan. Na slikama 2.17. i 2.18. prikazani su primjeri Dolf-Čebiševljeve prozorske funkcije [14].

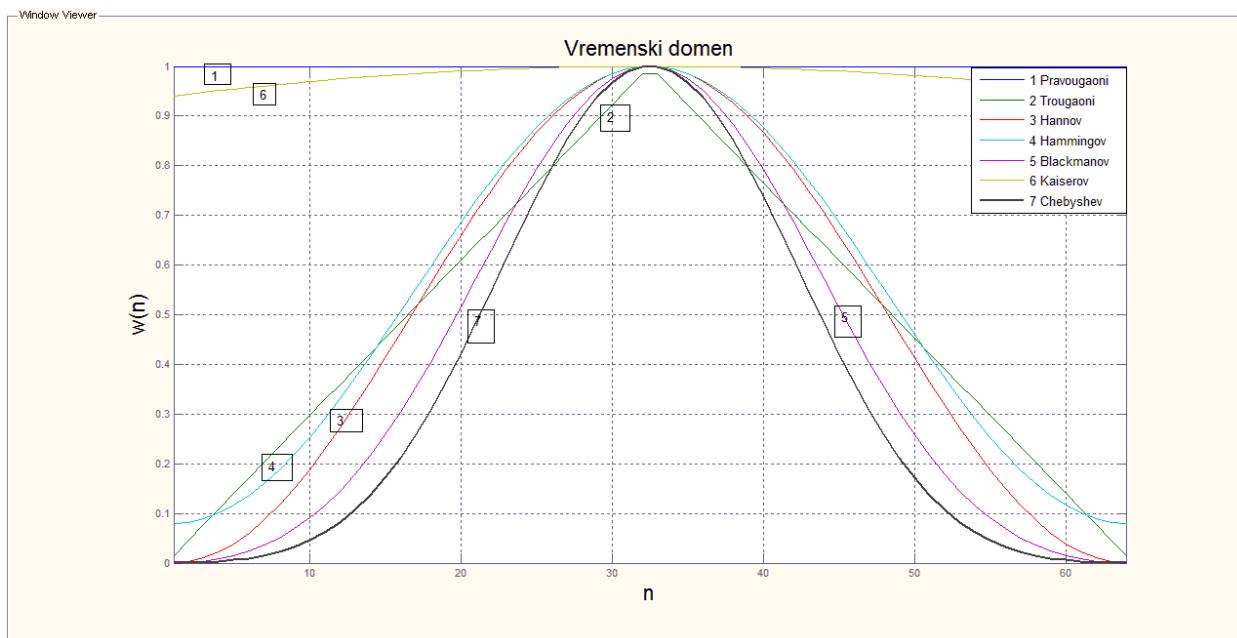


Slika 2.17. Čebiševljeva prozorska funkcija u vremenskom domenu

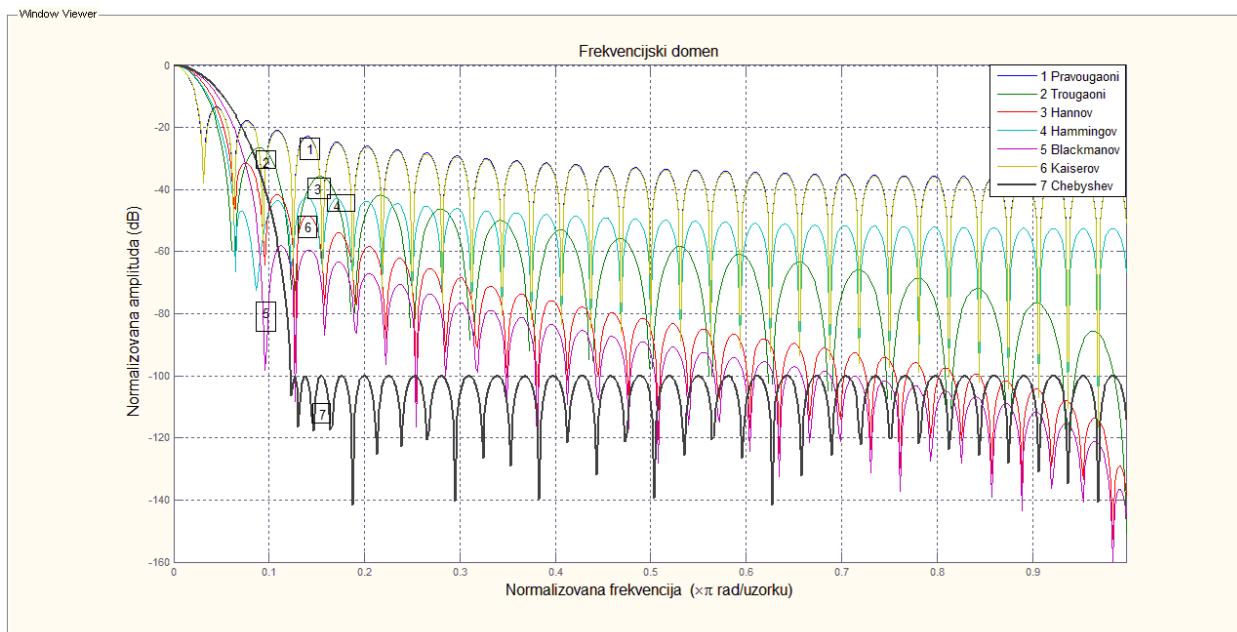


Slika 2.18. Čebiševljeva prozorska funkcija u frekventnom domenu

Na slikama 2.19. i 2.20 su prikazane sve analizirane prozorske funkcije u vremenskom i frekvencijskom domenu.



Slika 2.19. Analizirane prozorske funkcije u vremenskom domenu



Slika 2.20. Analizirane prozorske funkcije u frekventnom domenu

3 Poređenje prozorskih funkcija

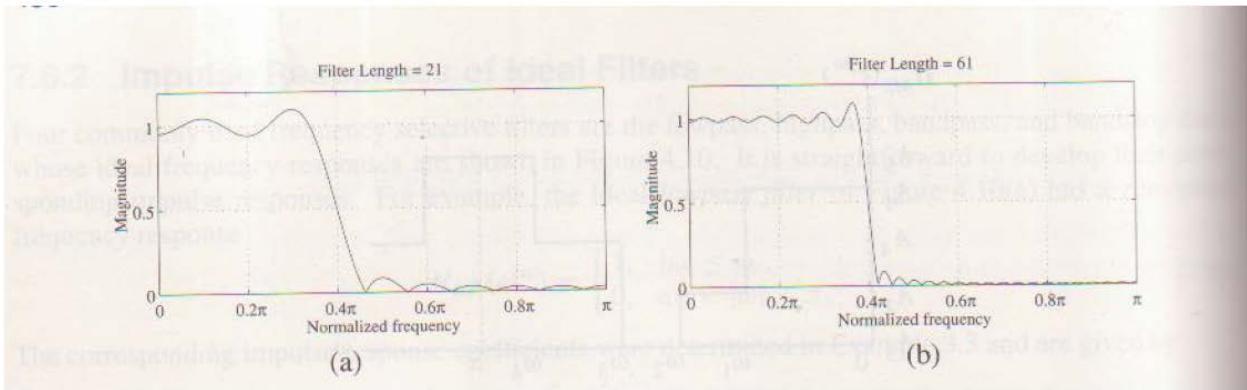
3.1 Poređenje prozorskih funkcija po relativnom slabljenju bočnih lukova

Pod pojmom relativno slabljenje bočnih lukova podrazumijeva se slabljenje prvog najvećeg bočnog luka u odnosu na glavni luk iskazano u decibelima. U tabeli 3.1. su date sortirane prozorske funkcije po ovom kriteriju.

Tabela 3.1. Sortirane prozorske funkcije po relativnom slabljenju bočnih lukova

Prozorska funkcija	Relativno slabljenje bočnih lukova
Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija	-100 (dB)
Blackmanova prozorska funkcija	-58.1 (dB)
Kaiserova prozorska funkcija	-44 (dB)
Hammingova prozorska funkcija	-42.5 (dB)
Hannova prozorska funkcija	-31.5 (dB)
Bartlettova (trougaona) prozorska funkcija	-26.6 (dB)
Pravougaona prozorska funkcija	-13.3 (dB)

Iz tabele se vidi da najviše slabljenje osigurava Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija od čak -100 dB , odnosno da je slabljenje veće ukoliko je prozorska funkcija kompleksnija. Zbog toga najmanje slabljenje imaju najjednostavnije prozorske funkcije: pravougaona i trougaona. Visina bočnih lukova se može smanjiti zaobljavanjem prozora pri krajevima, tako da se spuštaju glatko ka nuli, ali po cijenu širine glavnog luka, odnosno povećavanja širine prijelaznog opsega. Kao što se vidi iz tabele najveće bočne lukove ima pravougaona prozorska funkcija zbog *naglog* prelaza sa nenultih na nulte vrijednosti. Odsjecanjem implusnog odziva željenog filtra, mijenja se njegova prijenosna funkcija, te ona više nije idealna. Kauzalni FIR filteri dobiveni odsjecanjem koeficijenata implusnog odziva idealnog filtra imaju oscilacije u amplitudnom odzivu, koje se nazivaju Gibbsov fenomen. Na slici 3.1. ilustriran je Gibbsov fenomen na amplitudnom odzivu niskofrekventnog filtra sa graničnom frekvencijom $\omega_c = 0.4\pi$, za dva različita broja uzoraka implusnog odziva $h[n]$ [12].



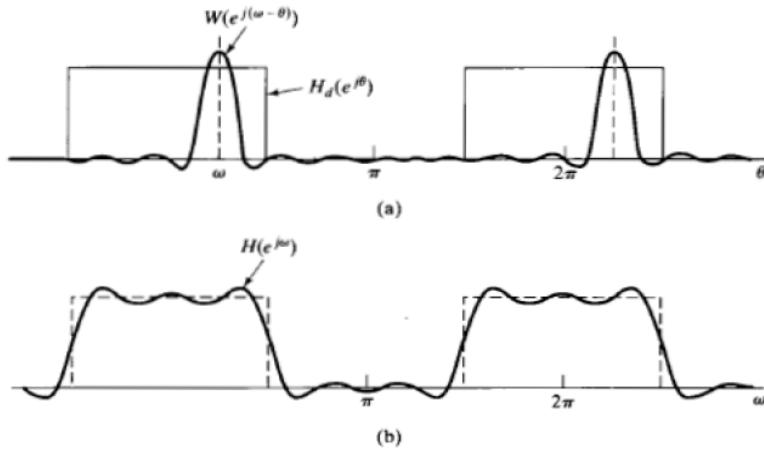
Slika 3.1. Amplitudni odziv niskopropusnog filtera
a) dužina implusnog odziva $N = 21$
b) dužina implusnog odziva $N = 61$

Vidljive su oscilacije na obje strane granične frekvencije. Broj oscilacija i u propusnom i u nepropusnom opsegu se povećava kada dužina implusnog odziva raste. Međutim, visina najvišeg rippla koji se pojavljuje s obje strane granične frekvencije ima uvijek istu vrijednost i ne zavisi od dužine implusnog odziva, a iznosi oko 11% razlike amplitude propusnog i nepropusnog opsega idealnog filtra. Gibbsov fenomen se može objasniti polazeći od činjenice da se proizvod diskretnih sekvenci datih u vremenskom domenu u frekventnom domenu može predstaviti konvolucijom njihovih Fourierovih transformacija. Prijenosna funkcija filtra $H(e^{j\omega})$ dobivenoga primjenom prozora je periodička kompleksna konvolucija željenog frekventnog odziva $H_d(e^{j\omega})$ i Fourierove transformacije prozora $W(e^{j\omega})$:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (3.1)$$

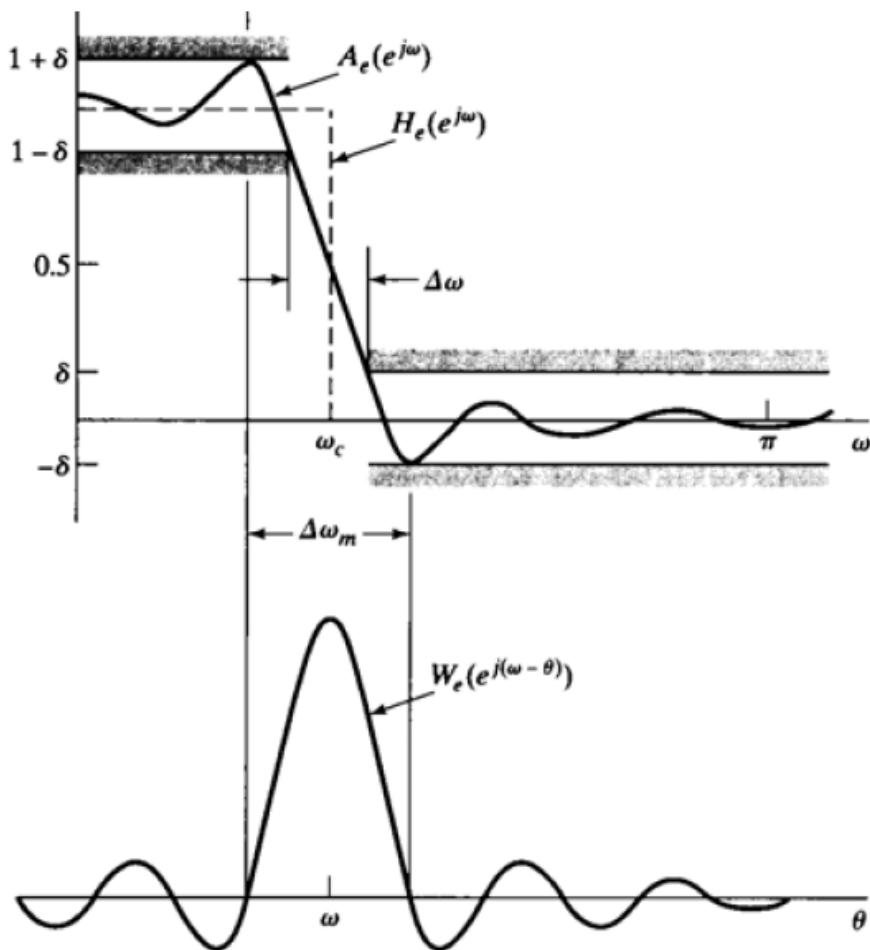
Radi ilustracije procesa odsjecanja implusnog odziva na oblik ostvarene prijenosne funkcije na slici 3.2. su prikazane tipične funkcije $H_d(e^{j\theta})$ i $W(e^{j(\omega-\theta)})$ kao i odgovarajuća funkcija $H(e^{j\omega})$ koja slijedi iz (3.1). Radi jednostavnijeg prikaza, na slici 3.2. sve funkcije su uzete kao realne, što ne umanjuje opštost izvedenih zaključaka. Posmatranjem jednačine (3.1) i slike 3.2. uočava se da ako je $W(e^{j\omega})$ bliska idealnom delta implusu, dakle mnogo uža od $H_d(e^{j\theta})$ dobivena funkcija $H(e^{j\omega})$ će biti sličnija željenoj funkciji $H_d(e^{j\omega})$. To znači da bi implusni odziv $h[n]$ trebao biti sa što više uzoraka, odnosno imati što veće M . Sa slike 3.2.b vidi se postojanje dvije osnovne razlike između željene i ostvarene prijenosne funkcije:

- prijelazni opseg konačno širok (umjesto beskonačno strm), što smanjuje selektivnost filtra,
- pojavljuju se oscilacije prijenosne funkcije u propusnom i nepropusnom opsegu, umjesto konstantnog slabljenja. To znači da filter propušta komponente u spektru koje bi inače trebao da potiskuje.



Slika 3.2. a) Prijenosna funkcija idealnog NP filtra i prozorska funkcija
b) Prijenosna funkcija ostvarena odsjecanjem

Iz relacije (3.1.) slijedi da, kada $W(e^{j(\omega-\theta)})$ kliže pored diskontinuiteta $H_d(e^{j\theta})$, pri rastućem ω , integral $H_d(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})$ oscilira, pošto svaki od lukova prolazi pored diskontinuiteta. S porastom M oscilacije se javljaju češće, ali amplituda oscilacija ne opada, bez obzira na dužinu implusnog odziva filtra. Ova neuniformna konvergencija (Gibbsov efekat) može se smanjiti koristeći prethodno definirane prozore koji nemaju diskontinuitete u $n = 0$ i $n = M$. Da bi se još bolje shvatio efekat prozorskih funkcija na projektovanje FIR filtara, na slici 3.3. prikazana je veza frekvencijskog odziva idealnog niskopropusnog filtra, Fourierova transformacija tipičnog prozora i filtra dobivenog prozoriranjem implusnog odziva. Na slici je rippl u propusnom opsegu jednaka ripplu u nepropusnom opsegu. Razlika između lokacije maksimuma propusnog opsega i minimuma nepropusnog opsega jednaka je širini glavnog luka $\Delta\omega_m$ sa centrom u ω_c . Širina prijelaznog opsega $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ je manja od $\Delta\omega_m$. Za brzi prijelaz iz propusnog opsega u nepropusni širina glavnog luka prozora treba da bude što manja. S druge strane da bi se smanjio rippl u propusnom i nepropusnom opsegu površina ispod bočnih lukova prozora mora da bude što manja. Međutim, ova dva zahtjeva su protivrječna. U slučaju pravougaonog, Hannovog, Hammingovog i Blackmanovog prozora vrijednost rippla δ ne zavisi od dužine prozora, niti od granične frekvencije ω_c , i uvijek je konstantna.



Slika 3.3. Veza frekvencijskog odziva idealnog niskopropusnog filtra,
F.T. tipičnog prozora i filtra dobivenog prozoriranjem implusanog odziva

3.2 Poređenje prozorskih funkcija po širini glavnog luka

Pod pojmom relativne širine glavnog luka (trodecibelska) se podrazumijeva ona širina glavnog luka do koje prijenosna funkcija opadne za 3 dB ili na 0.707 od maksimalne njene vrijednosti. Što se tiče same širine glavnog luka nastoji se odabrati prozorska funkcija sa manjom širinom, jer je olakšano filtriranje signala i efikasnije zauzimanje frekventnog opsega. U tabeli 3.2. su date prozorske funkcije sortirane po relativnoj širini (trodecibelskoj) glavnog luka.

Tabela 3.2. Sortirane prozorske funkcije po relativnoj širini glavnog luka

Prozorska funkcija	Relativna širina glavnog luka
Pravougaona prozorska funkcija	0.027344
Bartlettova (trougaona) prozorska funkcija	0.039063
Hammingova prozorska funkcija	0.039063
Hannova prozorska funkcija	0.042969
Blackmanova prozorska funkcija	0.050781
Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija	0.054688
Kaiserova prozorska funkcija	0.070313

Poredeći ovu tabelu sa prethodnom može se zaključiti da su prozorske funkcije koje su bile najlošije po relativnom slabljenju bočnih lukova, najbolje po pitanju relativne širine glavnog luka, to ukazuje na potrebu traženja kompromisa po pitanju ova dva faktora i izbora odgovarajuće prozorske funkcije.

3.3 Poređenje prozorskih funkcija po faktoru curenja

Faktor curenja se definiše kao odnos snage sadržane u bočnim lobovima i ukupne snage signala. Što znači da ukoliko prozorska funkcija ima širi glavni luk i manju amplitudu bočnih lukova to je faktor curenja manji, jer je više snage koncentrisano u glavnom luku, a manje u bočnim lukovima. Očigledno da su bolje prozorske funkcije koje imaju faktor curenja manji, jer u tom slučaju postoje manji gubici snage signala.

Prozorska funkcija	Faktor curenja (%)
Blackmanova prozorska funkcija	0
Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija	0
Kaiserova prozorska funkcija	0
Hammingova prozorska funkcija	0.03
Hannova prozorska funkcija	0.05
Bartlettova (trougaona) prozorska funkcija	0.28
Pravougaona prozorska funkcija	9.14

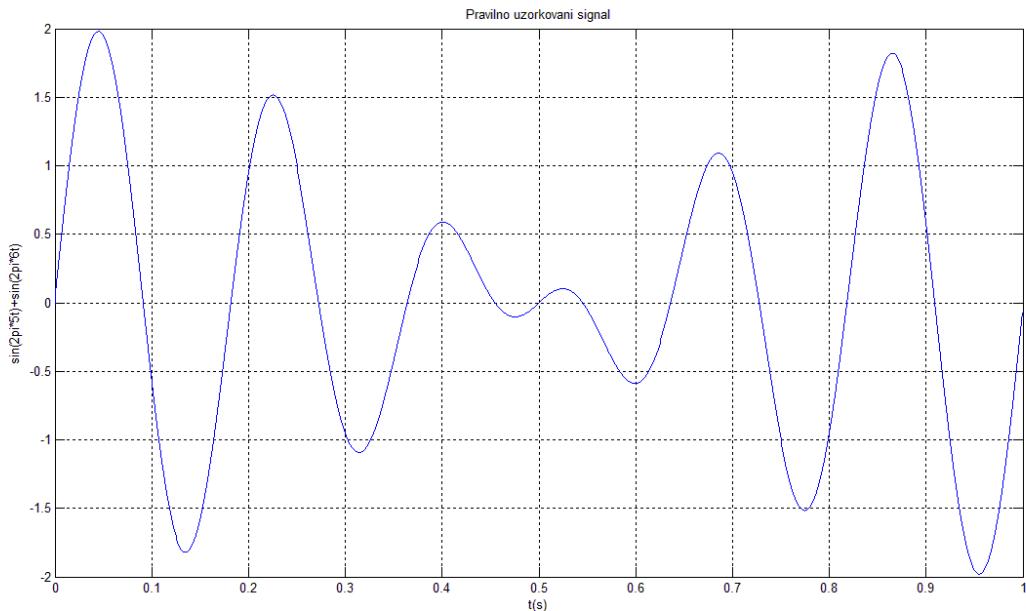
Kao što se vidi iz tabele najbolje prozorske funkcije po ovom kriteriju su Blackmanova, Dolf-Čebiševljeva i Kaiserova, dok je najgora pravougaona prozorska funkcija.

3.4 Praktična realizacija i analiza uticaja prozorskih funkcija na signal

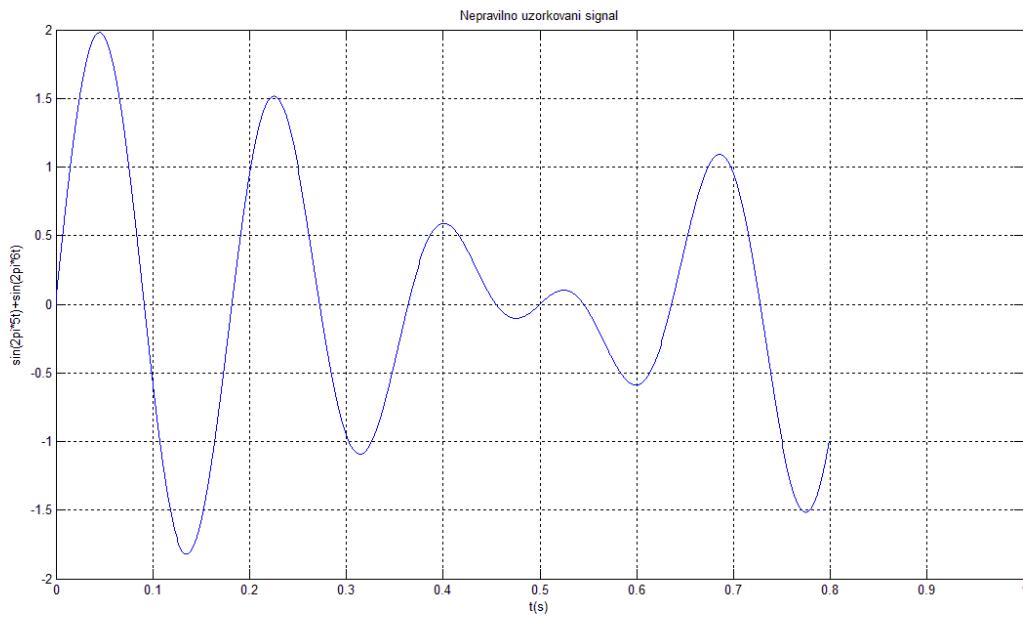
U ovom dijelu poglavlja izvršiti će se praktična realizacija i analiza uticaja prozorskih funkcija na signal oblika:

$$y = \sin(2\pi \cdot 5t) + \sin(2\pi \cdot 6t) \quad (3.1)$$

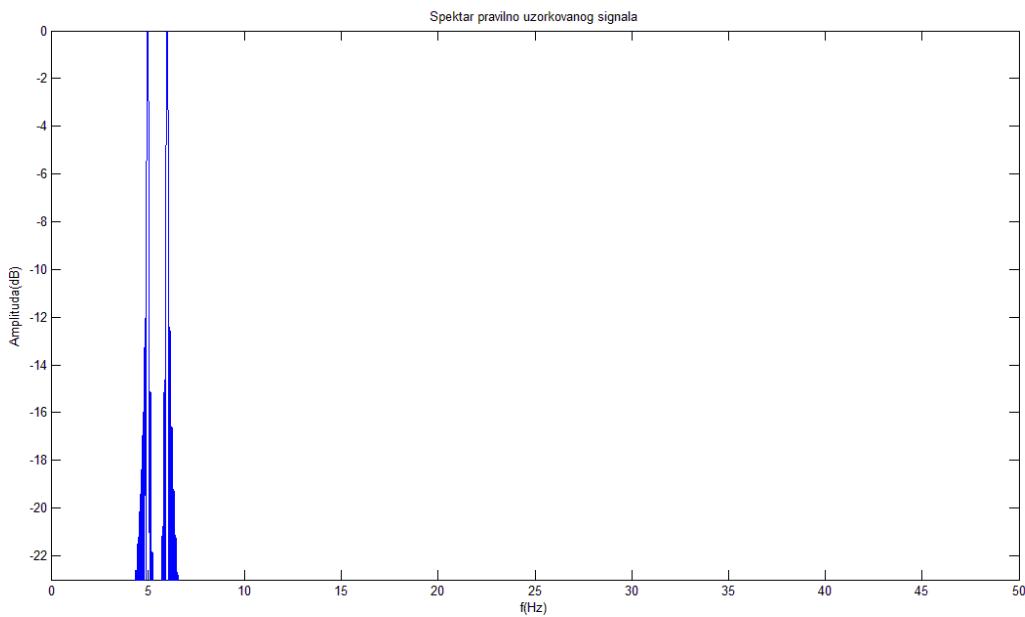
Dakle, radi se o signalu koji se sastoji od sume dvije sinusoide frekvencija 5Hz i 6Hz, čiji je grafički oblik prikazan na slici 3.4. Na slici 3.5. prikazan je vremenski oblik nepravilno uzorkovanog signala, dok su na slikama 3.6. i 3.7. prikazani spektri pravilno i nepravilno uzorkovanog signala. Na slici 3.6. se vide jasno dva glavna luka na frekvencijama 5Hz i 6Hz, dok na slici 3.7. se vide veliki bočni lukovi i preklapanje glavnih lukova, kao rezultat efekta curenja spektra.



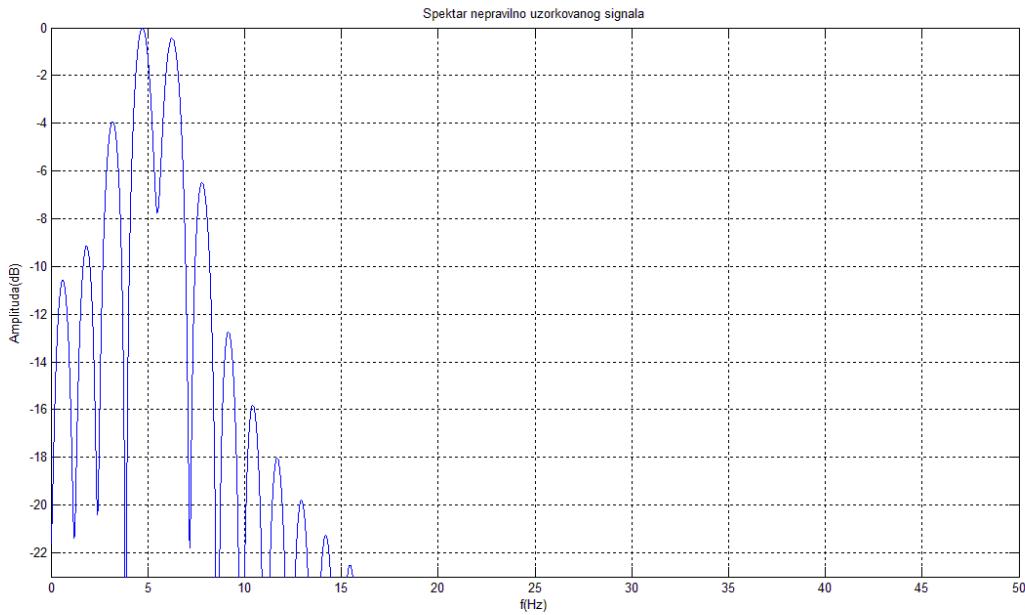
Slika 3.4. Vremenski oblik signala koji je uzorkovan na osnovnom periodu



Slika 3.5. Vremenski oblik signala koji nije uzorkovan na osnovnom periodu



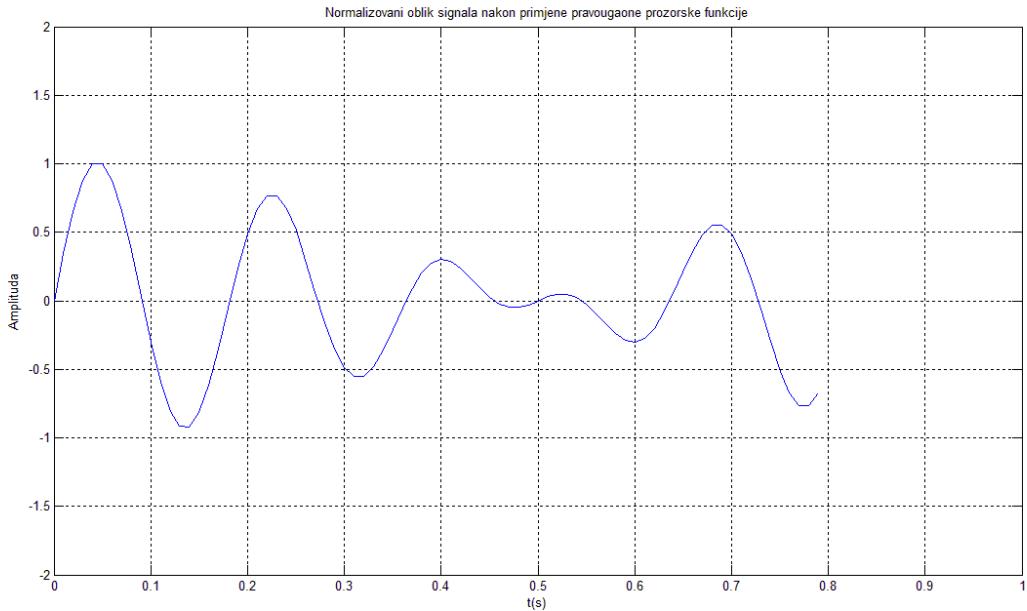
Slika 3.6. Spektar signala koji je uzorkovan na osnovnom periodu



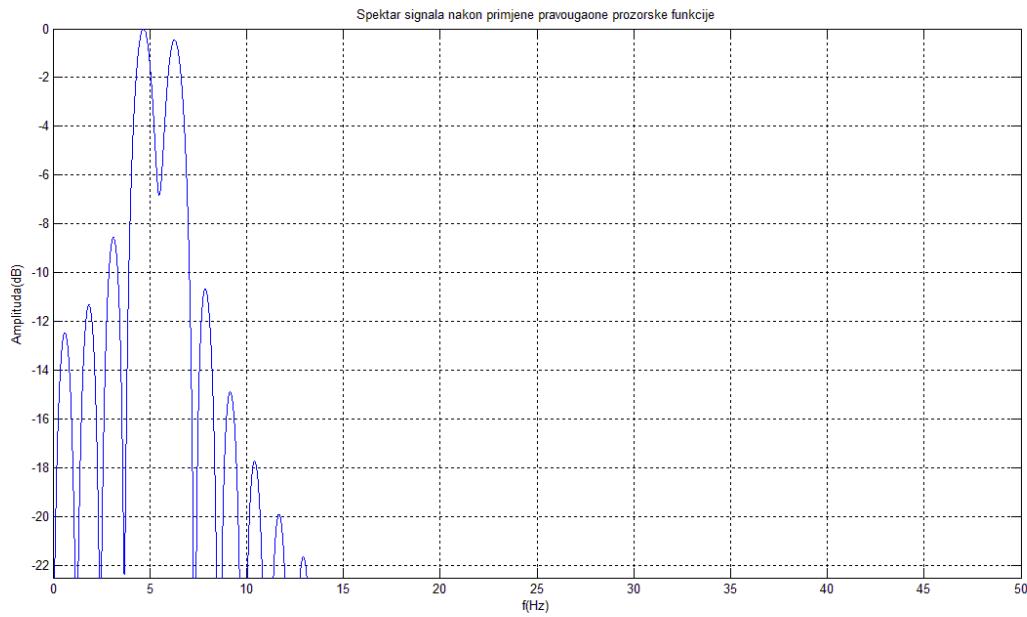
Slika 3.7. Spektar signala koji nije uzorkovan na osnovnom periodu

Sa datim slikom se jasno vidi problem curenja spektra. U daljoj analizi će se posmatrati vremenski oblik i spektar signala nakon primjene različitih prozorskih funkcija.

- **Pravougaona prozorska funkcija**



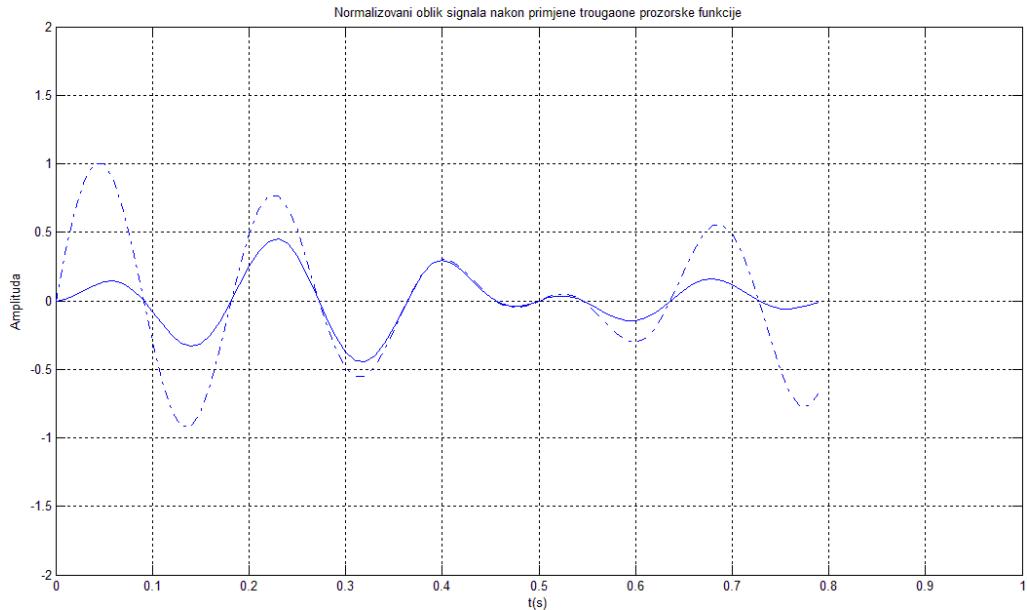
Slika 3.8. Vremenski oblik signala nakon primjene pravougaone prozorske funkcije



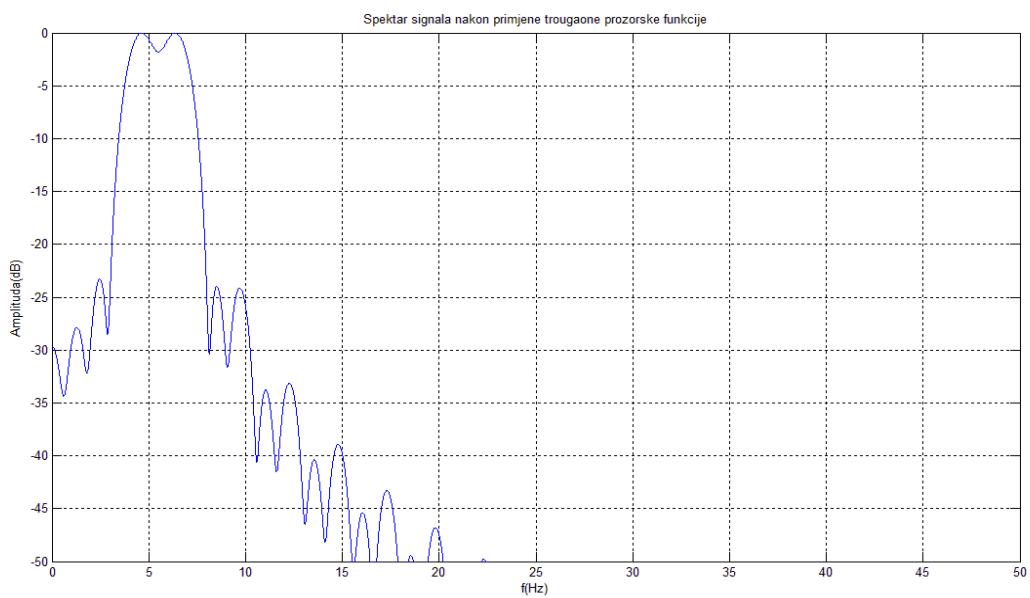
Slika 3.9. Frekvencijski oblik signala nakon primjene pravougaone prozorske funkcije

Kako je pravougaona prozorska funkcija jednaka jedan prema (2.2) tada se ništa neće amplituda originalnog signala na analiziranom periodu, dok će sada funkcija biti nula van intervala, što rezultira promjenom spektra signala kakav je prikazan na slici 3.9.

- Bartlettova (trougaona) prozorska funkcija



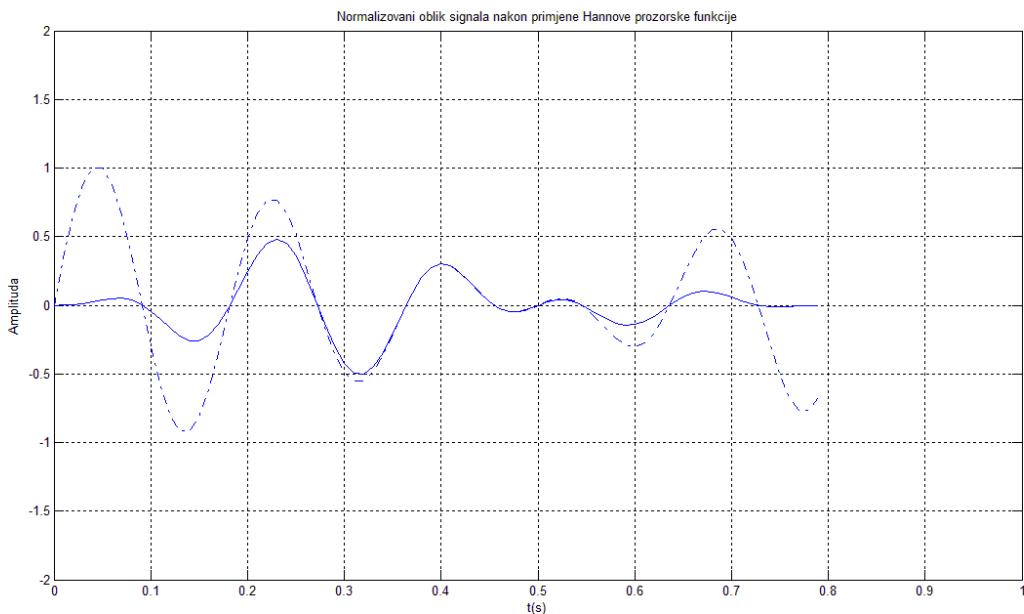
Slika 3.10. Vremenski oblik signala nakon primjene trougaone prozorske funkcije



Slika 3.11. Frekvencijski oblik signala nakon primjene trougaone prozorske funkcije

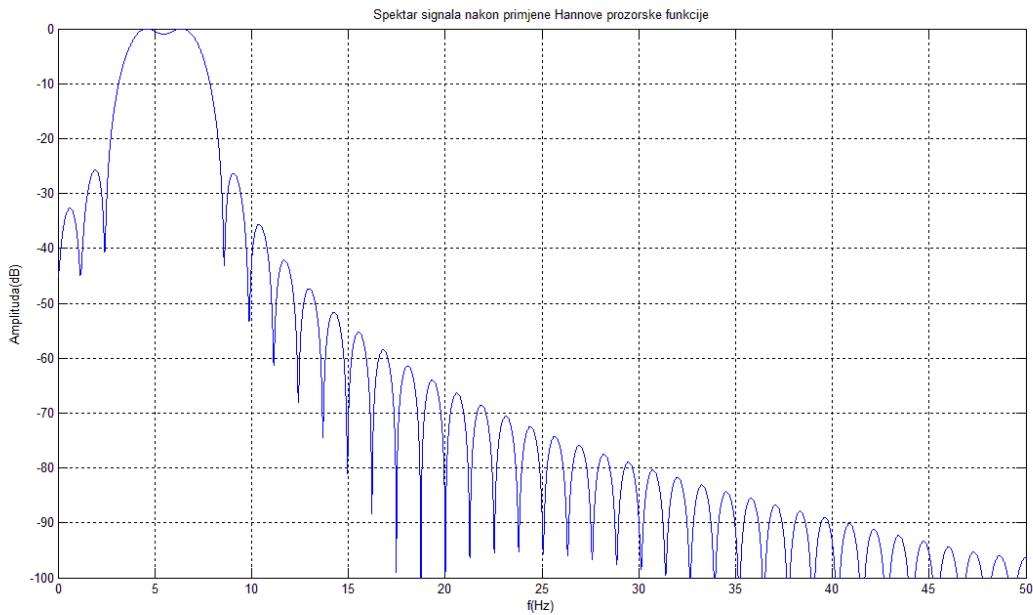
Trougaona prozorska funkcija uzrokuje smanjenje amplitude na početku i kraju signala u vremenskom domenu, što se može zaključiti iz njenog oblika na slici 2.4. U frekventnom domenu to za posljedicu ima širenje glavnih lukova, što se konkretno može vidjeti na slici 3.11., jer je došlo do preklapanja glavnih lukova koji se nalaze na frekvencijama 5 Hz i 6 Hz . Najveći bočni lukovi su oslabljeni za oko -25 dB , gdje se javlja malo odstupanje u odnosu na samu definiciju trougaone prozorske funkcije, a to se može opravdati preklapanjem glavnog luka signala jedne frekvencije sa bočnim lukovima signala druge frekvencije.

- **Hannova prozorska funkcija**



Slika 3.12. Vremenski oblik signala nakon primjene Hannove prozorske funkcije

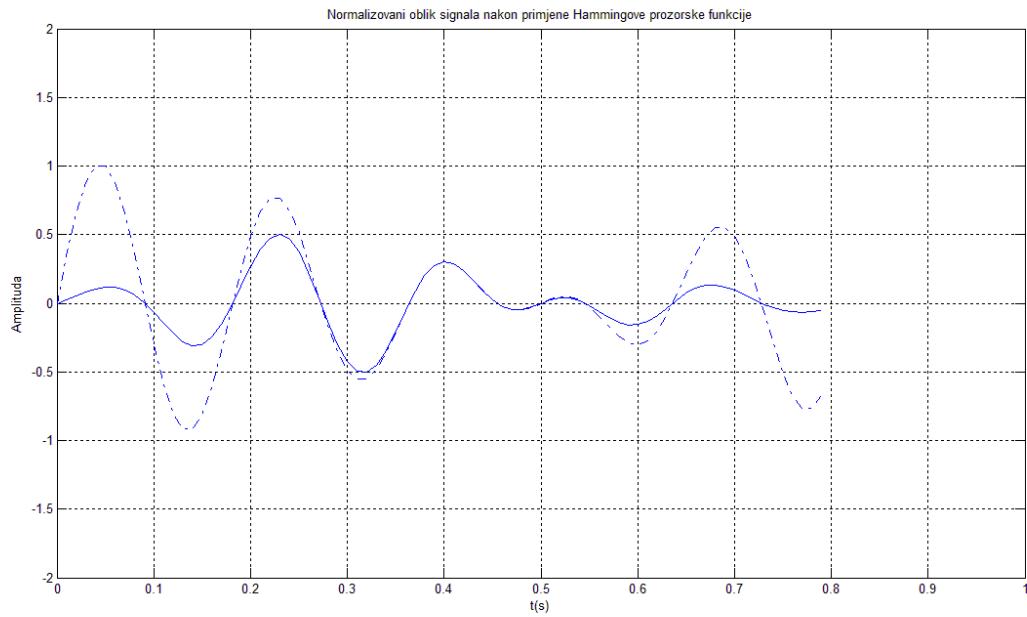
Kao i trougaona prozorska funkcija tako i Hannova prozorska funkcija slabi signal u vremenskom domenu na početku i kraju prozora, što rezultira signalom kakav je prikazan na slici 3.12. Za razliku od trougaone prozorske funkcije Hannova prozorska funkcija na krajevima intervala nema diskontinuiteta, što uzrokuje veće slabljenje bočnih lukova i koje sada iznosi oko -30 dB . Nedostatak Hannove prozorske funkcije u odnosu na trougaoni prozor je u većem širenju glavnih lukova, koji se sada u većoj mjeri preklapaju nego što je bio slučaj na slici 3.11., a to se najbolje može vidjeti na slici 3.13.



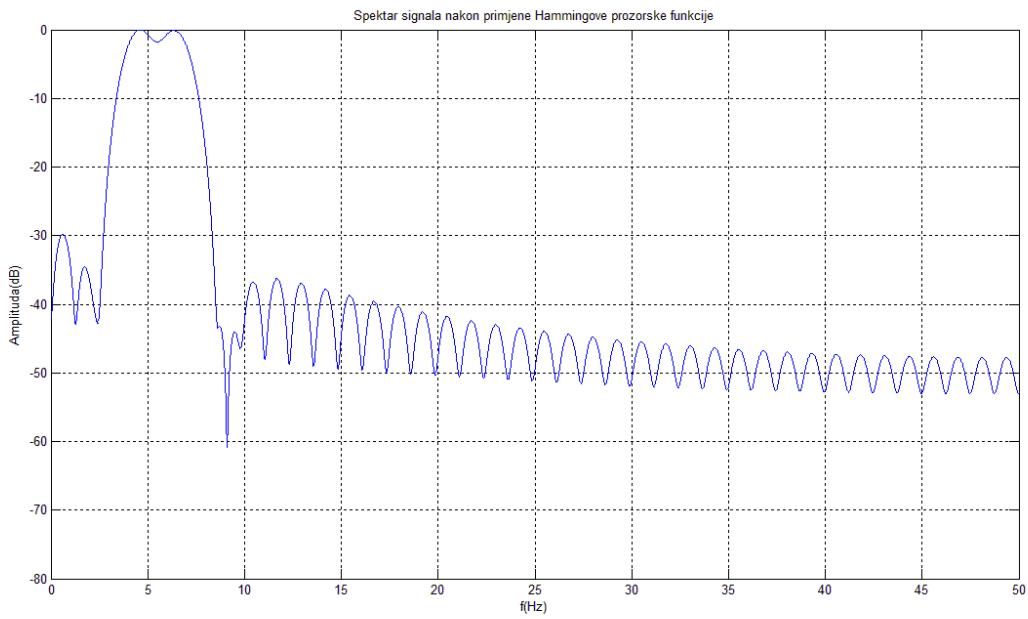
Slika 3.13. Frekvencijski oblik signala nakon primjene Hannove prozorske funkcije

- **Hammingova prozorska funkcija**

Iz izraza (2.14) za Hammingovu prozorsku funkciju vidi se da ona ima diskontinuitete na krajevima intervala, jer vrijedi $w[0] = w[M] = 0.08$. Glavni luk kod Hammingovog prozora je dva puta širi u odnosu na pravougaoni prozor, te vidimo da su se proširili i preklopili glavni bočni lukovi na frekvencijama 5 Hz i 6 Hz . Po samoj definiciji slabljenje najvećih bočnih luka kod Hammingovog prozora je -43 dB . Na slici 3.15. imamo malo odstupanje zbog preklapanja bočnih luka signala na jednoj frekvenciji i glavnog luka na drugoj frekvenciji. Vremenski i frekvencijski oblik signala nakon primjene Hammingove prozorske funkcije su dati na slikama 3.14. i 3.15.

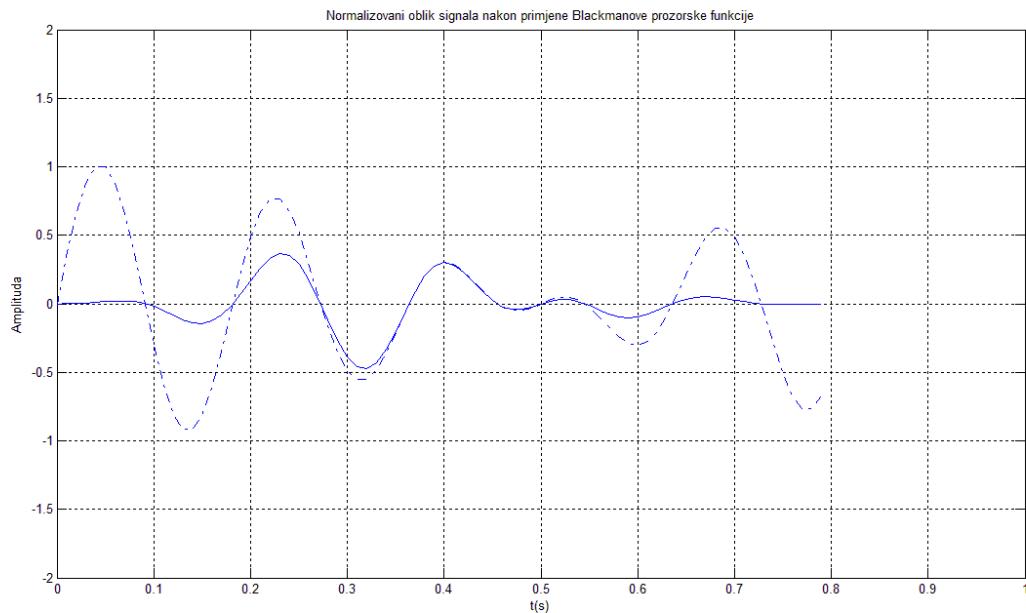


Slika 3.14. Vremenski oblik signala nakon primjene Hammingove prozorske funkcije

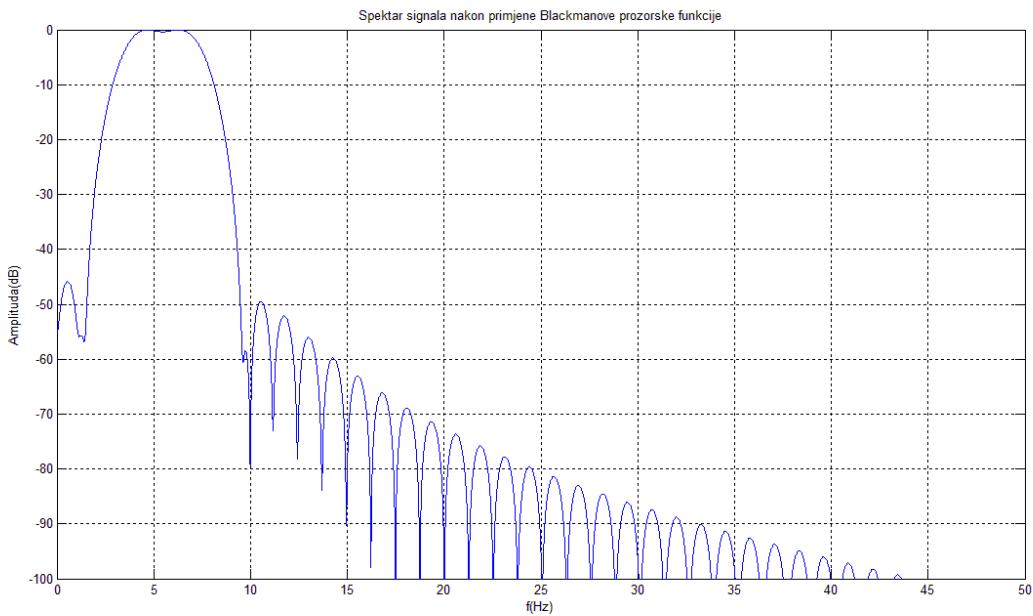


Slika 3.15. Frekvecijski oblik signala nakon primjene Hammingove prozorske funkcije

- Blackmanova prozorska funkcija



Slika 3.16. Vremenski oblik signala nakon primjene Blackmanove prozorske funkcije

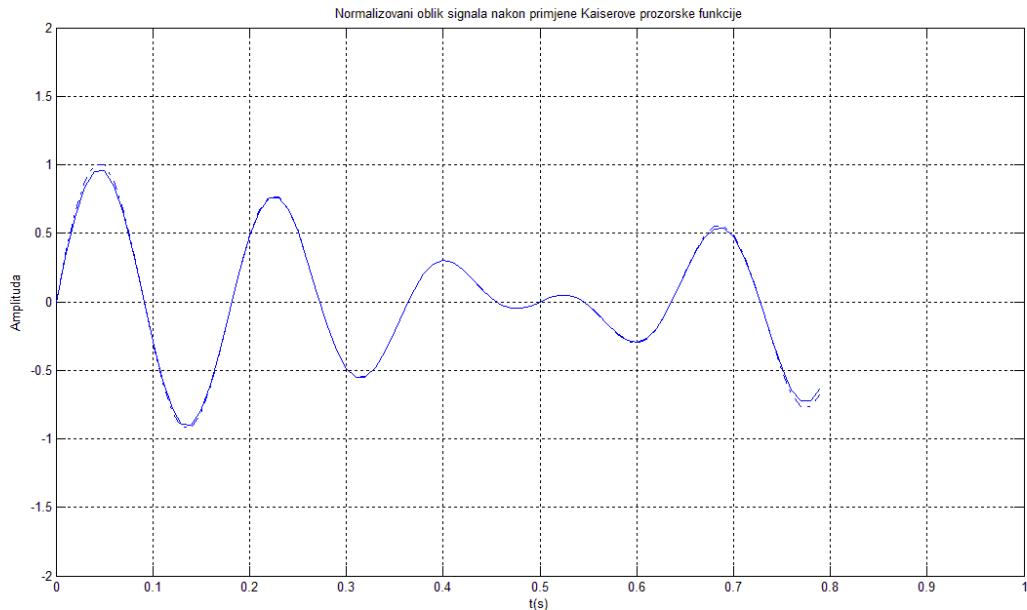


Slika 3.17. Frekvencijski oblik signala nakon primjene Blackmanove prozorske funkcije

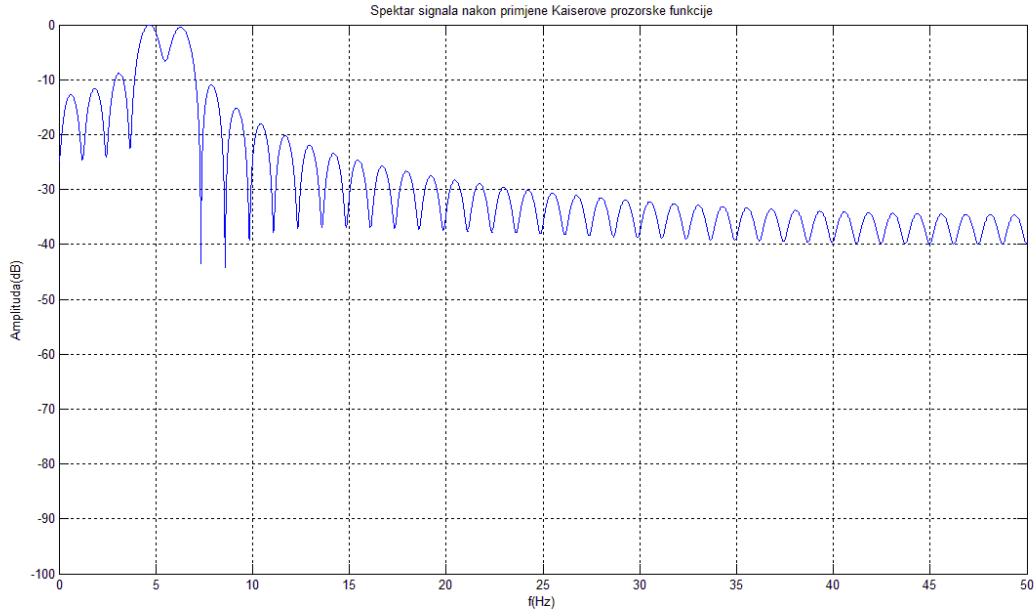
Zbog osobine inverznog odnosa širine glavnog luka i slabljenja bočnih lukova vidi se da nakon primjene Blackmanove prozorske funkcije imamo najveće slabljenje bočnih lukova koje iznosi i preko -50 dB u odnosu na ostalu klasu kosinusnih prozora, ali je zato širina glavnog luka najveća i u potpunosti su se preklopili glavni bočni lukovi na frekvencijama 5 Hz i $6(\text{Hz})$. Svaki naredni bočnih luk je za oko -3 dB slabiji u odnosu na prethodni, a to se najbolje može vidjeti na slikama 3.16. i 3.17.

- **Kaiserova prozorska funkcija**

Kaiserova prozorska funkcija je funkcija dva parametra, pa je time omogućeno da se može postići optimalno slabljenje bočnih lukova i širine glavnog luka. U vremenskom domenu vidi se da je signal oslabljen na krajevima intervala, to slabljenje je utoliko veće ukoliko je parameter β veći. Vremenski i frekvencijski oblik signala nakon primjene Kaiserove prozorske funkcije sa parametrom $\beta = 0.5$ i dužinom $M = 80$ su prikazani na slikama 3.18. i 3.19. Zbog male vrijednosti parametra $\beta = 0.5$ slabljenje bočnih lukova iznosi oko -10 dB , ali je manja širina glavnog luka.



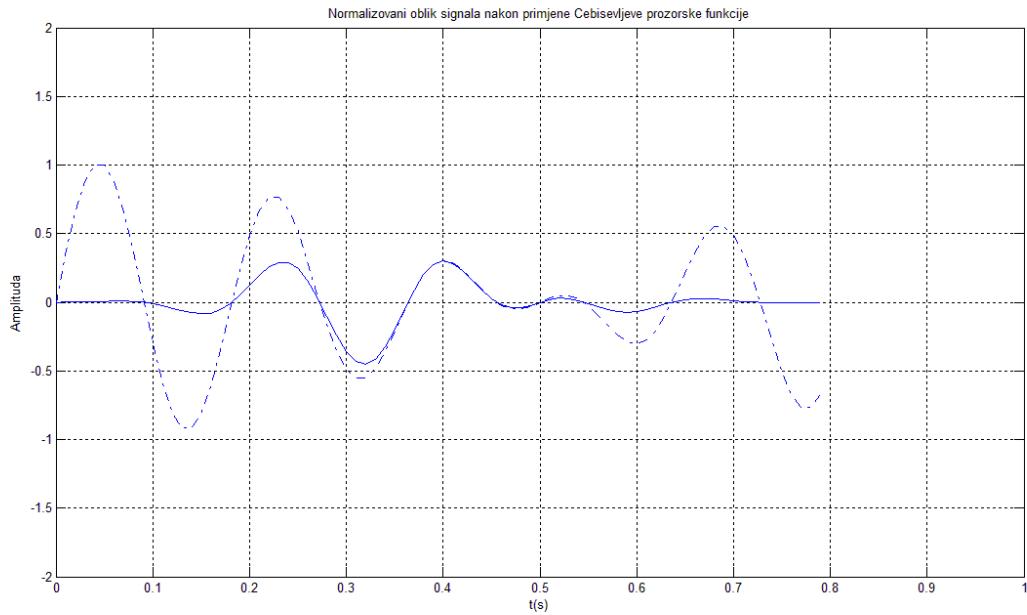
Slika 3.18. Vremenski oblik signala nakon primjene Kaiserove prozorske funkcije sa $\beta = 0.5$



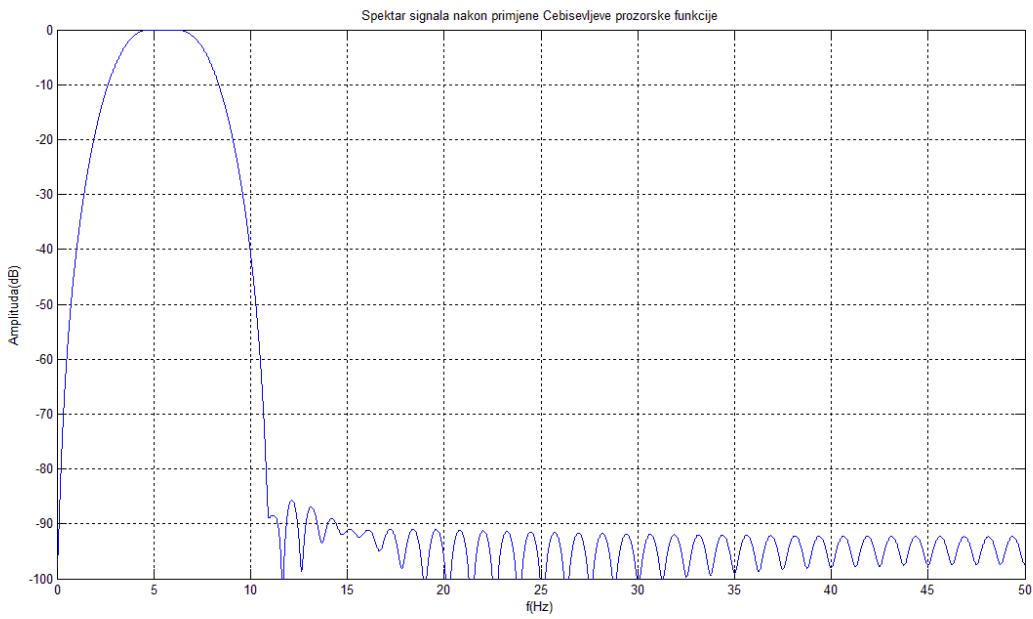
Slika 3.19. Frekvencijski oblik signala nakon primjene Kaiserove prozorske funkcije sa $\beta = 0.5$

- **Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija**

Sa slike 3.20. vidi se da Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija uzrokuje izuzetno veliko slabljenje na krajevima intervala, što se može zaključiti i sa slike 2.17., jer je amplituda ove prozorske funkcije na krajevima intervala mala. To uzrokuje veliko slabljenje bočnih lukova, ali je zato glavni luk širok i došlo je do preklapanja glavnih lukova oba signala, tako da je nemoguće odrediti centralnu frekvenciju sa slike 3.21. Analizom slike 3.21. došlo bi se do zaključka da je centralna frekvencija signala 5.5 Hz.



Slika 3.20. Vremenski oblik signala nakon primjene Dolf-Čebiševljeve prozorske funkcije



Slika 3.21. Frekvencijski oblik signala nakon primjene Dolf-Čebiševljeve prozorske funkcije

Zaključak

Pored odgovarajuće teorije i izvođenja formula ovaj rad je omogućio implementaciju i prezentaciju prozorskih funkcija i njihovog uticaja na curenje spektra u matlabu. Nakon definisanja osnovnih pojmove koji su bili platforma za dalje razumijevanje, definisan je pojam curenja spektra, kao jedne od čestih pojava kod digitalne obrade signala. Curenje spektra prouzrokuje probleme kao što su nepotrebno zauzimanje spektra, interferencija, određivanje centralne frekvencije i sl. Paralelno sa uvođenjem ove problematike navedeno je njeno rješavanje putem funkcija koje su poznate pod nazivom prozorske funkcije. U praksi postoji dosta prozorskih funkcija, a zbog ograničenosti u ovom radu su obrađene samo neke: Pravougaona, Trougaona (Bartlettova), Hannova, Hammingova, Blackmanova, Kaiserova i Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija. Svaka od prozorskih funkcija ima svoje prednosti i nedostatke. Osnovni problem je smanjnjje širina glavnog luka i dobivanje što većeg slabljenja bočnih lukova. Nemoguće je naći jednu prozorsknu funkciju koja će imati optimalan odnos ovih veličina. Zbog toga, prvenstveno cilj ovog rada jeste upoznavanje sa karakteristikama prozorskih funkcija, koje će dalje olakšati njihov izbor prilikom projektovanja filtera. U posljednjem poglavljju, prozorske funkcije su sortirane po relativnom slabljenju bočnih lukova, širini glavnog luka i faktoru curenja, a zatim je izvršena analiza uticaja prozoriranja na signal sastavljen od sume dvije sinusoide i pri tome je postignuto dobro slaganje sa teoretskim rezultatima.

Popis slika

3.14. Vremenski oblik signala nakon primjene Hammingove prozorske funkcije	52
3.15. Frekvencijski oblik signala nakon primjene Hammingove prozorske funkcije	52
3.16. Vremenski oblik signala nakon primjene Blackmanove prozorske funkcije	53
3.17. Frekvencijski oblik signala nakon primjene Blackmanove prozorske funkcije	53
3.18. Vremenski oblik signala nakon primjene Kaiserove prozorske funkcije sa $\beta=0.5$	54
3.19. Frekvencijski oblik signala nakon primjene Kaiserove prozorske funkcije sa $\beta=0.5$	55
3.20. Vremenski oblik signala nakon primjene Dolf-Čebiševljeve prozorske funkcije	56
3.21. Frekvencijski oblik signala nakon primjene Dolf-Čebiševljeve prozorske funkcije	56

Lista skraćenica

Skraćenica	Objašnjenje
FT	Fourier Transform
	Fourierova transformacija
DFT	Discrete Fourier Transform
	Diskretna Fourierova transformacija
CT	Continuous Time
	Kontinualan u vremenu
DT	Discrete Time
	Diskretan u vremenu
DTFT	Discrete Time Fourier Transform
	Fourierova transformacija diskretnog signala
FFT	Fast Fourier Transform
	Brza Fourierova transformacija
FIR	Finite Impulse Response
	Konačno trajanje implusa

Literatura

- [1] Huse Fatkić, *Predavanja iz predmeta "Inženjerska matematika 1"*, Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, www.etf.unsa.ba, akademska 2010/2011. godina
- [2] Eleanor Chu: "*Transforms, Analysis, Applications and Fast Algorithms*", Univesity of Guelph, Guelph, Ontario, Canada, 2008.
- [3] Fourier, J.-B.-J. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France VII*. 570–604 (1827) (*greenhouse effect essay*)
- [4] Huse Fatkić, *Predavanja iz predmeta "Inženjerska matematika 2"*, Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, www.etf.unsa.ba, akademska 2010/2011. godina
- [5] Melita Ahić – Đokić: "*Signali i sistem*", Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, 2010. godina
- [6] Kenan Suruliz, Mesud Hadžalić "Statistička teorija telekomunikacija", Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, Juli 2009. godina
- [7] Roberto Cristi: "*Modern Digital Signal Processing*", Pacific Grove, EUA: Thomson, 2004
- [8] Melita Ahić – Đokić, Branislava Peruničić: "*Analiza signala i sistema*", Institut zaštite od požara i eksplozije, djl Sarajevo, 1999
- [9] M.C. Jeruchim, P. Balaban and K.S. Shanmugan: "*Simulation of Communication Systems. Modeling, Methodology and Techniques*", Kluwer, 2000.
- [10] Richard G. Lyons: "*Understanding Digital Signal Processing*" (2nd Edition), Prentice Hall PTR Upper Saddle River, NJ, USA, 2004.
- [11] Zoran Milivojević: "*Digital Filter Design*", mikroElektronika, Beograd, 2009.
- [12] Melita Ahić – Đokić: *Predavanje iz predmeta "Digitalna obrada signala"*, Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, www.etf.unsa.ba, akademska 2010/2011. godina
- [13] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer, John R. Buck: "*Discrete-Time Digital Processing*", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1998.
- [14] MathWorks, Signal Processing Functions in Matlab
- [15] Alan V. Oppenheim and George C. Verghese: "*Signals, Systems and Inference*", Massachusetts Institute of Technology, USA, 2010.
- [16] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky: "*Signals and systems*", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 1997.

- [17] Michael Batty: "*Essential Engineering Mathematics*", University of Durham, Durham, United Kingdom, 2010.
- [18] John G. Proakis, Dimitris G. Manolakis "*Digital Signal Processing*", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [19] B. A. Shenoi: "*Introduction to digital signal processing and filter design*", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2006.
- [20] Edward A. Lee and Pravin Varaiya : "*Structure and Interpretation of Signals and Systems*"
Electrical Engineering & Computer Science University of California, Berkeley, July 4, 2000.
- [21] Patrick Gaydecki: "*Foundations of Digital Signal Processing* ", The Institution of Engineering and Technology, London, United Kingdom, 2004.
- [22] Mark Mackenzie and Kiet Tieu "*Orthogonal Gaussian Filters for Signal Processing*", Mechanical Engineering , University of Wollongong, N.S.W. Australia, 2003.
- [23] A. Kumar: "*A Comparative Study of performance of Blackman Window Family for Designing Cosine-Modulated Filter Bank*", Indian Institute of Information Technology , Design and manufacturing Jabalpur, MP-482005, India, 1997.