

Lekcija 8

Asinhroni motori

Prof.dr.sc. Jasmin Velagić

Elektrotehnički fakultet Sarajevo

Kolegij: Aktuatori

8.1. Osnove asinhronih motora

- Danas najčešće upotrebljavani električki strojevi.
- Princip njegovog rada zasniva se na indukcijskom djelovanju između statora i rotora (rotirajućem magnetskom polju).
- Asinhroni stroj dobio je svoje ime zbog toga, što brzina rotacijskog magnetskog polja i brzina rotora nije ista, kao što je slučaj kod sinhronih strojeva.
- Rotor nije napajan strujom iz vanjskog izvora (što nije slučaj sa sinhronim motorom).
- **Struje se u rotoru induciraju okretnim poljem statora.**
- Zato se motor često naziva i indukcijski motor.
- **Na taj način se postiže pretvorba električke energije u mehaničku bez električkih kontakata na rotirajućim dijelovima stroja.**

Osnove asinhronih motora

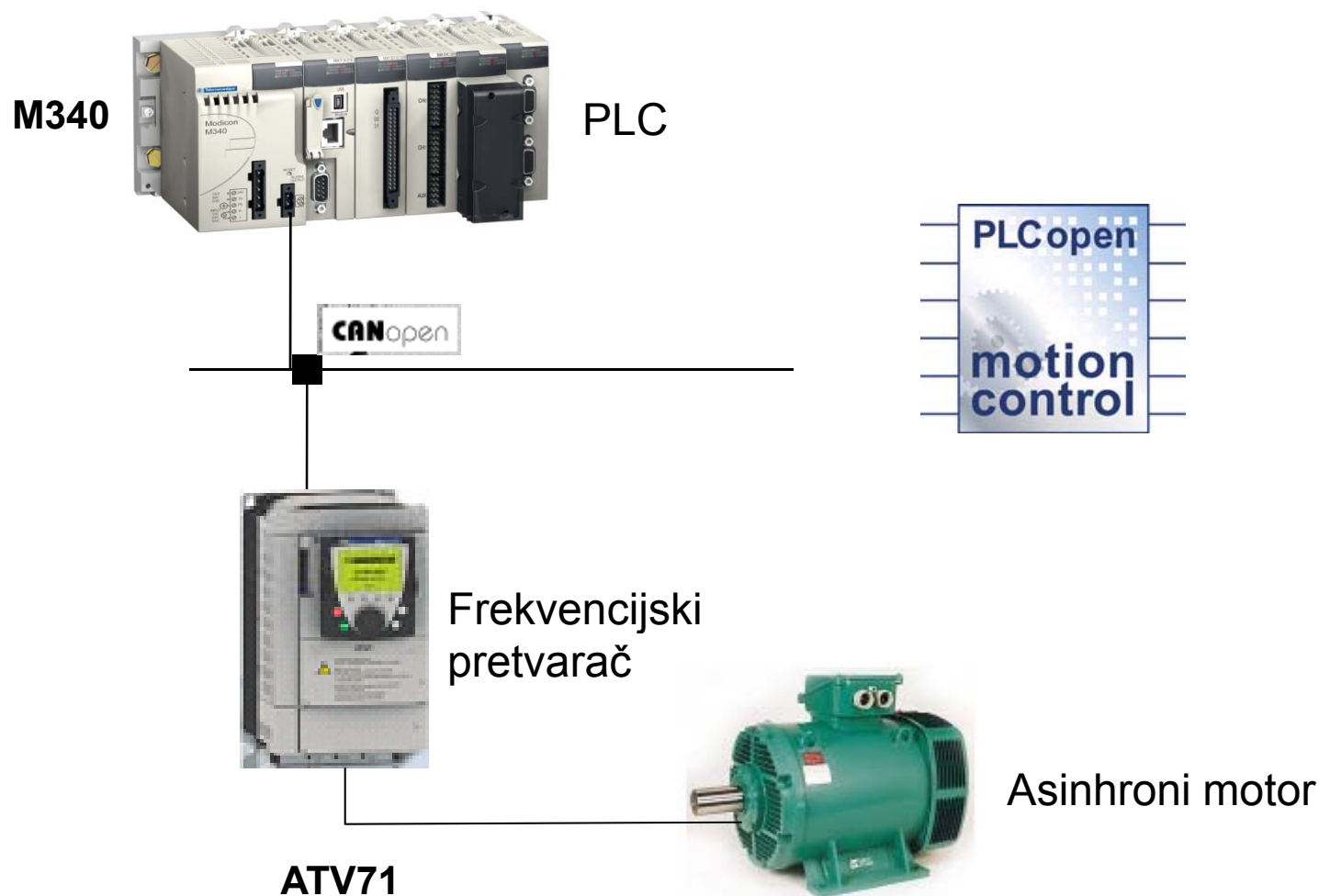
- Takav princip rada omogućuje jednostavnu, robusnu i jeftinu izvedbu asinhronih strojeva.
- To su velike prednosti u odnosu na kolektorske strojeve.
- Međutim, asinhroni strojevi imaju značajan nedostatak – teško su upravljivi.
- Rotor asinhronog stroja prirodno teži da se vrti brzinom okretnog magnetskog polja koje proizvodi stator, pa je brzina vrtnje stroja izrazito ovisna o frekvenciji izvora napajanja.
- Da bi se bez velikih gubitaka energije mijenjala brzina vrtnje asinhronog stroja neophodno je istovremeno mijenjati i frekvenciju i napon napajanja stroja.
- Ovo se ostvaruje pomoću frekvencijskog pretvarača.

Osnove asinhronih motora

- Svaka od ovih promjena može se izvesti zasebno uz ne tako velike troškove, ali obje zajedno zahtijevaju uređaje čija je cijena relativno visoka u odnosu na cijenu samog stroja.
- Razvoj poluvodičke tehnike omogućuje izradu sve jeftinijih uređaja za upravljanje izmjeničnim strojevima.
- Zbog toga asinhroni motori imaju perspektivu u primjenama i reguliranim pogonima, gdje su do sada primat imali istosmjerni strojevi.
- Do sada su se izmjenični strojevi (bilo sinhroni ili asinhroni) koristili uglavnom za specifične namjene, uglavnom gdje je primjena istosmjernih neprikladna i nije dozvoljena zbog iskrenja na kolektoru (npr. rad u zapaljivim i eksplozivnim sredinama).

Osnove asinhronih motora

- Frekvencijski pretvarač je značajno skuplji od samog asinhronog motora.

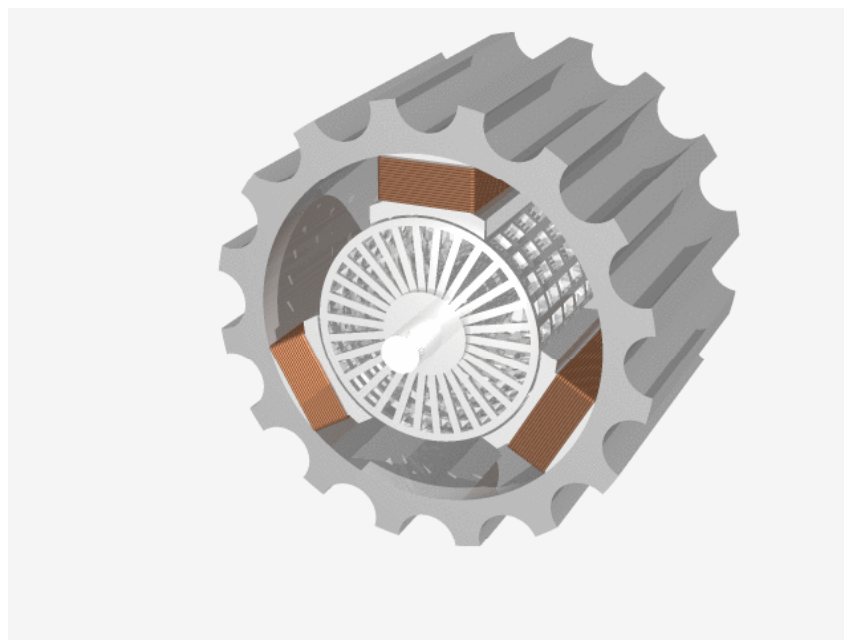


Izvedbe asinhronih motora

- Statorski i rotorski namoti asinhronog stroja načinjeni su od vodiča uloženi u utore, koji su jednoliko raspoređeni po obodu stroja uz sam zračni raspored.
- Najčešće je rotorski namot načinjen od bakrenog ili aluminijskog kaveza.
- Takvi strojevi nazivaju se **asinhronim kaveznim motorima**.
- Također se izrađuju i strojevi s namotanim svicima na rotoru, čiji se završeci izvode preko kliznih prstenova i spajaju na vanjske otpornike.
- Takvi strojevi nazivaju se **asinhronim kliznokolutnim motorima**.
- Upotreba asinhronog stroja kao generatora također je moguća, ali se u praksi rijetko susreće.

Konstrukcija asinhronih motora

- Asinhroni strojevi izrađuju se kao **jednofazni**, **dvofazni**, **trofazni** i **višefazni**.
- Najčešće se koriste trofazni asinhroni motori, koji se sastoje od po tri fazna namota na statoru i rotoru.
- Konstrukcija asinhronog motora prikazana je na slici.

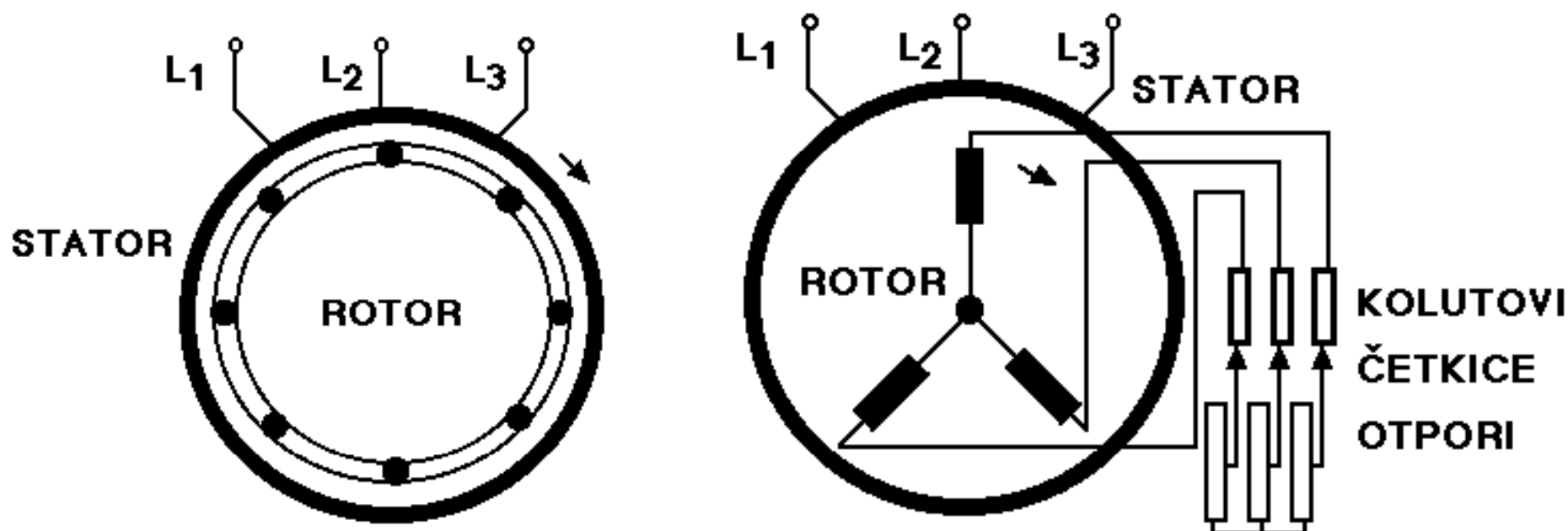


Konstrukcija asinhronih motora

- **Stator** je napravljen u obliku šupljeg valjka od dinamo limova, a uzduž valjka na unutarnjoj strani nalaze se utori u koje se stavlja trofazni namot.
- Kućište stroja služi kao nosač i zaštita limova i namota, a izrađuje se od lijevanog željeza, čelika silumina itd.
- U sredini se nalaze ležajni štitovi u obliku poklopca gdje su smješteni ležajevi za osovinu na kojoj se nalazi rotor.
- **Rotor** je sastavljen slično kao i stator, a sastoji se od osovine i rotorskog paketa.
- Rotorski paket je izveden u obliku valjka od dinamo limova, a u uzdužnom smjeru na vanjskoj strani valjka nalaze se utori za smještaj rotorskog namota.

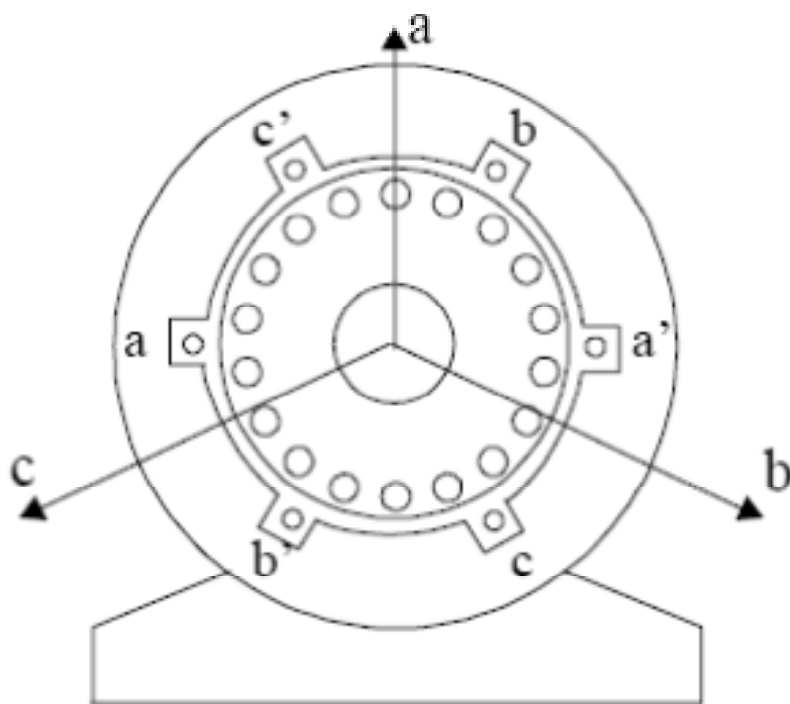
Konstrukcija asinhronih motora

- Ako je rotorski namot izveden od štapova bakra, mjedi, bronce ili aluminija, koji su s obje strane prstenima kratko spojeni i liči na kavez, tada je to **kavezni asinkroni motor**, Ili, ako je rotorski namot izveden kao i statorski tj. od svitka koji su spojeni na tri koluta po kojima klize četkice koje služe za spajanje na rotorske otpornike, tada je to **klizno kolutni asinkroni motor**, kao na slici.

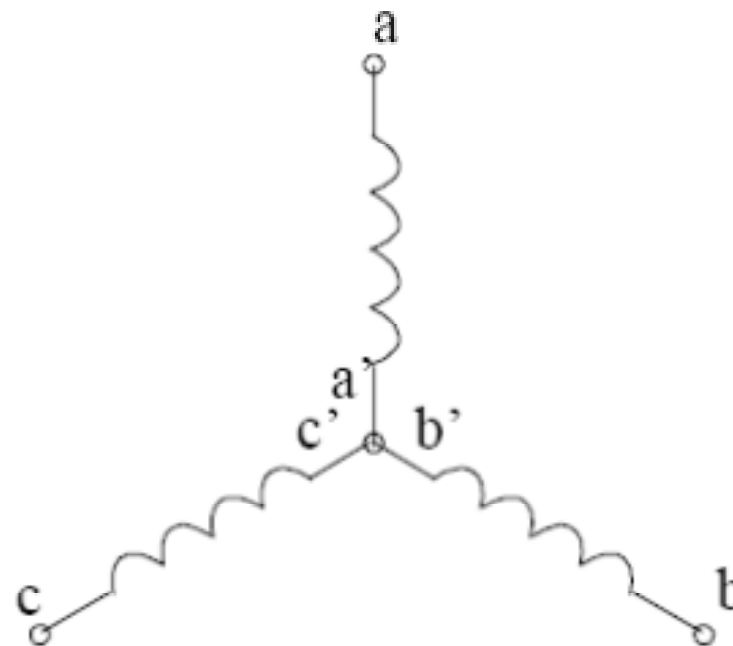


Konstrukcija asinhronih motora

- Kavezni asinhroni motor
 - stator s trofaznim simetrično raspoređenim namotom



a.)



b.)

Princip rada asinhronih motora

- Priključivanjem statorskog **primarnog** namota na izmjeničnu trofaznu mrežu kroz trofazni namot protečiče trofazna izmjenična struja stvarajući rotirajuće magnetsko polje koje rotira sinhronom brzinom n_s i zatvara se kroz stator i rotorski **sekundarni** namot.

$$n_s = \frac{60 f_1}{p},$$

f_1 – frekvencija struja,
 p – broj pari polova statorskog namota motora.

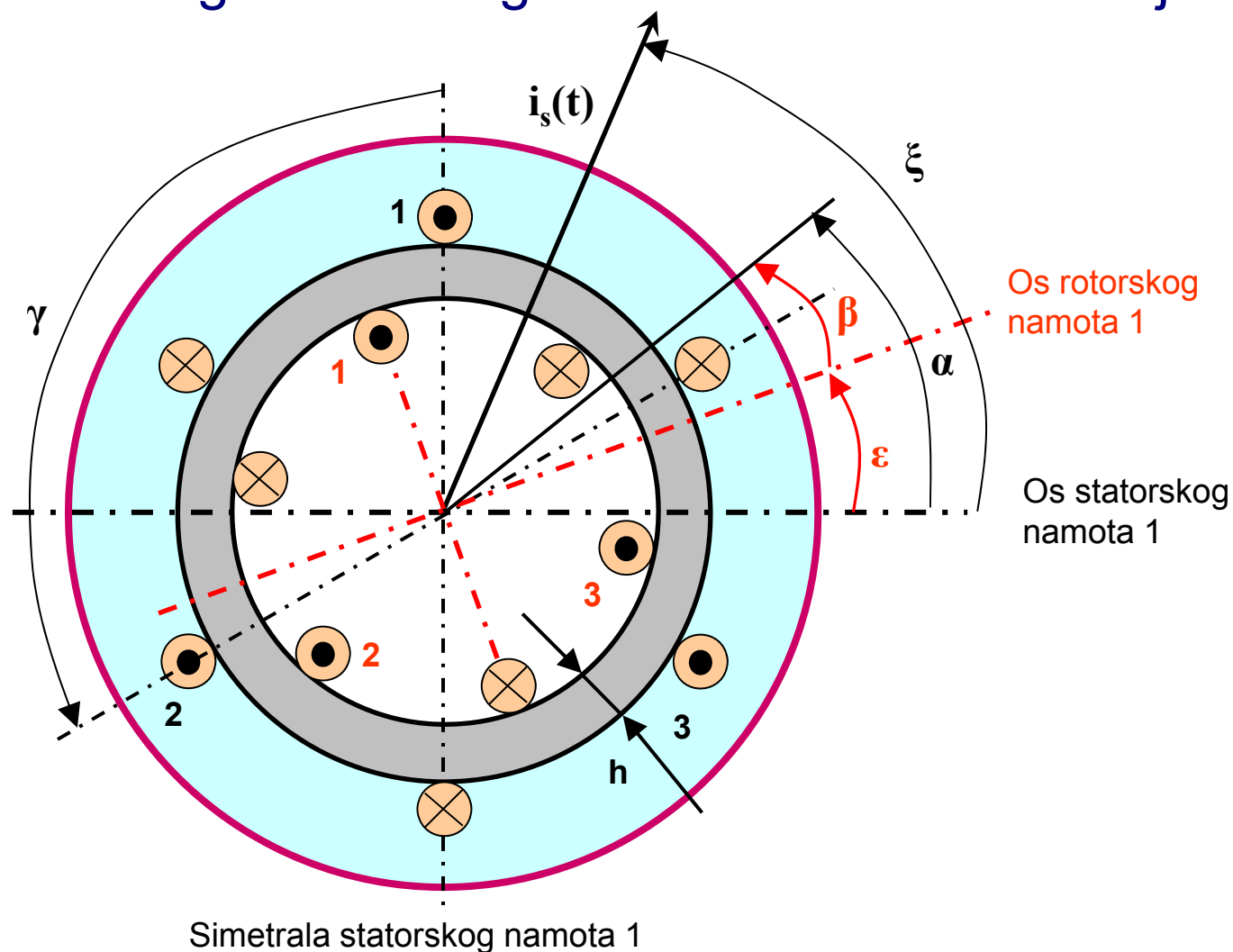
- Okretno magnetsko polje inducira u vodičima rotora napone koji kroz namot rotora tjeraju struje.
- Interakcijom struja rotora i okretnog mag. polja stvara se sila na vodiče rotora koja zakreće rotor u smjeru okretnog magnetskog polja.

Princip rada asinhronih motora

- Smjer vrtnje rotacijskog magnetskog polja i smjer kretanja rotora su istovjetni. Želimo li promijeniti smjer okretanja rotora, trebamo promijeniti smjer okretanja rotacijskog magnetskog toka zamjenom dviju faza.
- Brzina rotora n uvijek je manja od sinhronne brzine n_s kojom se okreće rotacijsko magnetsko polje i ovisna je o teretu na motoru. Rotor ne može nikada postići sinhronu brzinu vrtnje, a kad bi rotor postigao sinhronu brzinu, ne bi više bilo razlike brzina rotacijskog magnetskog toka i rotora i ne bi postojalo presjecanje namota rotora magnetskim silnicama. Zbog toga se ne bi u rotorskom namotu inducirala EMS i ne bi bilo djelovanja mehaničkih sila na vodič, te se ne može stvoriti moment za rotaciju.
- Rotor se uvijek okreće **asinhrono**, po čemu je ovaj stroj i dobio svoje ime.

8.2. Modeliranje asinhronog motora

- U nastavku se izvodi pojednostavljeni matematički model 3-faznog simetričnog asinhronog motora za dinamičke uvjete.



Modeliranje asinhronog motora

- **Pretpostavke:**
- Sve 3 faze simetrične.
- Motor je dvopolni (svaka faza 2 pola - za višepolne motore potrebno je korigirati sinhronu brzinu).
- Permeabilnost statora beskonačna (stator izveden od laminiranih limova)
- Permeabilnost rotora beskonačna (laminirani limovi).
- Zanemarivo zasićenje krivulje magnetiziranja i utjecaj vrtložnih struja.
- Širina zračnog raspora između statora i rotora konstantna po cijelom obodu rotora.
- Aktivni dio vodiča rotora i statora paralelan je osi rotacije.
- Namoti statora spojeni su u zvijezdu (s izoliranim zvjezdištem).
- Namoti rotora su kratko spojeni.

Modeliranje asinhronog motora

- Objašnjenje oznaka na slici
- α - ugaona koordinata u odnosu na centar 1. namota statora (proizvoljni ugao u kojem promatramo jakost magnetskog polja)
 - vektor magnetskog polja 1. faze statora je u $\alpha=0^\circ$,
 - vektor magnetskog polja 2. faze statora je u $\alpha=120^\circ$,
 - vektor magnetskog polja 3. faze statora je u $\alpha=240^\circ$.
- β - ugaona koordinata u odnosu na centar 1. namota rotora.
- ε - ugao zakreta rotora prema statoru.
- $\omega_r(t)=d\varepsilon/dt$ – ugaona brzina rotora.
- h – zračni raspor između statora i rotora.
- $\gamma=120^\circ$ - ugao između dviju susjednih faza statora, odnosno rotora.
- $\underline{i}_s(t)$ – vektor struja statora.
- ξ - ugao vektora struja statora prema centru namota prve faze statora.

8.2.1. Jednadžbe statorskog kruga

- Suma trenutanih vrijednosti struja statora, uz pretpostavku da nema nul-vodiča, je:

$$i_{s1}(t) + i_{s2}(t) + i_{s3}(t) = 0.$$

- Iznos ukupnog vektora magnetskog toka statora (protjecanje) pod uglom α iznosi:

$$\Theta_s(\alpha, t) = N_s [i_{s1}(t) \cos(\alpha) + i_{s2}(t) \cos(\alpha - \gamma) + i_{s3}(t) \cos(\alpha - 2\gamma)],$$

gdje su:

- N_s – broj namota statora po fazi,
- γ – prostorni ugao među fazama.

Jednadžbe statorskog kruga

- Uvođenjem kompleksne oznake za kosinusne izraze:

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(e^{jx} + e^{-jx} \right),$$

dobiva se:

$$\begin{aligned} \Theta_s(\alpha, t) &= \frac{N_s}{2} \left[i_{s1}(t) + i_{s2}(t)e^{-j\gamma} + i_{s3}(t)e^{-j2\gamma} \right] e^{j\alpha} + \\ &+ \frac{N_s}{2} \left[i_{s1}(t) + i_{s2}(t)e^{j\gamma} + i_{s3}(t)e^{j2\gamma} \right] e^{-j\alpha} \\ &= \frac{N_s}{2} \left[\underline{i}_s(t) \cdot e^{-j\alpha} + \underline{i}_s^*(t) \cdot e^{j\alpha} \right] \end{aligned}$$

gdje se \underline{i}_s i \underline{i}_s^* nazivaju *kompleksnim vektorom statorske struje* i *konjugirano-kompleksnim vektorom statorske struje*.

- Jednadžba protjecanja statora:

$$\Theta_s(\alpha, t) = \frac{N_s}{2} \left[\underline{i}_s(t) e^{-j\alpha} + \underline{i}_s^*(t) e^{j\alpha} \right].$$

8.2.2. Jednadžbe rotorskog kruga

- Jednadžba magnetskog polja rotorskog kruga:

$$\Theta_r(\beta, t) = N_r \left[i_{r1}(t) \cos \beta + i_{r2} \cos(\beta - \gamma) + i_{r3} \cos(\beta - 2\gamma) \right]$$

- Uvođenjem kompleksnog vektora struja, rotorsko magnetsko polje poprima oblik:

$$\Theta_r(\beta, t) = \frac{N_r}{2} \left[\underline{i}_r(t) e^{-j\beta} + \underline{i}_r^*(t) e^{j\beta} \right]$$

- Djelovanje rotorskog magnetskog polja na stator – prijelaz iz rotorskog u statorski koordinatni sistem ($\beta = \alpha - \varepsilon$):

$$\Theta_r(\alpha, \varepsilon, t) = \frac{N_r}{2} \left[\underline{i}_r(t) e^{-j(\alpha - \varepsilon)} + \underline{i}_r^*(t) e^{j(\alpha - \varepsilon)} \right]$$

8.2.3. Ukupni magnetski tok (protjecanje)

- Ukupni magnetski tok (protjecanje u zračnom rasporu stroja) dobije se zbrajanjem statorskog i rotorskog magnetskog polja:

$$\Theta(\alpha, \varepsilon, t) = \Theta_s(\alpha, t) + \Theta_r(\alpha, \varepsilon, t).$$

- Budući da uz veliku permeabilnost željeza (limovi statora i rotora) ukupno protjecanje savladava magnetski napon samo u zračnom rasporu ukupne širine $2h$ (nema slabljenja polja u limovima), slijedi:

$$\Theta(\alpha, \varepsilon, t) = 2hH_0,$$

gdje je H_0 jakost magnetskog polja u zračnom rasporu [A/m]. Između indukcije i jakosti mag. polja vrijedi odnos:

$$B = \mu_0 H_0. \quad \mu_0 - \text{permeabilnost zraka.}$$

Ukupni magnetski tok (protjecanje)

- Indukcija u zračnom rasporu stroja iznosi:

$$B(\alpha, \varepsilon, t) = \frac{\mu_0}{2h} [\Theta_s(\alpha, t) + \Theta_r(\alpha, \varepsilon, t)]$$

- Izraz za indukciju u namotu statora glasi:

$$B(\alpha, \varepsilon, t) = \frac{\mu_0}{2h} [\Theta_s(\alpha, t) + k\Theta_r(\alpha, \varepsilon, t)]$$

gdje je k koeficijent veze rotorskog protjecanja i statorske indukcije, koji je uvijek manji od jedan.

- Svaki vodič ima kosinusnu raspodjelu polja po obodu, a vodiči statora i rotora imaju kosinusnu gustoću raspodjele namatanja po obodu (*najviše ih je u osi faze, a najmanje okomito na os*).

8.2.4. Ulančeni magnetski tok statora

- Pri proračunu ulančenog toka statorskog namota pretpostavlja se da je **namot kontinuirano raspodijeljen po obodu stroja**.
- U tom slučaju izraz za prirast broja zavoja u području infinitezimalnog ugla $d\lambda$ glasi:

$$dN_s = \frac{N_s}{2} \cdot \cos \lambda \cdot d\lambda,$$

gdje je ugao λ ugao s obzirom na vodiče faze (za fazu 1 $\lambda=0^\circ$ kada je $\alpha=90^\circ$, za fazu 2 $\lambda=0^\circ$ kada je $\alpha = 90^\circ + 120^\circ$, itd.

- Integriranjem prirasta broja zavoja u području $(-90^\circ, +90^\circ)$, koji obuhvaća cijeli namot jedna faze, dobije se:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dN_s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{N_s}{2} \cos \lambda d\lambda.$$

Ulančeni magnetski tok statora

- Diferencijal ulančenog toka iznosi:

$$d\Psi = B \cdot dS \cdot dN_s = B \cdot l \cdot r \cdot d\alpha \cdot \frac{N_s}{2} \cos \lambda \cdot d\lambda.$$

gdje je: dS infinitezimalna površina rotora, l efektivna dužina željeza stroja i r polumjer rotora.

- Za određivanje ulančenog magnetskog toka statorskog namota 1 u trenutku t potrebno je provesti dvostruko integriranje.
- Jedno se integriranje provodi po uglu α , čime se dobije ulančeni magnetski tok namota koji se nalaze na mjestu ugla λ , a drugim integriranjem po uglu λ dobije se ukupni ulančeni tok faze 1 (statorskog namota):

$$\Psi_{s1}(t) = \frac{N_s}{2} \int_{\lambda=-\frac{\pi}{2}}^{\lambda=\frac{\pi}{2}} \cos \lambda \left[\int_{\alpha=\lambda-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=\lambda+\frac{\pi}{2}} l \cdot r \cdot B_s(\alpha, \varepsilon, t) d\alpha \right] d\lambda.$$

Ulančeni magnetski tok statora

- Daljnim sređivanjem dobiva se:

$$\Psi_{s1}(t) = \frac{N_s^2 lr \mu_0}{16h} \int_{\lambda=-\frac{\pi}{2}}^{\lambda=\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{\alpha=\lambda-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=\lambda+\frac{\pi}{2}} \underline{i}_{-s}(t) e^{-j\alpha} + \underline{i}_{-s}^*(t) e^{j\alpha} d\alpha \right\} (e^{j\lambda} + e^{-j\lambda}) d\lambda$$

$$+ k \frac{N_s N_r lr \mu_0}{16h} \int_{\lambda=-\frac{\pi}{2}}^{\lambda=\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{\alpha=\lambda-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=\lambda+\frac{\pi}{2}} \underline{i}_{-s}(t) e^{-j(\alpha-\varepsilon)} + \underline{i}_{-s}^*(t) e^{j(\alpha-\varepsilon)} d\alpha \right\} (e^{j\lambda} + e^{-j\lambda}) d\lambda.$$

- Nakon provedenog integriranja dobiva se:

$$\Psi_{s1}(t) = \frac{N_s^2 lr}{2h} \frac{\pi}{4} \mu_0 (\underline{i}_{-s}(t) + \underline{i}_{-s}^*(t)) + \frac{N_s N_r lr}{2h} \frac{\pi}{4} \mu_0 (\underline{i}_{-r}(t) e^{j\varepsilon} + \underline{i}_{-r}^*(t) e^{-j\varepsilon}).$$

Ulančeni magnetski tok statora

- Uvođenjem oznake za induktivitet statora L_s i međuinuktivitet statora i rotora L_{sR} dobiva se:

$$\frac{L_s}{3} = \frac{N_s^2 l r \pi}{2h} \frac{\pi}{4} \mu_0,$$

- induktivitet jedne faze statora.

$$\frac{L_{sr}}{3} = k \frac{N_s N_r l r \pi}{2h} \frac{\pi}{4} \mu_0,$$

- međuinuktivitet statora.

izraz za ulančeni tok poprima oblik:

$$\Psi_{s1}(t) = \frac{L_s}{3} (\underline{i}_s(t) + \underline{i}_s^*(t)) + \frac{L_{sr}}{3} (\underline{i}_r(t) e^{j\varepsilon} + \underline{i}_r^*(t) e^{-j\varepsilon}).$$

- Ulančeni tok 2. i 3. faze (statorske namote) dobije se integriranjem po uglu λ u granicama $\gamma \pm \pi/2$ i $2\gamma \pm \pi/2$:

$$\Psi_{s2}(t) = \frac{L_s}{3} (\underline{i}_s(t) e^{-j\gamma} + \underline{i}_s^*(t) e^{j\gamma}) + \frac{L_{sr}}{3} (\underline{i}_r(t) e^{j(\varepsilon-\gamma)} + \underline{i}_r^*(t) e^{-j(\varepsilon-\gamma)}).$$

Ulančeni magnetski tok statora

$$\Psi_{s3}(t) = \frac{L_s}{3} \left(\underline{i}_s(t) e^{-j2\gamma} + \underline{i}_s^*(t) e^{j2\gamma} \right) + \frac{L_{sr}}{3} \left(\underline{i}_r(t) e^{j(\varepsilon-2\gamma)} + \underline{i}_r^*(t) e^{-j(\varepsilon-2\gamma)} \right).$$

- Ukupni ulančeni magnetski tok dobiva se zbrajanjem ulančenih tokova sve tri faze:

$$\underline{\Psi}_s(t) = \Psi_{s1}(t) + \Psi_{s2}(t) + \Psi_{s3}(t).$$

- Vektor ulančenog toka fizikalno predstavlja rezultirajući magnetski tok u zračnom rasporu uz obod statora stroja.
- Komponente vektora ulančenog toka vremenski se mijenjaju pa za promatrača koji miruje u koordinatnom sistemu statora ovaj tok poprima različite položaje u prostoru.
- U slučaju kada se komponente ovog vektora mijenjaju po sinusoidalnom zakonu, s međusobnim faznim pomakom od 120° , vektor ulančenog toka predstavlja rotirajuće magnetsko polje statora.

8.2.5. Ulančeni magnetski tok rotora

- Uzimajući u obzir definicije struja ulančeni tok poprima oblik:

$$\Psi_s(t) = L_s \underline{i}_s(t) + L_{sr} \underline{i}_r(t) \frac{L_s}{3} e^{j\varepsilon}.$$

- Do izraza za kompleksni vektor ulančenog toka rotora dolazi se na identičan način kao i do izraza za kompleksni vektor ulančenog toka statora.
- Pri tome statorsko protjecanje treba izraziti u koordinatnom sistemu rotora.
- Transformacijom $\alpha = \beta + \varepsilon$ (ugao statora α prelazi u $\beta + \varepsilon$ u rotorskom koordinatnom sistemu) slijedi:

$$\Theta_s(\beta, \varepsilon, t) = \frac{N_s}{3} \left(\underline{i}_s(t) e^{-j(\beta+\varepsilon)} + \underline{i}_s^*(t) e^{j(\beta+\varepsilon)} \right).$$

Ulančeni magnetski tok rotora

- Uz pretpostavku iste raspodjele statorskih i rotorskih namota može se provesti dvostruka integracija izraza sa slajda 21 (integriranje po strujnom obloku oko površine rotora), čime se dobije izraz za ulančeni tok rotora:

$$\Psi_{r1}(t) = \frac{L_s}{3} \left(\underline{i}_r(t) + \underline{i}_r^*(t) \right) + \frac{L_{sr}}{3} \left(\underline{i}_s(t) e^{-j\varepsilon} + \underline{i}_s^*(t) e^{j\varepsilon} \right).$$

pri čemu je induktivitet faze rotora dan izrazom:

$$\frac{L_r}{3} = \frac{N_r^2 l r \pi}{2h} \frac{\mu_0}{4}.$$

- Ulančeni tokovi 2. i 3. faze rotora opisani su izrazima:

$$\Psi_{r2}(t) = \frac{L_s}{3} \left(\underline{i}_r(t) e^{-j\gamma} + \underline{i}_r^*(t) e^{j\gamma} \right) + \frac{L_{sr}}{3} \left(\underline{i}_s(t) e^{-j(\varepsilon+\gamma)} + \underline{i}_s^*(t) e^{j(\varepsilon+\gamma)} \right).$$

Ulančeni magnetski tok rotora

- Ulančeni tok 3. faze rotora ima oblik:

$$\Psi_{r3}(t) = \frac{L_s}{3} \left(\underline{i}_r(t) e^{-j2\gamma} + \underline{i}_r^*(t) e^{j2\gamma} \right) + \frac{L_{sr}}{3} \left(\underline{i}_s(t) e^{-j(\varepsilon+2\gamma)} + \underline{i}_s^*(t) e^{j(\varepsilon+2\gamma)} \right).$$

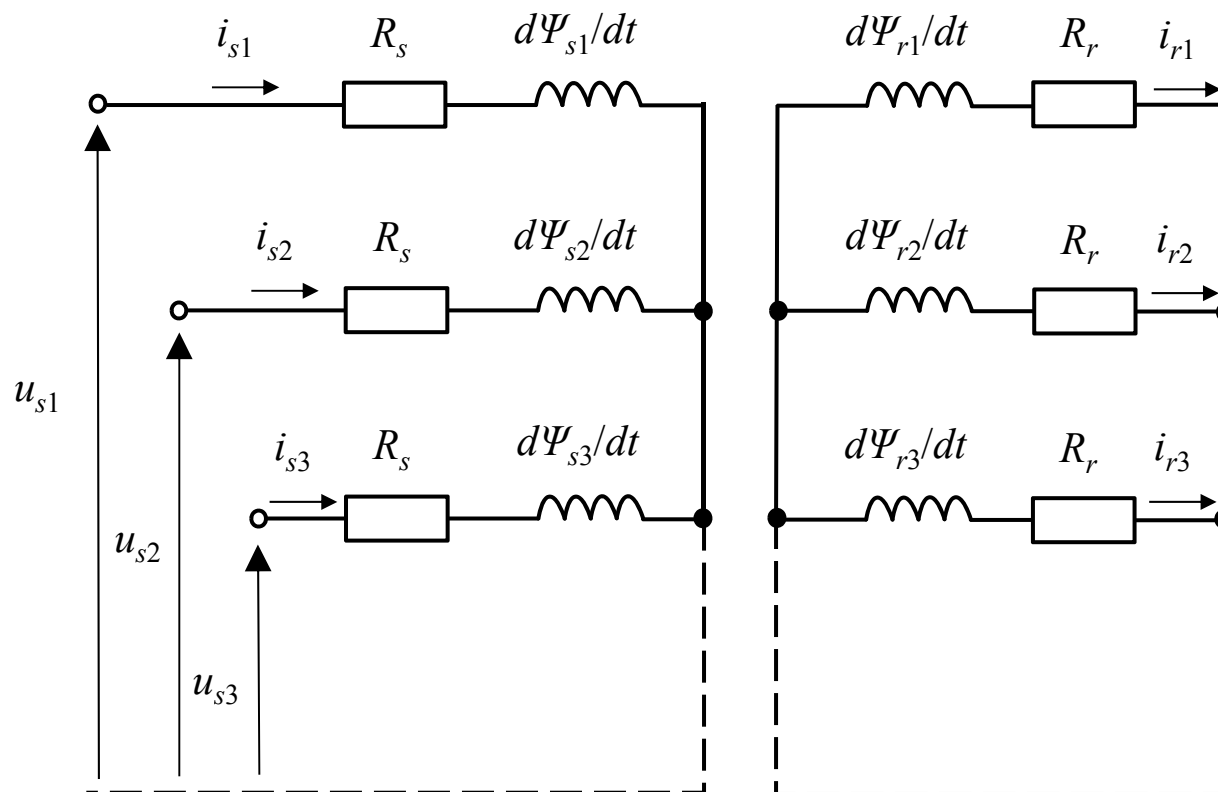
- Vektorski oblik magnetskog polja

$$\underline{\Psi}_r(t) = \Psi_{r1}(t) + \Psi_{r2}(t) e^{j\gamma} + \Psi_{r3}(t) e^{j2\gamma} = L_r \underline{i}_r(t) + L_{sr} \underline{i}_s(t) e^{-j\varepsilon}.$$

- Vektor $\underline{\Psi}_r$ fizikalno predstavlja rezultirajući magnetski tok u zračnom rasporu uz obod rotora stroja.
- Komponente ovog vektora vremenski se mijenjaju, pa za promatrača koji miruje u koordinatnom sistemu rotora, ovaj tok poprima različite položaje u prostoru.
- Za promatrača u koordinatnom sistemu statora rezultirajuće magnetko polje rotora vrti se brzinom rotiranja tog polja u koordinatnom sistemu rotora, uvećanom za brzinu vrtnje rotora.

8.2.6. Naponske jednačbe asinhronog motora

- Ulančeni tokovi statora i rotora koriste se u naponskim jednačbama asinhronog motora.
- Tim jednačbama opisuje se nadomjesna shema statorskih i rotorskih namota.



Naponske jednačbe asinhronog motora

- Naponske jednačbe namota statora:

$$R_s i_{s1}(t) + \frac{d\Psi_{s1}(t)}{dt} = u_{s1}(t),$$

$$R_s i_{s2}(t) + \frac{d\Psi_{s2}(t)}{dt} = u_{s2}(t),$$

$$R_s i_{s3}(t) + \frac{d\Psi_{s3}(t)}{dt} = u_{s3}(t),$$

$$\underline{i}_s(t) = i_{s1}(t) + i_{s2}(t)e^{j\gamma} + i_{s3}(t)e^{j2\gamma}$$

$$\underline{u}_s(t) = u_{s1}(t) + u_{s2}(t)e^{j\gamma} + u_{s3}(t)e^{j2\gamma}.$$

- Kombiniranjem gornjih izraza dobiva se

$$R_s \underline{i}_s(t) + \frac{d\Psi_s(t)}{dt} = R_s \underline{i}_s(t) + L_s \frac{d\underline{i}_s(t)}{dt} + L_{sr} \frac{d}{dt} (\underline{i}_r e^{j\epsilon}) = \underline{u}_s(t).$$

Naponske jednačbe asinhronog motora

- Ako se uzme u obzir da je $d\varepsilon/dt=\omega$, prethodna jednačba poprima oblik:

$$R_s \underline{i}_s(t) + L_s \frac{d\underline{i}_s(t)}{dt} + L_{sr} \frac{d\underline{i}_r(t)}{dt} e^{j\varepsilon} + j\omega L_{sr} \underline{i}_r e^{j\varepsilon} = \underline{u}_s(t).$$

- Treći član na lijevoj strani jednačbe predstavlja inducirani napon u statoru prouzročen vremenskom promjenom vektora rotorskih struja, koji je u koordinatnom sistemu statora zakrenut za ugao ε .
- Četvrti član predstavlja inducirani napon u statoru prouzročen vrtnjom rotora protjecanog strujom rotora \underline{i}_r .
- Budući da se u jednačbama mehaničkog kretanja pojavljuje moment motora i taj je moment potrebno izraziti preko već uvedenih veličina za struje, napone i parametre stroja.

Naponske jednađbe asinhronog motora

- Naponske jednađbe rotorskih namota:

$$R_r i_{r1}(t) + \frac{d\Psi_{r1}(t)}{dt} = 0,$$

$$R_r i_{r2}(t) + \frac{d\Psi_{r2}(t)}{dt} = 0,$$

$$R_r i_{r3}(t) + \frac{d\Psi_{r3}(t)}{dt} = 0.$$

- Ako se druga jednađba pomnoži s $e^{j\varepsilon}$, a treća s $e^{j2\varepsilon}$, te se sve tri jednađbe zbroje, dobije se vektorska jednađba rotorskih namota:

$$R_r \underline{i}_r(t) + \frac{d\underline{\Psi}_r(t)}{dt} = R_r \underline{i}_r(t) + L_r \frac{d\underline{i}_r(t)}{dt} + L_{sr} \frac{d}{dt} (\underline{i}_s e^{-j\varepsilon}) = 0.$$

gdje su $\underline{\Psi}_r(t)$ i $\underline{i}_r(t)$ definirani u koordinatnom sistemu rotora.

Naponske jednačbe asinhronog motora

- Daljnjim sređivanjem dobiva se:

$$R_r \underline{i}_r(t) + L_r \frac{d\underline{i}_r(t)}{dt} + L_{sr} \frac{d\underline{i}_s(t)}{dt} e^{-j\varepsilon} + j\omega L_{sr} \underline{i}_s e^{-j\varepsilon} = 0.$$

- Vremenska promjena vektora struja statora i brzina vrtnje statora u odnosu na rotor uzrokuje napone u namotima rotora određene trećim i četvrtim članom u prethodnoj jednačbi.
- Navedene naponske jednačbe namota statora i rotora opisuju elektromagnetske pojave u simetričnom trofaznom stroju kako u stacionarnim tako i u prijelaznim stanjima.
- Da bi asinhroni motor, kao elektromehanički sistem bio potpuno opisan, potrebno je navedenim jednačbama dodati jednačbu mehaničkog kretanja.

8.2.7. Moment asinhronog motora

- Moment proizvodi rotacijsko kretanje motora, a računa se kao posljedica djelovanja sila između statora i rotora.
- Ove sile nastaju međusobnim djelovanjem magnetskog polja statora i rotorskih struja.
- Statorsko protjecanje proizvodi u zračnom rasporu uz sam rotor indukciju:

$$B_{rs}(\alpha, t) = k\mu_0 \frac{\Theta_s(\alpha, t)}{2h} = \frac{kN_s\mu_0}{4h} (\underline{i}_s(t)e^{-j\alpha} + \underline{i}_s^*(t)e^{j\alpha}).$$

- Izraz za indukciju izražen u koordinatnom sistemu rotora glasi:

$$B_{rs}(\beta, \varepsilon, t) = \frac{kN_s\mu_0}{4h} (\underline{i}_s(t)e^{-j(\beta+\varepsilon)} + \underline{i}_s^*(t)e^{j(\beta+\varepsilon)}).$$

- Za računanje momenta koristi se **funkcija strujnog obloga**, odnosno struja po jedinici obodne dužine rotora, odnosno statora.

Moment asinhronog motora

- Zbog simetričnog rasporeda namota, i uz pretpostavku njihove jednolike raspodjele, funkcija strujnog obloga predočena je sinusoidalnom veličinom.
- Prethodno definirano protjecanje stroja, kao zbroj svih obuhvaćenih struja na zamišljenoj petlji koja jednom stranom prolazi kroz zračni prostor na mjestu α , a drugom stranom na dijametralno suprotnom mjestu raspora, dva puta je veća od protjecanja koje se definira kao integral strujnog obloga:

$$\Theta = \int_{x=0}^x A dx.$$

- Ako se protjecanje definira kao integral strujnog obloga, tada ono predstavlja zbroj obuhvaćenih struja u zamišljenoj petlji koja jednom stranom prolazi kroz zračni raspor na mjestu gdje te struje ne daju jakost polja, a drugom stranom na mjestu α koje promatramo.

Moment asinhronog motora

- Dakle, protjecanje rotora predstavlja dvostruki iznos integrala strujnog obloga po obodu rotora $r\beta$.
- Zbog toga je strujni oblog jednak polovini derivacije protjecanja po obodu rotora:

$$A_r(\beta, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta_r(\beta, t)}{\partial (r\beta)}.$$

- Nakon uvrštavanja izraza za protjecanje rotora dobije se za strujni oblog rotora:

$$A_r(\beta, t) = -j \frac{N_r}{4r} (\underline{i}_r e^{-j\beta} - \underline{i}_r^* e^{j\beta}).$$

- Sila koja djeluje na element površine rotora jednaka je umnošku indukcije B_{rs} , dužine rotora i struje $A_r d(r\beta)$:

$$dF = B_{rs}(\beta, \varepsilon, t) \cdot l \cdot A_r(\beta, t) \cdot d(r\beta).$$

Moment asinhronog motora

- Uz indukciju definiranu tako da izlazi iz površine rotora i strujni oblog definiran tako da struja teče od promatrača prema suprotnoj strani motora, sila dF djeluje u suprotnom smjeru od pozitivno definiranog smjera uglova.
- Zbog toga moment treba računati s negativnim predznakom, tj. za jedan par polova vrijedi:

$$dM' = -r \cdot dF.$$

- Ukupni moment za p_m pari polova iznosi:

$$M(t) = -p_m r^2 l \int_0^{2\pi} B_{rs}(\beta, \varepsilon, t) A_r(\beta, t) d\beta.$$

Moment asinhronog motora

- Uvrštavanjem izraza za indukciju i strujni oblog rotora u gornju jednadžbu i nakon provođenja integriranja, dobiva se izraz za moment:

$$M(t) = p_m \frac{L_{sr}}{3\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\underline{i}_s \underline{i}_r^* e^{-j\varepsilon} - \underline{i}_s^* \underline{i}_r e^{j\varepsilon}}{2j} d\beta = \frac{2}{3} p_m L_{sr} \frac{\underline{i}_s \underline{i}_r^* e^{-j\varepsilon} - \underline{i}_s^* \underline{i}_r e^{j\varepsilon}}{2j}.$$

- Ovaj izraz odgovara vektorskom produktu, koji se pomoću kompleksnih veličina izražava na sljedeći način:

$$M(t) = \frac{2}{3} p_m L_{sr} I_m \{ \underline{i}_s(t) [\underline{i}_r e^{j\varepsilon}]^* \}.$$

- Naponske jednadžbe motora mogu se jednostavnije izraziti uvođenjem pojma glavnih induktiviteta statora i rotora (L_{hs} , L_{hr}) te koeficijenata rasipanja statora i rotora (σ_s , σ_r).

8.2.8. Pojednostavljeni model asihronog motora

- Induktivitet statora i rotora te njihov međuinduktivitet povezani su s glavnim induktivitetima i koeficijentima rasipanja izrazima:

$$L_s = (1 + \sigma_s)L_{hs}, \quad L_r = (1 + \sigma_r)L_{hr}, \quad L_{sr} = \sqrt{L_{hs} + L_{hr}}.$$

- Reduciranje rotorskih veličina na stranu statora provodi se kod asinhronih motora tako da se uz jednake brojeve faza i utora izjednače i brojevi zavoja statorskih i rotorskih namota.
- U tom slučaju ($N_s=N_r$) jednaki su i glavni induktiviteti statora i rotora:

$$L_{hs} = L_{hr} = L_{sr} = L_h,$$

pa izrazi za induktivitete statora i rotora glase:

$$L_s = (1 + \sigma_s)L_h,$$

$$L_r = (1 + \sigma_r)L_h.$$

Pojednostavljeni model asinhronog motora

- Pojednostavljeni opis asinhronog motora glasi:

$$R_s \underline{i}_s(t) + L_s \frac{d\underline{i}_s(t)}{dt} + L_h \frac{d}{dt} (\underline{i}_r(t) e^{j\varepsilon}) = \underline{u}_s(t),$$

$$R_r \underline{i}_r(t) + L_r \frac{d\underline{i}_r(t)}{dt} + L_h \frac{d}{dt} (\underline{i}_s e^{-j\varepsilon}) = 0,$$

$$\frac{2}{3} p_m L_h I_m \{ \underline{i}_s(t) [\underline{i}_r e^{j\varepsilon}]^* \} = M_t(\varepsilon, \Omega, t) + J_u \frac{d\Omega}{dt},$$

$$\omega = \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

- Ovaj matematički model vrijedi za proizvoljne oblike struja, napona i momenata tereta.
- Svakoj od vektorskih varijabli u izrazima odgovaraju dvije skalarne jednačbe, jer su varijable dvodimenzionalni vektori.

Pojednostavljeni model asihronog motora

- Trenutačne vrijednosti struja mogu se dobiti iz vektorskog prikaza uz $\gamma=120^\circ$:

$$\underline{i}_s(t) = \frac{3}{2} i_{s1}(t) + j \frac{\sqrt{3}}{2} [i_{s2}(t) - i_{s3}(t)].$$

- Iz ovog izraza slijedi:

$$\begin{aligned} i_{s1}(t) &= \frac{2}{3} \operatorname{Re}\{\underline{i}_s(t)\}, \\ i_{s2}(t) &= \frac{2}{3} \operatorname{Re}\{\underline{i}_s(t)e^{j240^\circ}\}, \\ i_{s3}(t) &= \frac{2}{3} \operatorname{Re}\{\underline{i}_s(t)e^{j120^\circ}\}. \end{aligned}$$

8.3. Stacionarni režim rada motora

- Sistem jednačbi asinhronog motora (naponske i momentne) predstavlja temeljne relacije za istraživanje dinamičkih pojava i stacionarnih stanja u motoru.
- Sinusoidni simetrični trofazni sistem napona napajanja kružne frekvencije ω_1 s efektivnom vrijednošću faznog napona U_s može se napisati u sljedećem obliku (φ_1 je fazni pomak struje prve faze rotora u odnosu na nulu vremenske osi):

$$u_{s1}(t) = \sqrt{2}U_s[\cos(\omega_1 t + \varphi_1)] = \frac{\sqrt{2}}{2}U_s[e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{-j(\omega_1 t + \varphi_1)}]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}[U_s e^{j\omega_1 t} + U_s^* e^{-j\omega_1 t}],$$

$$u_{s2}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}[U_s e^{j(\omega_1 t - \gamma)} + U_s^* e^{-j(\omega_1 t - \gamma)}],$$

$$u_{s3}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}[U_s e^{j(\omega_1 t - 2\gamma)} + U_s^* e^{-j(\omega_1 t - 2\gamma)}], \quad \underline{U}_s = U_s e^{j\varphi_1}, \quad \underline{U}_s^* = U_s e^{-j\varphi_1}.$$

Stacionarni režim rada motora

- Ukupni vektor napona dobije se kao suma triju faznih napona:

$$\underline{u}_s(t) = u_{s1}(t) + u_{s2}(t)e^{j\gamma} + u_{s3}(t)e^{j2\gamma} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \underline{U}_s e^{j\omega_1 t}.$$

- Ovaj izraz predstavlja vektor konstantnog iznosa koji rotira kružnom frekvencijom ω_1 .
- Statorske i rotorske struje u stacionarnom stanju, pri napajanju motora simetričnim trofaznim naponima, također su simetrične.
- Kompleksni vektor struje statora može se izraziti u obliku:

$$\underline{i}_s(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \underline{I}_s e^{j\omega_1 t}.$$

$$\underline{I}_s = I_s e^{j\varphi_1} e^{-j\varphi},$$

gdje je I_s efektivna vrijednost struje i φ fazni pomak statorske struje prema statorskom naponu.

Stacionarni režim rada motora

- Budući da se rotor motora vrti ugaonom brzinom ω , odnosno kružnom frekvencijom Ω u statorskom polju frekvencije ω_1 , frekvencija rotorskih struja u stacionarnom stanju iznosi:

$$\omega_2 = \omega_1 - p_m \Omega = \omega_1 - \omega.$$

- Prema tome izrazi za struje rotora i ukupnu struju rotora glase:

$$i_{r1}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} [\underline{I}_r e^{j\omega_2 t} + \underline{I}_r^* e^{-j\omega_2 t}],$$

$$i_{r2}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} [\underline{I}_r e^{j(\omega_2 t - \gamma)} + \underline{I}_r^* e^{-j(\omega_2 t - \gamma)}],$$

$$i_{r3}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} [\underline{I}_r e^{j(\omega_2 t - 2\gamma)} + \underline{I}_r^* e^{-j(\omega_2 t - 2\gamma)}],$$

$$\underline{i}_r = i_{r1} + i_{r2} e^{j\gamma} + i_{r3} e^{j2\gamma} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \underline{I}_r e^{j(\omega_1 - \omega)t}.$$

Stacionarni režim rada motora

- Kompleksni vektor rotorske struje prema prethodnoj relaciji izražen je u rotorskom koordinatnom sistemu.
- Pri izražavanju rotorskih struja u statorskom koordinatnom sistemu potrebno je izraze za te struje pomnožiti sa $e^{j\varepsilon}$, jer je rotor zakrenut prema statoru za ugao ε .
- Osim toga u stacionarnom stanju je $\varepsilon = \omega t$, pa se dobije:

$$\underline{i}_r e^{j\varepsilon} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \omega_1 \underline{I}_r e^{j\omega_1 t}.$$

- Ovaj izraz ukazuje da protjecanje rotora promatrano u koordinatnom sistemu statora rotira istom brzinom kao i statorsko protjecanje.
- Naime, brzini vrtnje rotorskog protjecanja ω_2 , promatrano u koordinatnom sistemu statora, dodaje se brzina vrtnje rotora, pa slijedi $\omega_2 + \omega = \omega_1$.

Stacionarni režim rada motora

- Uvrštavanjem izraza za napone i struje u stacionarnom stanju u naponske jednadžbe statora i rotora dobiva se:

$$(R_s + j\omega_1 \sigma_s L_h) \underline{I}_s + j\omega_1 L_h (\underline{I}_s + \underline{I}_r) = \underline{U}_s,$$

$$[R_r + j(\omega_1 - \omega) \sigma_r L_h] \underline{I}_r + j(\omega_1 - \omega) L_h (\underline{I}_s + \underline{I}_r) = 0.$$

- Dijeljenjem druge jednadžbe sa **klizanjem** S koje je definirano omjerom frekvencije rotorske struje ω_2 i statorskog polja ω_1 :

$$S = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1},$$

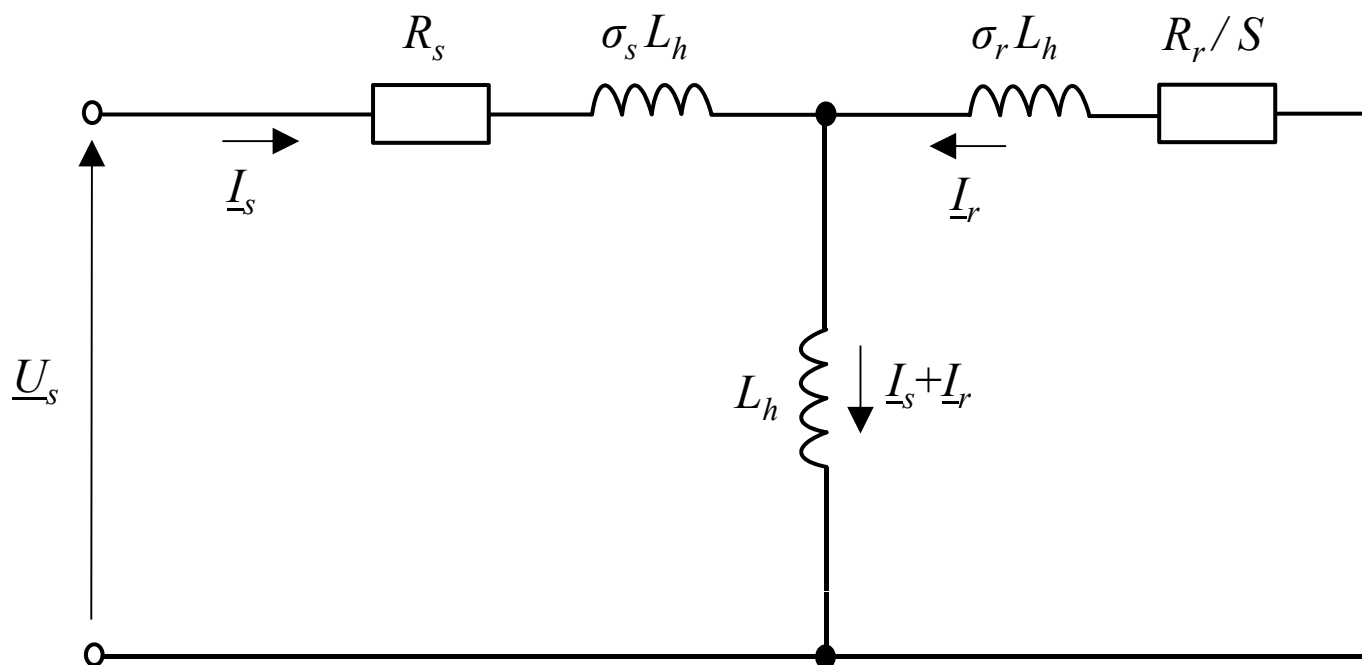
dobije se:

$$(R_s + j\omega_1 \sigma_s L_h) \underline{I}_s + j\omega_1 L_h (\underline{I}_s + \underline{I}_r) = \underline{U}_s,$$

$$\left(\frac{R_r}{S} + j\omega_1 \sigma_r L_h \right) \underline{I}_r + j\omega_1 L_h (\underline{I}_s + \underline{I}_r) = 0.$$

Stacionarni režim rada motora

- Zadnje dvije jednadžbe opisuju odnose među električkim veličinama asinhronog stroja u stacionarnom stanju pri napajanju sinusoidnim naponom i uz konstantan moment tereta.
- Ove jednadžbe mogu se predočiti nadomjesnom shemom asinhronog motora, kako je prikazano na sljedećoj slici.



Stacionarni režim rada motora

- Statorska i rotorska struja mogu se odrediti iz nadomjesne sheme.
- Bitno pojednostavljene izraza dobije se pri **zanemarenju statorskog otpora**.
- Nastala pogreška pri tome nije velika, naročito za strojeve većih snaga kod kojih je statorski otpor malenog iznosa. Uz $R_s = 0$ za impedanciju statora dobiva se:

$$Z_s = j\omega_1 \sigma_s L_h + \frac{j\omega_1 L_h \left(\frac{R_r}{S} + j\omega_1 \sigma_r L_h \right)}{\frac{R_r}{S} + j\omega_1 (1 + \sigma_r) L_h}$$

odnosno,

$$Z_s = j\omega_1 L_s + \frac{1 + j \frac{S\omega_1 L_r}{R_r} \left[1 - \frac{1}{(1 + \sigma_r)(1 + \sigma_s)} \right]}{1 + j \frac{S\omega_1 L_r}{R_r}}$$

Stacionarni režim rada motora

- Izraz u uglatoj zagradi može se pisati na sljedeći način:

$$1 - \frac{1}{(1 + \sigma_r)(1 + \sigma_s)} = 1 - \frac{L_h^2}{L_s L_r} = \sigma.$$

a naziva se **koeficijent ukupnog rasipanja stroja**.

- Koeficijent ukupnog rasipanja ima značajan utjecaj na karakteristike motora. On se može mijenjati konstrukcijom motora (npr. oblik utora).
- Uobičajene njegove vrijednosti su $0.03 < \sigma < 0.1$.
- Zbog pojednostavljenja uvodi se oznaka za **prekretno klizanje** S_p :

$$S_p = \frac{R_r}{\omega_1 L_r \sigma}.$$

Stacionarni režim rada motora

- Prekretno klizanje je proporcionalno radnom otporu rotora, obrnuto proporcionalno rasipnoj reaktanciji $\omega_1 L_r \sigma$, odnosno za dani motor frekvenciji napona napajanja.
- Statorska struja izražena pomoću impedancije ima oblik:

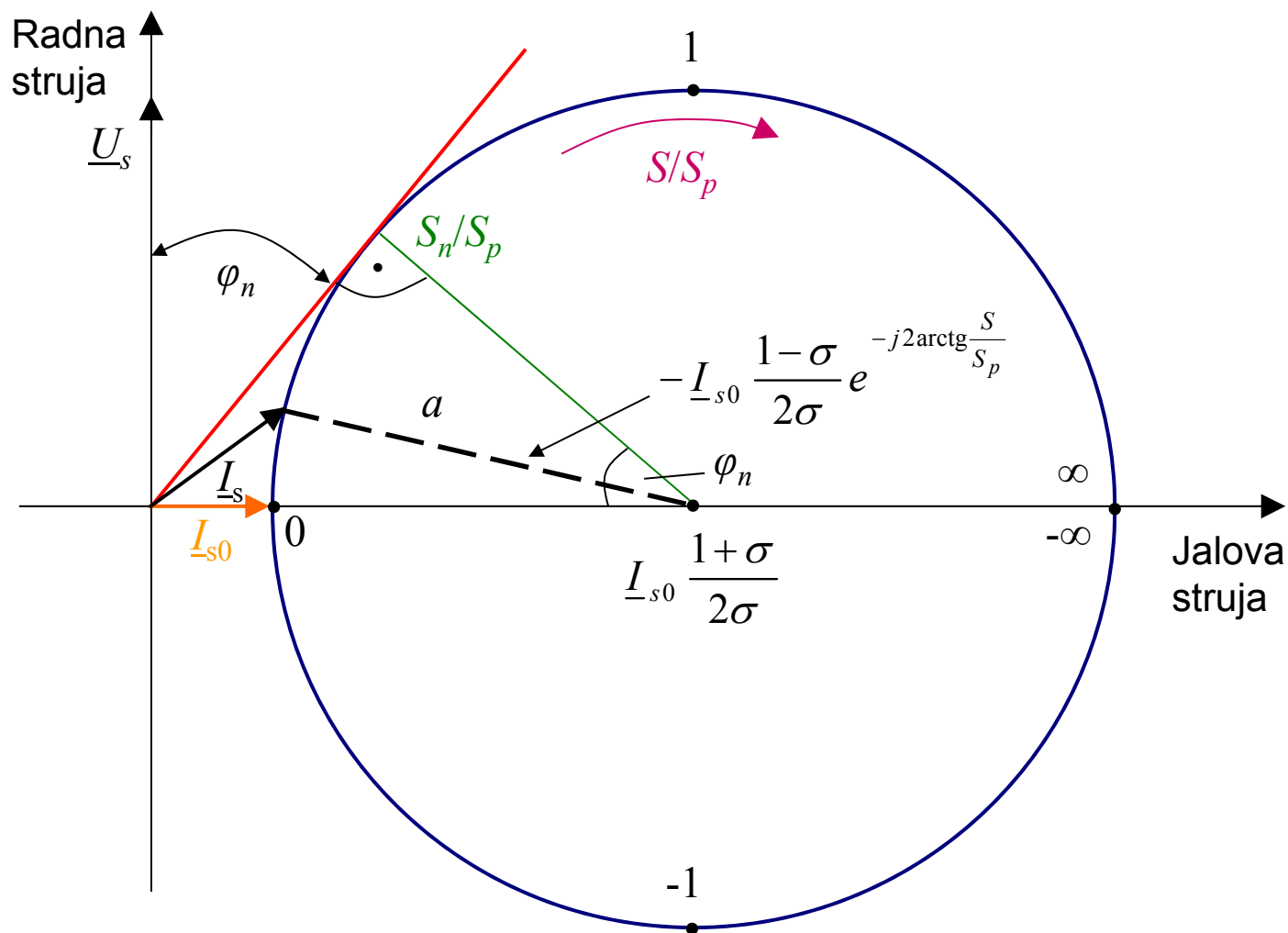
$$\underline{I}_s = \frac{\underline{U}_s}{Z_s} = \frac{\underline{U}_s}{j\omega_1 L_s} \frac{1 + j \frac{1}{\sigma} \frac{S}{S_p}}{1 + j \frac{S}{S_p}}$$

- U idealnom praznom hodu motora brzina vrtnje rotora jednaka je brzini okretnog polja statora ($\omega = \omega_1$) pa je klizanje jednako nuli i struja statora u praznom hodu iznosi $\underline{I}_{s0} = \underline{U}_s / (j\omega_1 L_s)$, tako da struja statora glasi:

$$\underline{I}_s = \underline{I}_{s0} \left(\frac{1 + \sigma}{2\sigma} - \frac{1 - \sigma}{2\sigma} \frac{1 - j \frac{S}{S_p}}{1 + j \frac{S}{S_p}} \right) = \underline{I}_{s0} \left(\frac{1 + \sigma}{2\sigma} - \frac{1 - \sigma}{2\sigma} e^{-j2\arctg\left(\frac{S}{S_p}\right)} \right)$$

Stacionarni režim rada motora

- Prikazom prethodnog izraza u kompleksnoj ravnini dobiva se *kružni dijagram struja statora* asinhronog motora.



Stacionarni režim rada motora

- Struja praznog hoda \underline{I}_{s0} je jalova (zbog zanemarenja radnog otpora statora), tj. fazno je zaokrenuta u odnosu na napon \underline{U}_s za $\pi/2$.
- Struja praznog hoda predstavlja struju magnetiziranja asinhronog motora.
- Za $S > 0$ stroj iz mreže uzima pored jalove i radnu struju, tj. radi kao motor, dok za $S < 0$ stroj radi kao generator.
- Stroj u svakoj radnoj tački uzima iz mreže, pored radne i induktivnu jalovu struju \underline{I}_{s0} koja je neophodna za vlastitu pobudu.
- *Minimalni fazni pomak* φ_n struje statora prema narinutom naponu mreže dobije se u radnoj tački u kojoj vektor struje tangira kružnicu. Tada je *koeficijent snage* $\cos\varphi_n$ maksimalan, i ta tačka se odabire za nominalnu radnu tačku stroja:

$$\cos \varphi_n = \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}.$$

Stacionarni režim rada motora

- Izraz za fazni pomak struje iz

$$\underline{I}_{-s} = \frac{\underline{U}_s}{Z_s} = \frac{\underline{U}_s}{j\omega_1 L_s} \frac{1 + j \frac{1}{\sigma} \frac{S}{S_p}}{1 + j \frac{S}{S_p}}$$

je

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sigma} \frac{S}{S_p}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{S}{S_p}\right).$$

- Deriviranjem po S/S_p i izjednačavanjem s nulom dobije se minimum.
- Izjednačavanjem dobivenog minimuma i geometrijski izračunate vrijednosti φ_n dobije se izraz za **nominalno klizanje**:

$$\frac{S_n}{S_p} = \pm \sqrt{\sigma}.$$

- Koeficijent ukupnog rasipanja σ određuje, dakle, veličinu kružnog dijagrama struje statora i tačku “optimalnog” rada stroja.

Stacionarni režim rada motora

- Izraz za efektivnu vrijednost struje statora normirane efektivnom vrijednošću struje praznog hoda glasi:

$$\frac{I_s}{I_{s0}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sigma} \frac{S}{S_p}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{S}{S_p}\right)^2}}$$

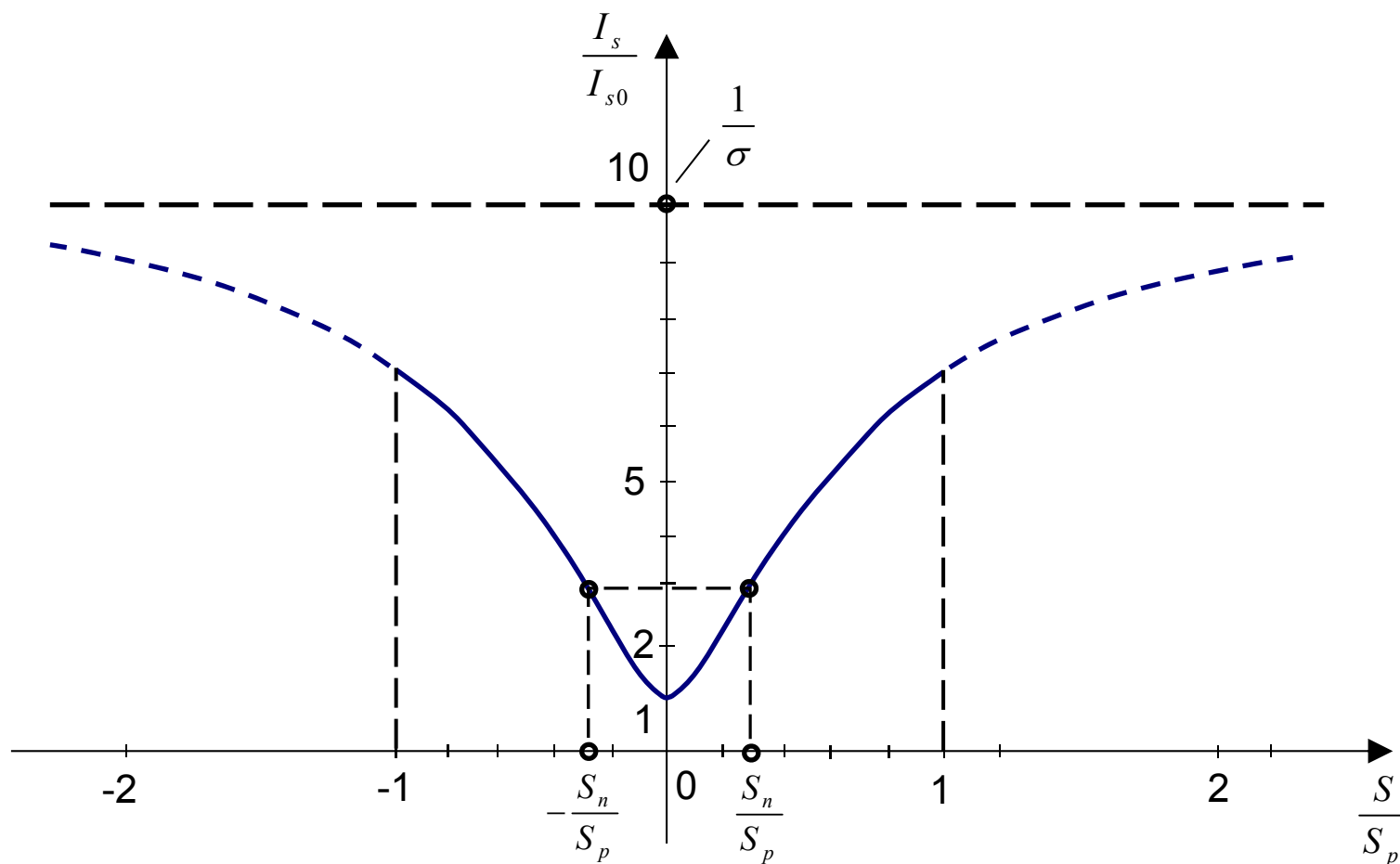
- Nominalna vrijednost struje statora pri nominalnom klizanju ($S=S_n$) iznosi:

$$\frac{I_{sn}}{I_{s0}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$$

- Maksimalni iznos radne struje, a zbog konstantnog iznosa napona ($U_s = \text{konst.}$) i maksimalni iznos radne snage, dobije se pri klizanju $S = \pm S_p$.

Stacionarni režim rada motora

- Ovisnost normirane struje statora o normiranom klizanju, za $\sigma=0.1$, prikazana je na sljedećoj slici.



Stacionarni režim rada motora

- Izraz za moment u stacionarnom stanju dobije se iz opće jednadžbe momenta motora, uvrštavanjem izraza za struje u stacionarnom stanju:

$$M = \frac{2}{3} p_m L_h I_m \left\{ \frac{3\sqrt{2}}{3} \underline{I}_s e^{j\omega_1 t} \frac{3\sqrt{2}}{3} \underline{I}_r^* e^{-j\omega_1 t} \right\} = 3 p_m L_h I_m \left\{ \underline{I}_s \underline{I}_r^* \right\}$$

- Iz nadomjesne sheme asinhronog stroja dobiva se relacija koja povezuje struje rotora i statora:

$$\underline{I}_r = \frac{-j\omega_1 L_h}{\frac{R_r}{S} + j\omega_1 L_r} \underline{I}_s.$$

- Sređivanjem izraza za moment dobiva se izraz:

$$M = 3 p_m \frac{1-\sigma}{2\sigma} \frac{U_s^2}{\omega_1^2 L_s} \frac{2}{\frac{S}{S_p} + \frac{S_p}{S}}.$$

Stacionarni režim rada motora

- Pri prekretnom klizanju ($S=S_p$) motor razvija maksimalni moment, koji se naziva **prekretnim momentom**, a određen je izrazom:

$$M_p = 3p_m \frac{1-\sigma}{2\sigma L_s} \left(\frac{U_s}{\omega_1} \right)^2.$$

- Kombiniranjem dva prethodna izraza dobiva se **Klossova jednačba**:

$$M = \frac{2M_p}{\frac{S}{S_p} + \frac{S_p}{S}}.$$

- Nominalni prekretni moment M_{pn} dobije se uvrštenjem nominalnog napona U_{sn} i nominalne kružne frekvencije ω_{1n} u predzadnji izraz:

$$M = 3p_m \frac{1-\sigma}{2\sigma L_s} \frac{U_{sn}^2}{\omega_{1n}^2 L_s} = 3p_m \frac{1-\sigma}{2\sigma L_s} \left(\frac{U_{sn}}{\omega_{1n}} \right)^2.$$

Stacionarni režim rada motora

- Odnos prekretnog momenta i nominalnog prekretnog momenta je:

$$\frac{M_p}{M_{pn}} = \left(\frac{U_s \omega_{1n}}{U_{sn} \omega_1} \right)^2$$

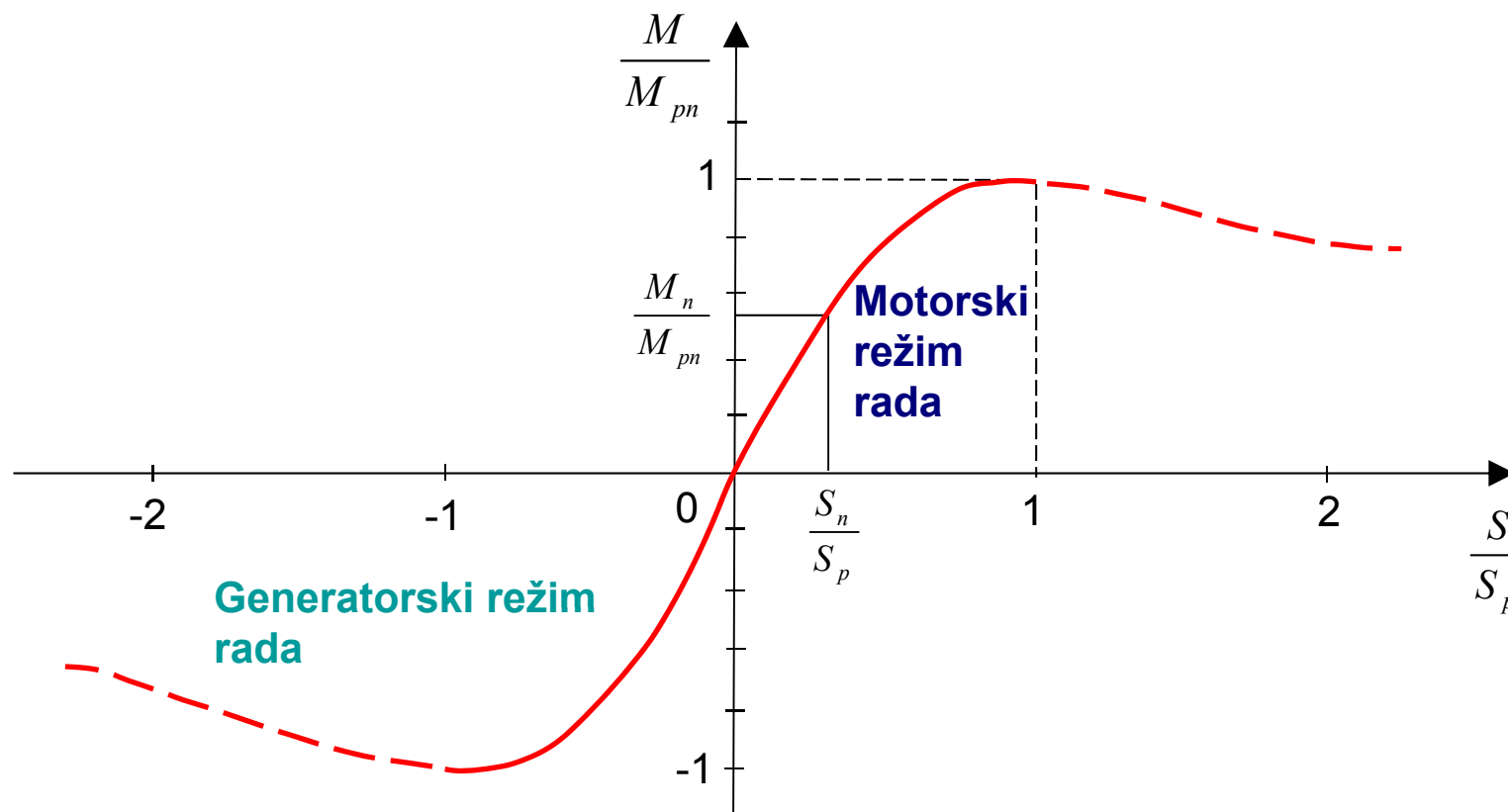
- Na temelju gornjih jednadžbi dobiva se izraz za moment:

$$M = M_{pn} \left(\frac{U_s \omega_{1n}}{U_{sn} \omega_1} \right)^2 \frac{2}{\frac{S}{S_p} + \frac{S_p}{S}}$$

- Ovisnost momenta asinhronog motora o normiranom klizanju prikazana je na sljedećoj slici za slučaj: $R_s=0$; $\sigma=0.1$; $U_s=U_{sn}$; $\omega_1=\omega_{1n}$.
- Asinhroni stroj obično radi u području motorskog režima rada.
- Generatorski režim rada ne primjenjuje se na velikim snagama zbog velike induktivnosti jalove struje kojom bi opterećivao mrežu.
- Taj se režim rada koristi na hidroelektranama malih snaga.
- Generatorski režim pri kočenju se primjenjuje u mnogim pogonima.

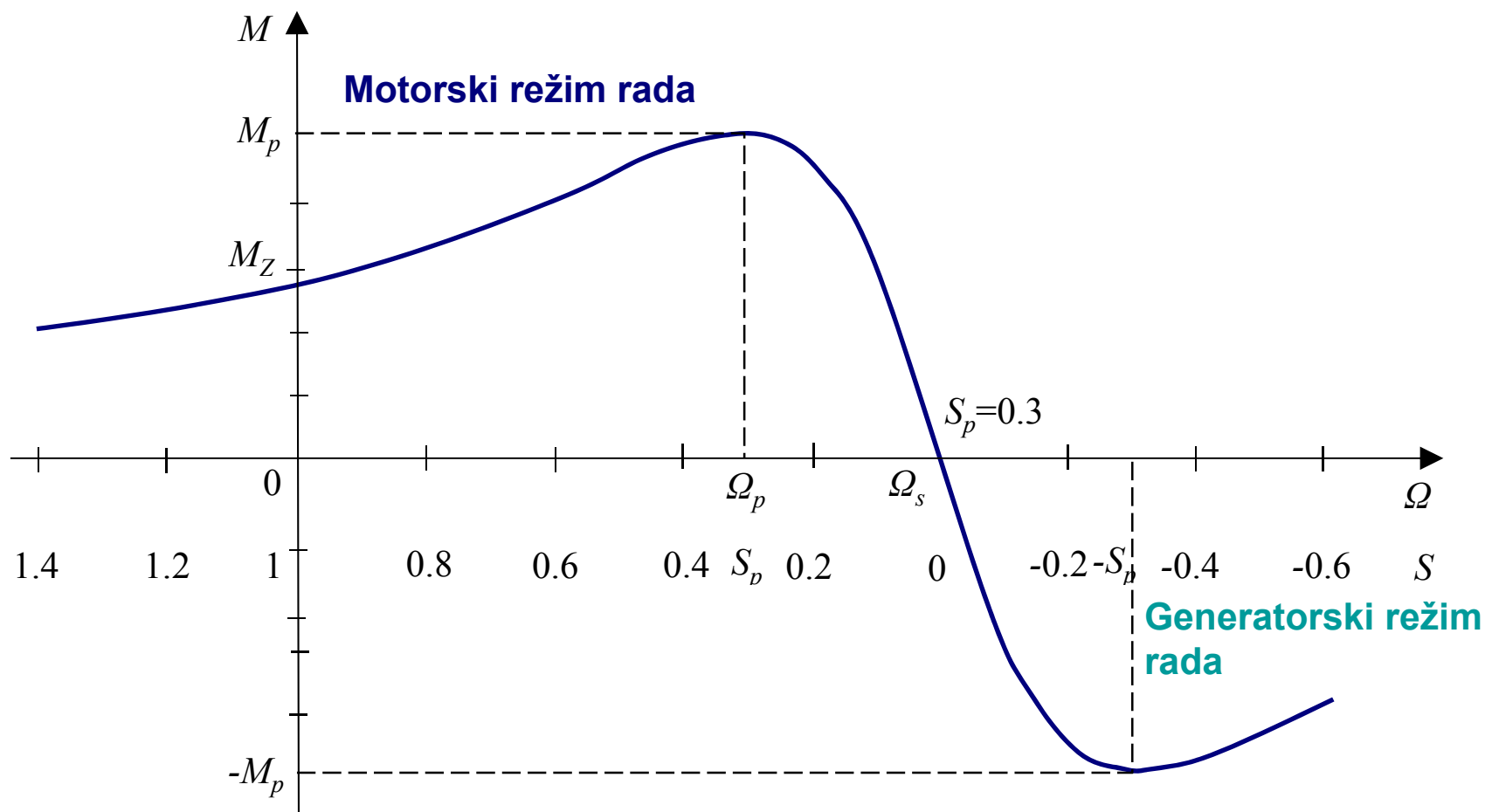
Stacionarni režim rada motora

- Ovisnost normiranog momenta motora o normiranom klizanju, za $\sigma=0.1$, prikazana je na sljedećoj slici.



Stacionarni režim rada motora

- Ovisnost momenta asinhronog motora o brzini vrtnje, odnosno klizanju, dana je na sljedećoj slici.



Stacionarni režim rada motora

- Pri klizanju $S=0$ asinhroni stroj se vrti tačno s brzinom okretnog magnetskog polja ω_1 , koja se naziva sinhronom brzinom vrtnje ($\omega=\omega_s=\omega_1$).
- U rotoru se u tom slučaju ne inducira napon i u stacionarnom stanju ne teče rotorska struja pa je moment motora jednak nuli. To je granična tačka između motorskog i generatorskog režima rada.
- Iz Klossove jednadžbe za $S=1$ ($\Omega=0$) dobije se moment pri pokretanju M_Z (***potezni moment***):

$$M_Z = \frac{2M_p}{\frac{1}{S_p} + S_p} = 2M_p \frac{S_p}{1 + S_p^2}.$$

- Potezni moment određen je prekretnim momentom i prekretnim klizanjem, i najveći je za $S_p=1$. Za $S=S_p$ izraz za moment daje iznos prekretnog momenta ($M=M_p$), a za $S=0$ moment jednak nuli.

Stacionarni režim rada motora

- Ako se za nominalnu radnu tačku odabere ona u kojoj je koeficijent snage maksimalan, tada je odnos nominalnog prekretnog momenta i nominalnog momenta motora dan sa:

$$\frac{M_{pn}}{M_n} = \frac{1 + \sigma}{2\sqrt{\sigma}}$$

- Ovaj izraz predstavlja mjeru za **preopteretivost motora**.
- Motor može stabilno raditi pri velikim klizanjima unutar područja $0 < S < S_p$ i uz momente trenja koji na prelaze prekretni moment (vidjeti prethodnu sliku).
- Zbog zagrijavanja motora, međutim, moment tereta treba biti u trajnom radu manji ili jednak nominalnom momentu motora.
- Iz izraza za prekretni moment motora proizilazi da **rotorski otpor** ne djeluje na njegov iznos. Rotorski otpor se pojavljuje u izrazu za prekretno klizanje, što znači da djeluje samo na položaj ovog momenta.

Stacionarni režim rada motora

- Kliznokolutni asinhroni motori, kojima se u rotorski krug izvana mogu dodati otpornici, koriste upravo ovu mogućnost pomaka prekretnog momenta za podešavanje brzine vrtnje.
- Uz zanemarenje statorskog otpora ukupna radna snaga koju preuzima motor pretvara se preko zračnog rasporeda stroja dijelom u mehaničku snagu, a dijelom u toplinske gubitke.
- Prema nadomjesnoj shemi trofaznog asinhronog stroja radna snaga se može pojaviti samo na R_r/S , pa **ukupna radna snaga motora** iznosi:

$$P_e = 3I_r^2 \frac{R_r}{S}.$$

- Razlika snaga pretvara se u mehaničku snagu, pa vrijedi:

$$P_m = P_e - P_{cu} = 3I_r^2 R_r \frac{1-s}{s}.$$

Stacionarni režim rada motora

- Koeficijent korisnosti u motorskom režimu rada ($0 < S < 1$) iznosi:

$$\eta_m = \frac{P_m}{P_e} = 1 - S = \frac{\omega}{\omega_1} < 1.$$

- Koeficijent korisnosti u generatorskom režimu ($-1 < S < 0$) iznosi:

$$\eta_g = \left| \frac{P_e}{P_m} \right| = \frac{1}{1 - S} = \frac{\omega_1}{\omega} < 1.$$

- Koeficijent korisnosti asinhronog stroja u području motorskog režima rada proporcionalan je brzini vrtnje rotora. To vrijedi u svakom slučaju, pa i u slučaju promjene brzine vrtnje promjenom rotorskog otpora, i u slučaju promjene brzine vrtnje promjenom napona statora.
- U stvarnosti koeficijenti korisnosti asinhronog stroja poprimaju manje vrijednosti od onih koje se dobiju na temelju zadnjih izraza, zbog dodatnih gubitaka koji se nisu uzeli u obzir u tim izrazima.

Primjer 1 – proračun asinhronog motora (1/5)

Četveropolni asinhroni motor spojen u trokut s nominalnim podacima $P_n = 22 \text{ kW}$, $U_n = 380 \text{ V}$, $f_1 = 50 \text{ Hz}$, $\cos\varphi_n = 0.87$, ima sljedeće podatke nadomjesne sheme:

$$R_s = 0.36 \Omega \quad R_r = 0.39 \Omega, \quad X_{s\sigma} = \omega_1 \sigma_s L_h = 0.95 \Omega,$$

$$X_{r\sigma} = \omega_1 \sigma_r L_h = 1.16 \Omega, \quad X_h = \omega_1 L_h = 39 \Omega,$$

Potrebno je odrediti:

- prekretno klizanje i prekretni moment,
- potezni moment,
- nominalnu brzinu vrtnje motora, ako su gubici u namotima rotora pri nominalnom opterećenju $P_{cu} = 520 \text{ W}$,
- nominalnu struju i ukupnu snagu koju motor uzima iz mreže pri nominalnom opterećenju,
- koeficijent korisnosti motora.

Primjer 1 – proračun asinhronog motora (2/5)

Rješenje:

a) Induktivni otpori stroja:

$$X_s = X_h + X_{s\sigma} = 39.95 \Omega, \quad X_r = X_h + X_{r\sigma} = 40.16 \Omega.$$

Koeficijent ukupnog rasipanja iznosi:

$$\sigma = 1 - \frac{L_h^2}{L_s L_r} = 1 - \frac{X_h^2}{X_s X_r} = 1 - \frac{39^2}{39.95 \cdot 40.16} = 0.052.$$

Prekretno klizanje i prekretni moment dobiju se prema izrazima:

$$S_p = \frac{R_r}{\sigma \omega_1 L_r} = \frac{R_r}{\sigma X_r} = \frac{0.39}{0.052 \cdot 40.16} = 0.187.$$

$$M_p = 3p_m \frac{1-\sigma}{2\sigma L_s} \left(\frac{U_s}{\omega_1} \right)^2 = 3p_m \frac{1-\sigma}{2\sigma X_s} \frac{U_s^2}{\omega_1} = 3 \cdot 2 \frac{1-0.052}{2 \cdot 0.052 \cdot 39.95} \cdot \frac{380^2}{2\pi \cdot 50} = 629.25 \text{ Nm}.$$

Primjer 1 – proračun asinhronog motora (3/5)

b) Potezni moment određuje se iz Klossove jednadžbe uz $S=1$ ($\Omega=0$):

$$M_Z = \frac{2M_p}{\frac{1}{S_p} + S_p} = \frac{2 \cdot 629.25}{\frac{1}{0.187} + 0.187} = 227.38.$$

c) Za mehaničku snagu na osovini motora dobiva se:

$$P_m = 3I_r^2 R_r \frac{1-S}{S} = P_{cu} \frac{1-S}{S}.$$

odakle za nominalno klizanje slijedi ($P_m = P_n$):

$$S_n = \frac{P_{cu}}{P_n + P_{cu}} = \frac{520}{22000 + 520} = 0.023.$$

Primjer 1 – proračun asinhronog motora (4/5)

Iz izraza za nominalno klizanje dobiva se nominalna brzina vrtnje:

$$S_n = \frac{\omega_1 - p_m \Omega_n}{\omega_1}.$$

slijedi:

$$\Omega_n = \frac{\omega_1}{p_m} (1 - S_n) = \frac{2\pi \cdot 50}{2} (1 - 0.023) = 153.47 \text{ rad/s.}$$

odnosno:

$$n_n = \frac{60}{2\pi} \cdot 153.47 = 1465 \text{ min}^{-1}.$$

Primjer 1 – proračun asinhronog motora (5/5)

d) Nominalna struja faze motora (uz $S=S_n$):

$$I_n = \frac{U_n}{\omega_1 L_s} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{1}{\sigma} \frac{S_n}{S_p}\right)^2}{1 + \left(\frac{S_n}{S_p}\right)^2}} = \frac{380}{39.95} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{1}{0.052} \frac{0.023}{0.187}\right)^2}{1 + \left(\frac{0.023}{0.187}\right)^2}} = 24.24 \text{ A.}$$

Ukupna snaga koju motor uzima iz mreže pri nominalnom opterećenju:

$$P_u = 3I_n U_n \cos \varphi_n = 3 \cdot 24.24 \cdot 380 \cdot 0.87 = 24 \text{ kW.}$$

e) Koeficijent korisnosti motora se može odrediti kao omjer snage na osovini i ukupne snage:

$$\eta_m = \frac{P_n}{P_u} = \frac{22}{24} = 0.92.$$

8.4. Regulacija brzine vrtnje asinhronog motora

- Brzina vrtnje asinhronog motora ovisi o **frekvenciji mreže**, koja određuje sinhronu brzinu vrtnje, te o **klizanju**, koje je određeno karakteristikom motora i iznosom tereta.
- Za ovu brzinu vrijedi izraz:

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{p_m} = \frac{2\pi}{p_m} (f_1 - f_2) = \frac{2\pi}{p_m} f_1 (1 - S).$$

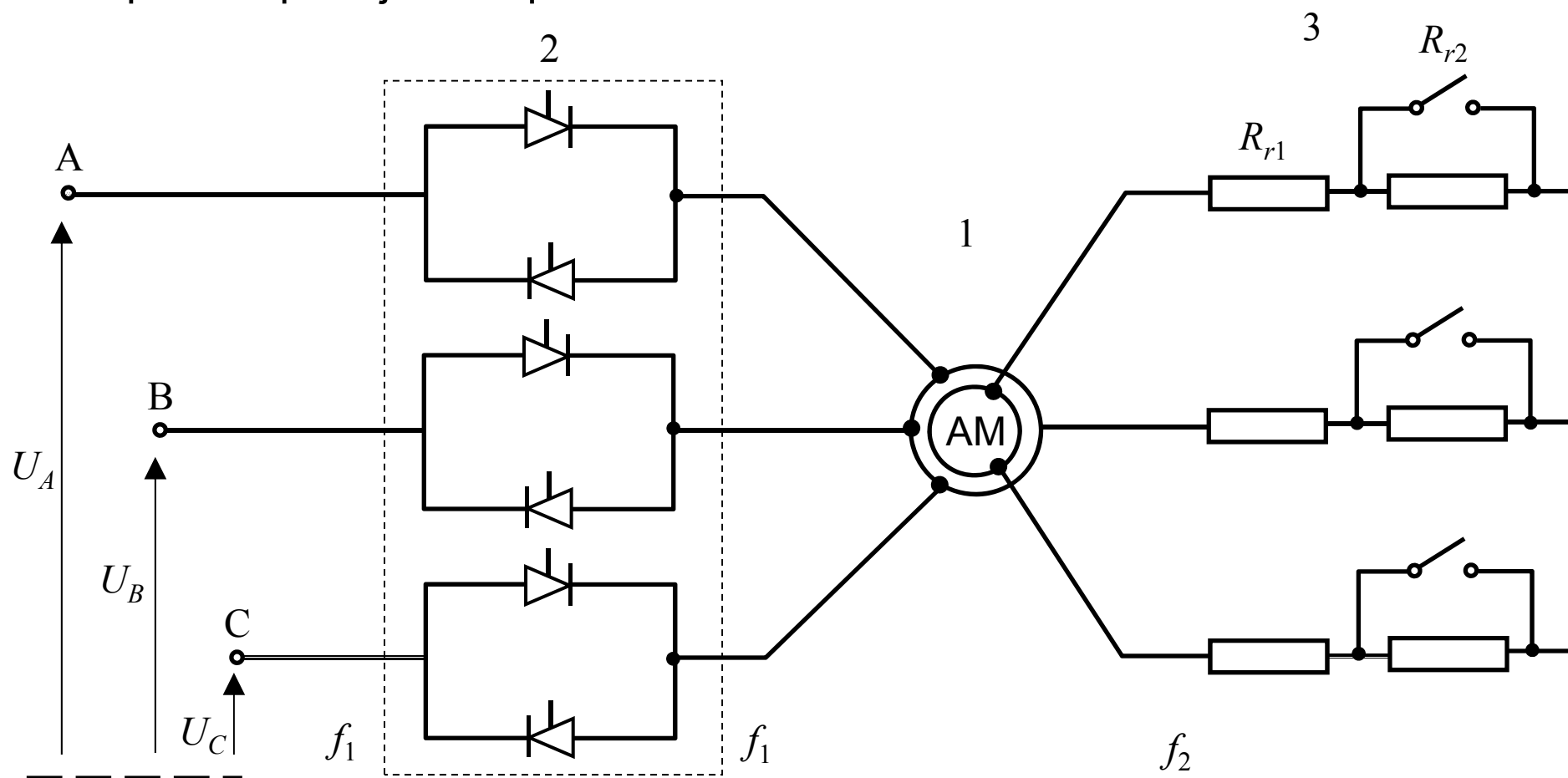
gdje je:

- f_1 – frekvencija mreže [Hz],
- $f_2 = Sf_1$ – frekvencija klizanja, odnosno frekvencija struja u rotoru [Hz],
- p_m – broj pari polova motora.

- Promjena brzine vrtnje promjenom klizanja i frekvencije izvodi se na nekoliko različitih načina: *promjenom napona statora, impulsnom promjenom rotorskog otpora, pretvaračem s međukrugom u rotorskom krugu, promjenom frekvencije statorskog napona.*

8.4.1. Promjena brzine vrtnje naponom statora

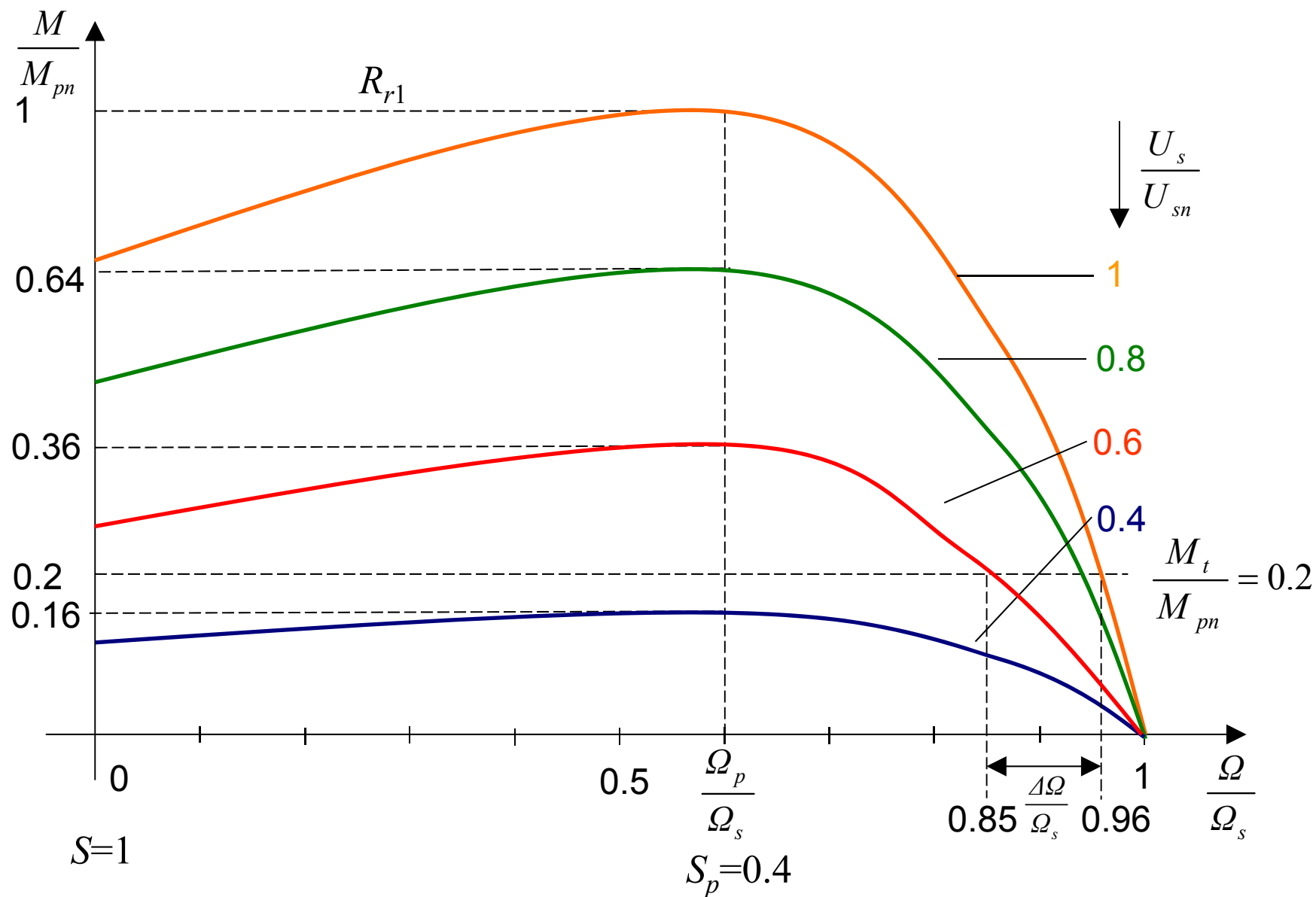
- Promjenom napona statora U_s mijenja se prekretni moment M_p , a uz konstantni moment tereta i klizanje S , njime se mijenja i brzina vrtnje asinhronog motora. Na sljedećoj slici je prikazana shema spoja kojom se postiže promjena napona statora.



Promjena brzine vrtnje naponom statora

- Trofazni pretvarač napona 2, izveden pomoću antiparalelnog spoja tiristora, napaja stator asinhronog motora 1 naponom konstantne frekvencije f_1 , a promjenjive efektivne vrijednosti.
- Budući da je moment asinhronog motora proporcionalan kvadratu napona statora, a prekretno klizanje ne ovisi o naponu statora, karakteristike imaju oblik prikazan na sljedećoj slici, uz normirane veličine napona, momenta i brzine vrtnje.
- Vidljivo je da za normirani napon $U_s/U_{sn}=0.6$, normirani prekretni moment iznosi $M_p/M_{pn}=0.36$.
- Ovisno o momentu tereta M_t mijenja se klizanje, a time i brzina vrtnje Ω .
- Međutim, u idealnom praznom hodu ($M_t=0$), nema nikakve promjene brzine vrtnje, pa se asinhroni motor vrti sinhronom brzinom.

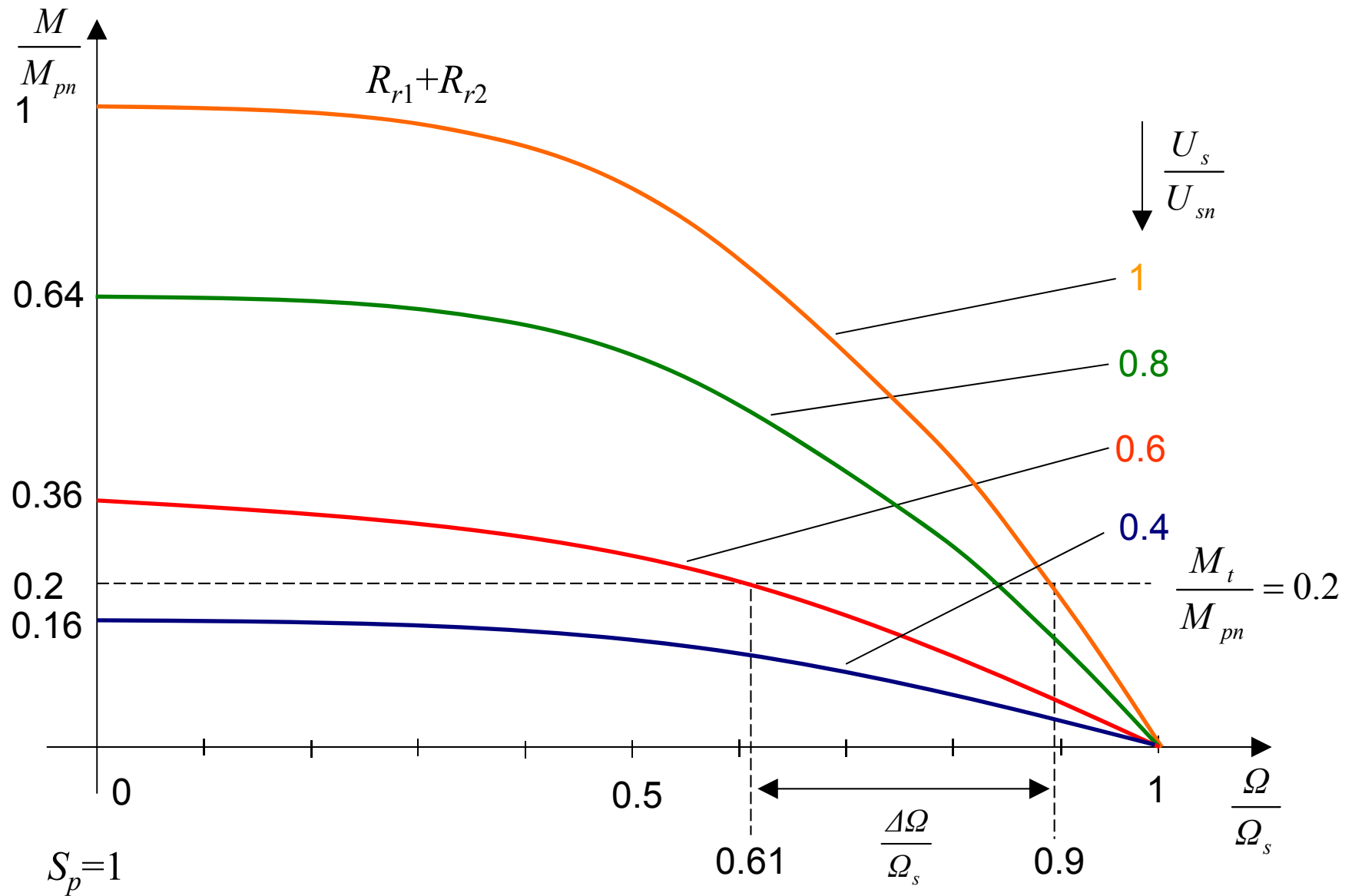
Momentne karakteristike uz dodatni otpor R_{r1}



Promjena brzine vrtnje naponom statora

- Da bi se za određeni moment tereta M_t mogla mijenjati brzina vrtnje u širokim granicama, motor mora imati **veliko prekretno klizanje**.
- Zbog toga se često koristi kliznokolutni motor, kojemu se u rotorski krug dodaju vanjski otpornici.
- Ovisno o iznosu brzine vrtnje kojom se motor trenutno vrti svrsishodno je dio otpornika kratko spojiti.
- Povećanjem otpora u rotorskom krugu povećava se prekretno klizanje, dok iznos prekretnog momenta ne ovisi o otporu rotorskog kruga, pa mehaničke karakteristike imaju oblik kao na sljedećoj slici.
- Pri promjenama napona $0.6 < (U_s / U_{sn}) < 0.9$ brzina vrtnje mijenja se u području $0.85 < (\Omega / \Omega_s) < 0.96$ uz $(M_t / M_{pn}) = 0.2$ i dodatni otpor R_{r1} (prekretno klizanje $S_p = 0.4$, vidjeti prethodnu sliku).
- Uz isti teret brzina vrtnje se mijenja u području $0.61 < (\Omega / \Omega_s) < 0.9$ ako su dodani otpori $R_{r1} + R_{r2}$ (prekretno klizanje $S_p = 1$, vidjeti sljedeću sliku).

Momentne karakteristike uz dodatne otpore $R_{r1} + R_{r2}$

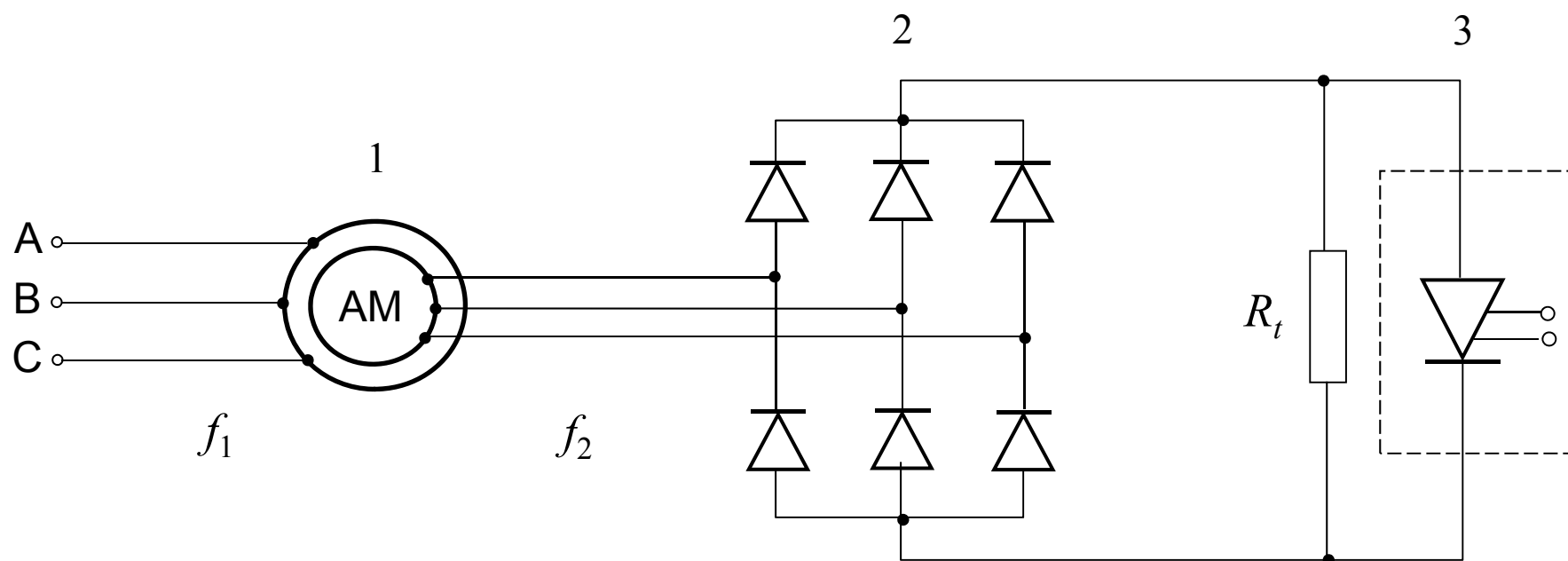


Promjena brzine vrtnje naponom statora

- S otporima R_{r1} i R_{r2} područje promjene brzine vrtnje je 2.6 puta veće nego s otporom R_{r1} .
- Promjena brzine vrtnje promjenom napona statora moguća je uz značajne gubitke, jer se energija velikim dijelom troši na rotorskim otporima.
- Zbog toga se ovakav spoj koristi samo za motore malih snaga, ili za motore većih snaga ako kratko vrijeme rade uz snižene brzine vrtnje.
- U nastavku se obrađuje promjena brzine vrtnje impulsnom promjenom rotorskog otpora.

8.4.2. Promjena brzine vrtnje impulsnom promjenom R_r

- Klizanje asinhronog motora moguće je također mijenjati promjenama rotorskog otpora uz konstantan napon statora.



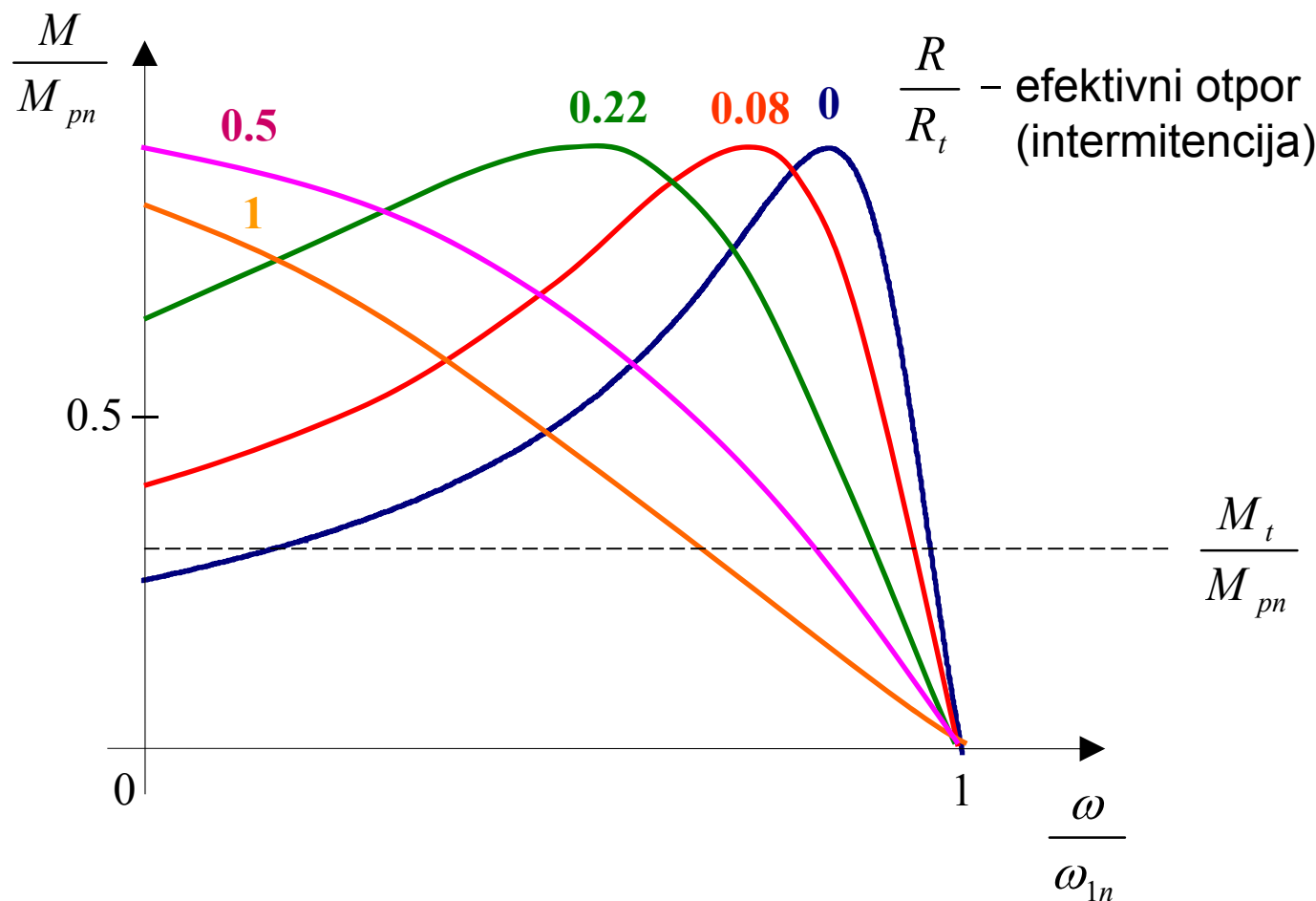
1. Asinhroni stroj
2. Diodni ispravljač
3. Ispravljački pretvarač za impulsno uključenje otpora.

Promjena brzine vrtnje impulsnom promjenom R_r -a

- U ovom slučaju stator stroja je direktno spojen na mrežu konstantnog napona i frekvencije.
- U rotorskom krugu kliznokolutnog asinhronog motora 1 nalazi se diodni ispravljač 2, iz kojeg se napaja vanjski otpor R_t .
- Paralelno s otporom nalazi se tiristorski pretvarač (čoper) 3, koji ima dodatni krug za prekidanje struje tiristora, tj. radi s prisilnom komutacijom.
- Brzom periodičkom izmjenom vođenja i nevođenja pretvarača moguće je mijenjati ekvivalentni dodatni otpor R od nule do R_t ($0 \leq (R/R_t) \leq 1$).
- Mehaničke karakteristike motora ovise o ekvivalentnom dodatnom otporu R (pogledati sljedeću sliku), pri čemu se prekretno klizanje povećava s povećanjem otpora, dok iznos prekretnog momenta ostaje nepromijenjen.
- Promjena brzine vrtnje ovisi o momentu tereta M_t . U idealnom praznom hodu ne može se mijenjati brzina vrtnje.

Promjena brzine vrtnje impulsnom promjenom R_r -a

- Pri promjeni brzine vrtnje impulsnom promjenom rotorskog otpora veliki dio energije troši se u rotorskom krugu, tako da je koeficijent korisnosti mali. Ovakav način regulacije koristi se kod motora manjih snaga, te u slučajevima upravljivog zaleta motora.



8.4.3. Promjena brzine vrtnje frekvencijom U_s -a

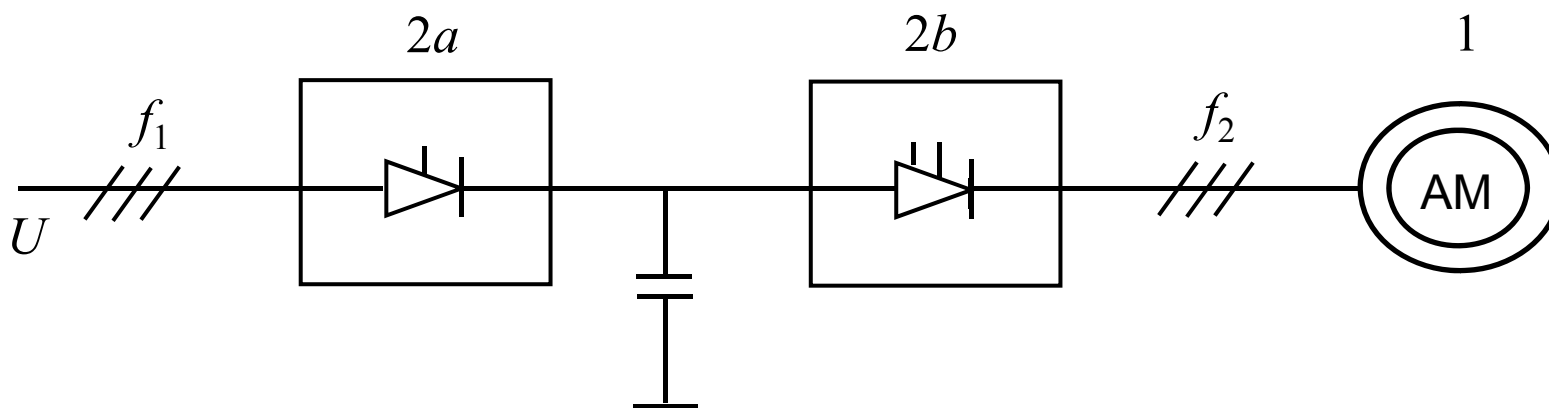
- Promjena brzine vrtnje u širokom dijapazonu i dobra dinamika pri regulaciji mogu se postići uz napajanje asinhronog motora iz pretvarača frekvencije.
- Pri ovakvom napajanju može se koristiti kavezni asinhroni motor, koji je konstrukcijski najjednostavniji.
- Zbog iskorištenja stroja potrebno je magnetski tok održati konstantnim, pa pri promjeni statorske frekvencije treba mijenjati napon napajanja motora tako da omjer napona i frekvencije statora bude konstantan:

$$\frac{U_1}{f_1} = \text{konst.}$$

- Brzina vrtnje asinhronog motora može se pri tome mijenjati u cijelom području bez velikih gubitaka energije.
- Pretvarač frekvencije je u većini slučajeva pretvarač s međukrugom, koji se sastoji od mrežom vođenog usmjerivača 2a i izmjenjivača s prisilnom komutacijom 2b (sljedeća slika).

Promjena brzine vrtnje frekvencijom U_s -a

- Pretvarač se izvodi ili s naponskim ili sa strujnim međukrugom.
- U naponskom međukrugu koristi se LC filter, a napon međukruga je konstantan ili promjenjiv, ovisno o tipu pretvarača frekvencije.
- Pri konstantnom naponu međukruga impulsnim pretvaračem (čoperom) dobiju se impulsi napona promjenjive širine i frekvencije reda kHz, iz kojih se na izlazu izmjenjivača dobije izmjenični napon čija se frekvencija osnovnog harmonika može mijenjati do reda veličine 100 Hz.
- Amplituda osnovnog harmonika napona mijenja se pri tome s promjenom širine impulsa.



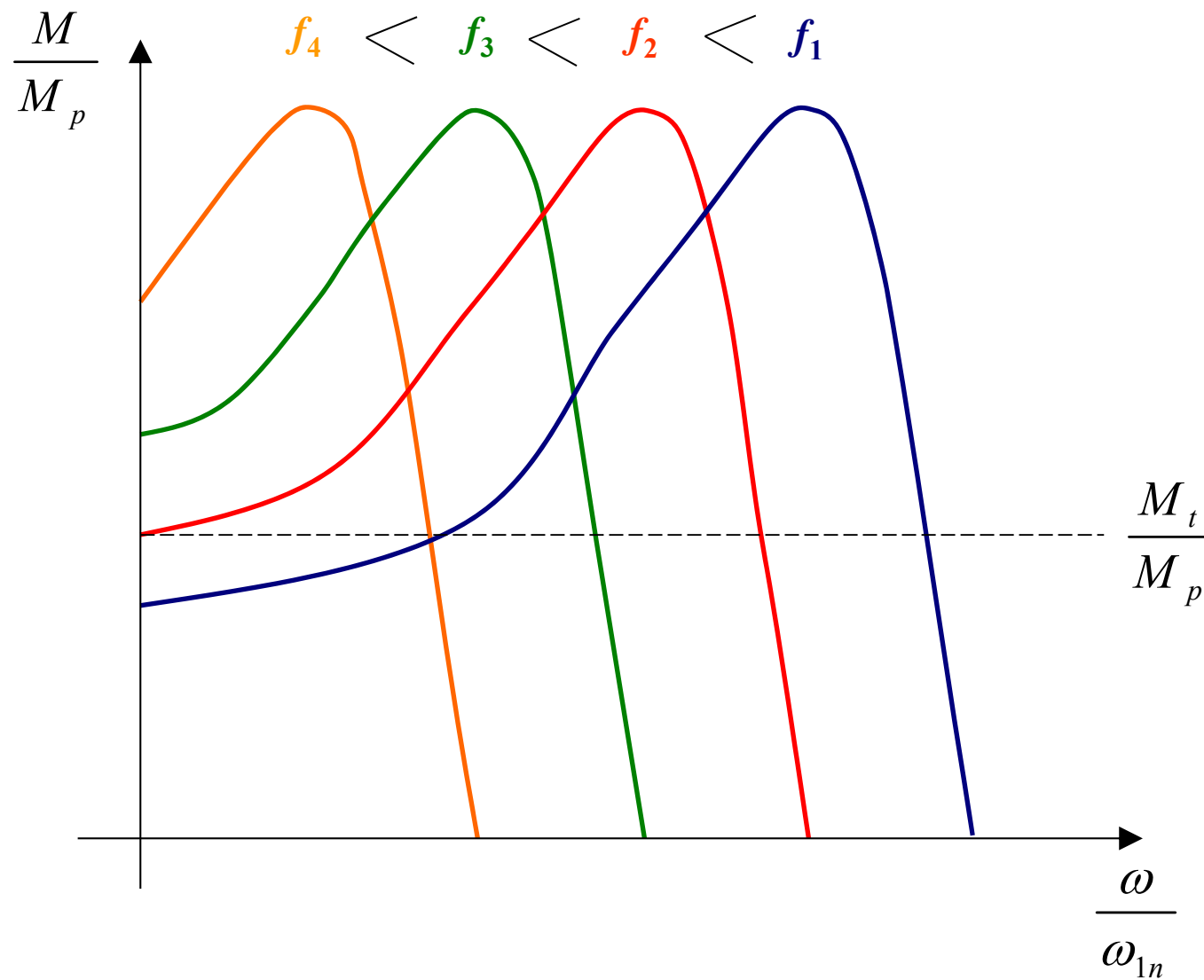
Promjena brzine vrtnje frekvencijom U_s -a

- Pri promjenjivom naponu međukruga na izlazu izmjenjivača dobije se izmjenični pravokutni napon promjenjive frekvencije i amplitude.
- **Kod pretvarača frekvencije sa strujnim međukrugom** pulzacije istosmjerne struje međukruga smanjuju se sa prigušnicom, koja je zbog iznosa struje usporediva po veličini s motorom.
- Struja međukruga propušta se preko izmjenjivača na asihroni motor, u koji se praktički “utiskuje”, jer ispravljač s međukrugom djeluje kao strujni izvor zbog relativno velikog induktiviteta prigušnice.
- Oblik struje u namotima statora pri tome je gotovo pravokutan, što uzrokuje pulzacije momenata, koje su izrazitije pri niskim brzinama vrtnje motora.
- Pulzacije se mogu izbjeći korištenjem impulsno-širinske modulacije.

Promjena brzine vrtnje frekvencijom U_s -a

- Sinhrona brzina vrtnje asinhronog motora proporcionalna je izlaznoj frekvenciji pretvarača, a prekretno klizanje je obrnuto proporcionalno toj frekvenciji.
- Prekretni moment se ne mijenja jer je omjer statorskog napona i frekvencije konstantan.
- Razlika sinhrona i prekretna brzina vrtnje pri promjeni frekvencije statora je konstantna: $\omega_1 - \omega_p = (R_r / L_r \sigma)$.
- Prema tome **nagib momentnih karakteristika ostaje nepromijenjen pri promjeni frekvencije statora**, tj. momentne karakteristike se pomiču paralelno po apscisnoj osi (na sljedećoj slici).
- Brzina vrtnje može se podešavati i u praznom hodu ($M_t = 0$).
- **Prilikom opterećenja motor uvijek radi s malim klizanjem, pa nema dodatnih gubitaka u rotoru, zbog čega je koeficijent korisnosti velik.**

Momentne karakteristike



Primjer: moderna električna lokomotiva

