Lekcija 13:
Petrijeve mreže

Prof.dr.sc. Jasmin Velagić
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

Kolegij: Distribuirani sistemi

2012/2013

Sadržaj poglavlja:

- Petrijeve mreže
  - Motivacija za korištenje Petrijevih mreža
  - Osnove Petrijevih mreža
  - Pravila izvedbe Petrijevih mreža
  - Klasifikacija Petrijevih mreža

3.1. Motivacija za korištenje PN

- Petrijeve mreže predstavljaju **formalnu grafičku metodu modeliranja** predloženu od strane Petrija 1960-tih godina.
- Predstavlja **moćan** alat modeliranja:
  - konkurentnost, sinhronizacija, uzajamno isključivanje, prioritet, sekvencijalno izvršavanja,...
- Veoma popularan koncept, mnogo proširenja i varijanti, mnogo alata (komercijalnih i javno dostupnih).
- Petrijeve mreže su korisne za **kvalitativnu** verifikaciju i **logičku** analizu.

Motivacija za korištenje PN

- **Dostupnost / sekvence događaja / performance modeliranja / evaluacija su korisne za:**
  - dizajn komunikacijskih protokola, dizajn računarskih arhitektura, dizajn sistema baze podataka, dizajn distribuiranih sistema, dizajn upravljačke logike i planiranja za automatizirane i proizvodne sisteme, brzi razvoj prototipa, ...
- **Klase Petrijevih mreža:**
  - ➢ **mreže stanja i prijelaza**, mreže visoke razine (obojene Petrijeve mreže, predikcijske mreže),
  - ➢ “untimed” Petrijeve mreže, **vremenske Petrijeve mreže**,
  - ➢ **stohastičke Petrijeve mreže**: GSPN (generalizirane stohastičke Petrijeve mreže) - GreatSPN, DSPN (determinističke stohastičke Petrijeve mreže).

Motivacija za korištenje PN

- Najvažnija primjena Petrijevih mreža je u modeliranju **složenih stohastičkih** DES (Discrete Event Systems) sistema:
  - protokoli, komunikacijski sistem, arhitektura računara, automatizirani sistemi, proizvodni sistemi
- Posebno izražen problem modeliranja složenih sistema sa **eksponencijalnom distribucijom vremenskih kašnjenja**.
- Kako definirati stanje, kako **stanju** pridružiti **događaj** i njihovu međusobnu povezanost?
- Neophodan je **sistematičan metod** modeliranja složenih sistema.
- Stohastičke Petrijeve mreže su najpopularniji metod.
- Osim njih se dosta koriste i druge metode i alati modeliranja.

3.2. Osnove Petrijevih mreža

Osnovni elementi Petrijeve mreže

- Općenito se Petrijeva mreža opisuje kao bipartitni graf sastavljen od ***mjesta*** (engl. places), koja su grafički predstavljena krugovima, ***prijelaza*** (engl. transitions) predstavljenim pravokutnicima i ***direktnih grana*** (engl. directed arcs) koje povezuju mjesta i prijelaze.
- Petrijeva mreža predstavlja, ustvari, mrežu mjesta i prijelaza u kojoj mjesta imaju značenje **uvjeta**, a prijelazi **događaja** u smislu definicije sistema uvjeta i događaja.

Osnove Petrijevih mreža

Osnovni elementi Petrijeve mreže

- Svaka akcija paljenja mreže uklanja ***oznake*** (engl. tokens) iz ulaznih mjesta i dodaje ih jednom ili više izlaznih mjesta.
- Broj uklonjenih oznaka na ulaznim i broj dodanih oznaka na izlaznim mjestima ovisi od ***težine*** (engl. weight) ulazećih/izlazećih grana, respektivno. Ako su težine svih grana Petrijeve mreže jednake 1, tada se takva mreža naziva ***ordinarna*** ili obična Petrijeva mreža. U suprotnom, mreža je ***otežana*** ili ***neordinarna***.

Osnove Petrijevih mreža

Struktura i izvedba Petrijeve mreže

- Struktura obične Petrijeve mreže uključuje četiri komponente:
  - **Skup mjesta *P*.**
  - **Skup prijelaza *T*.**
  - **Funkciju ulaza *I*.**
  - **Funkciju izlaza *O*.**

Osnove Petrijevih mreža

Definicija obične Petrijeve mreže

Def 13.1. (Petrijeva mreža) Petrijeva mreža *C* je četvorka *C*=(*P*,*T*,*I*,*O*) sa značenjem:

- $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, \quad n \geq 0, p_i \in P$, je konačan skup mjesta.
- $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}, \quad n \geq 0, \mathrm{t}_i \in T$, je konačan skup prijelaza.
- $P \cap T = 0, P \cup T \neq 0$.
- $I : T \rightarrow P^{\infty}$ je funkcija ulaza, koja opisuje preslikavanje iz prijelaza u skupinu ulaza (ulaznih mjesta). Mjesto p_i je ulazno mjesto za prijelaz t_j ako $p_i \in I(t_j)$. Broj pojavljivanja mjesta p_i kao ulaznog označava se sa $\#(p_i, I(t_j))$.
- $O : T \rightarrow P^{\infty}$ je funkcija izlaza, koja opisuje preslikavanje iz prijelaza u skupinu izlaza (izlaznih mjesta).

Mjesto p_i je izlazno mjesto za prijelaz t_j ako je $p_i \in \mathrm{O}(t_j)$. Broj pojavljivanja mjesta p_i kao izlaznog označava se sa $\#(p_i, \mathrm{O}(t_j))$.

Osnove Petrijevih mreža

Struktura i izvedba Petrijeve mreže

- Funkcija ulaza i funkcija izlaza mogu se definirati i kao preslikavanje mjesta u prijelaze:

$$I : P \rightarrow T^{\infty}$$
$$O : P \rightarrow T^{\infty},$$

pri čemu vrijedi:

$$\#(t_j, I(p_i)) = \#(p_i, O(t_j))$$
$$\#(t_j, O(p_i)) = \#(p_i, I(t_j)).$$

- Struktura Petrijeve mreže predočuje se bipartitnim usmjerenim multigrafom.
- Bipartitnost odgovara disjunktnim skupovima mjesta (oznaka O) i prijelaza (oznaka |). Grana u grafu usmjerena je od elementa jednog skupa prema elementu drugog skupa. Dopušteno je povezivanje dvaju elemenata s više grana.

Osnove Petrijevih mreža

Graf Petrijeve mreže

- **Def. 3.2** **(Graf Petrijeve mreže)**. Graf Petrijeve mreže *G* je bipartitni usmjereni multigraf, gdje je:

$\boxed{V = (v_1, v_2, \ldots, v_s)}$ - skup tačaka,

$\boxed{A = (a_1, a_2, \ldots, a_r)}$ - skupina direktnih grana,

$$a_i = (v_j, v_k),\ v_j, v_k \in V$$

Skup *V* može se podijeliti u dva disjunktna skupa *P* i *T* takva da je $V = P \cup T, P \cap T \neq 0$, i za svaku direktnu granu $a_i \in A$, ako je $a_i = (v_j, v_k)$, tada ili $v_j \in P$ i $v_k \in T$, ili $v_j \in T$ i $v_k \in P$.

Osnove Petrijevih mreža

Graf Petrijeve mreže

- **Primjer 3.1.**

Zadana je struktura Petrijeve mreže:

$$C = (P, T, I, O)$$

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$

$$T = \{t_1, t_2\}$$

$$I(t_1) = \{p_1, p_2\}, \quad O(t_1) = \{p_4\}$$

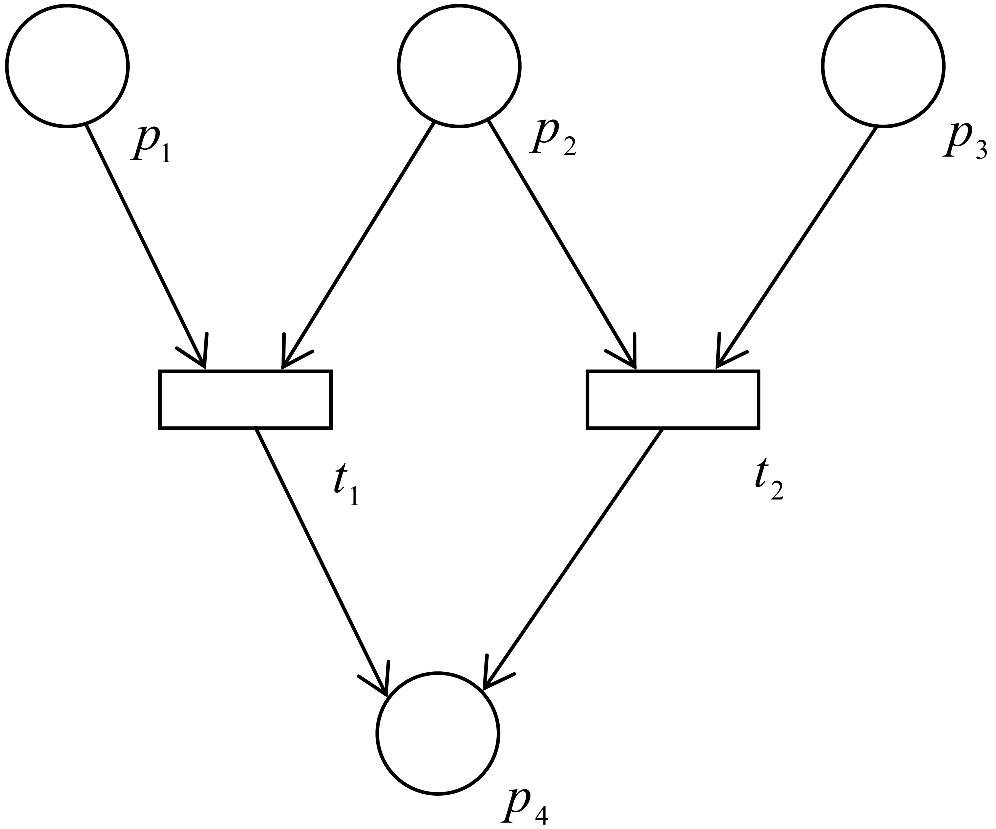
$$I(t_2) = \{p_2, p_3\}, \quad O(t_2) = \{p_4\}$$

Predočiti grafički zadanu strukturu Petrijeve mreže.

Osnove Petrijevih mreža

Graf Petrijeve mreže

- **Primjer 3.1.** Rješenje – grafički prikaz strukture Petrijeve mreže



Osnove Petrijevih mreža

Graf Petrijeve mreže

- **Primjer 3.2.**

  Zadana je struktura Petrijeve mreže:

$$C = (P, T, I, O)$$

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$$I(t_1) = \{p_1\}, \qquad \#(p_1, I(t_1)) = 2$$

$$I(t_2) = \{p_2, p_3\}, \qquad \#(p_2, I(t_2)) = 1 \qquad \#(p_3, I(t_2)) = 1$$

$$I(t_3) = \{p_3\}, \qquad \#(p_3, I(t_3)) = 1$$

$$O(t_1) = \{p_2, p_3\}, \qquad \#(p_2, O(t_1)) = 1 \qquad \#(p_3, O(t_1)) = 1$$

$$O(t_2) = \{p_4\}, \qquad \#(p_4, O(t_2)) = 1$$

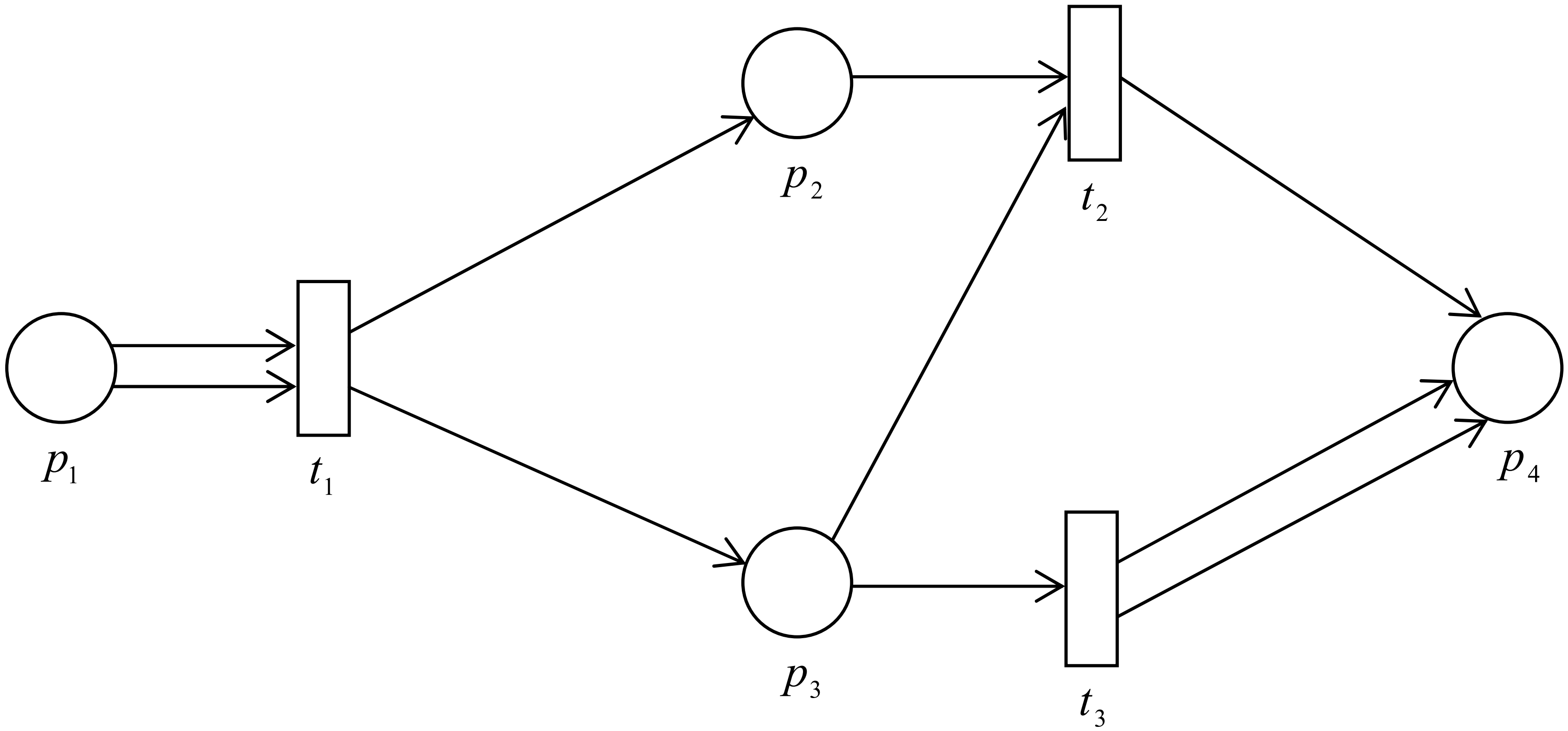
$$O(t_3) = \{p_4\}, \qquad \#(p_4, O(t_3)) = 2$$

  Predočiti grafički zadanu strukturu Petrijeve mreže.

Osnove Petrijevih mreža

Graf Petrijeve mreže

- **Primjer 3.2.** Rješenje – grafički prikaz strukture Petrijeve mreže



Osnove Petrijevih mreža

Graf Petrijeve mreže

- Za Petrijevu mrežu se mogu definirati ***dualna*** i ***inverzna*** *mreža*.
- Dualna mreža Petrijeve mreže $C = (P, T, I, O)$ je mreža $\overline{C} = (T, P, I, O)$, a izvodi se zamjenom mjesta i prijelaza.
- Inverzna Petrijeva mreža je mreža $-C = (P, T, O, I)$ koja se izvodi zamjenom ulaza i izlaza.

Osnove Petrijevih mreža

Označavanje Petrijeve mreže

- **Def. 3.3. (Označavanje Petrijeve mreže).** Označavanje μ Petrijeve mreže $C=(P,T,I,O)$ je funkcija iz skupa mjesta *P* u skup nenegativnih cijelih brojeva *N*, $\mu : P \rightarrow N$.
- Vektorski se označavanje prikazuje ovako:

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \ldots, \mu_n)}$$

gdje je $n=|P|$ i $\mu_i \in N, i=1,2,\ldots,n,$ pri čemu μ_i odgovara broju oznaka u mjestu p_i, odnosno $\boldsymbol{\mu_i=\mu(p_i)}$.

- **Def. 3.4. (Označena Petrijeva mreža).** Označenu Petrijevu mrežu $M=(C,\boldsymbol{\mu})$ čini struktura Petrijeve mreže *C* sa vektorom oznaka $\boldsymbol{\mu}$.

Osnove Petrijevih mreža

Označavanje Petrijeve mreže

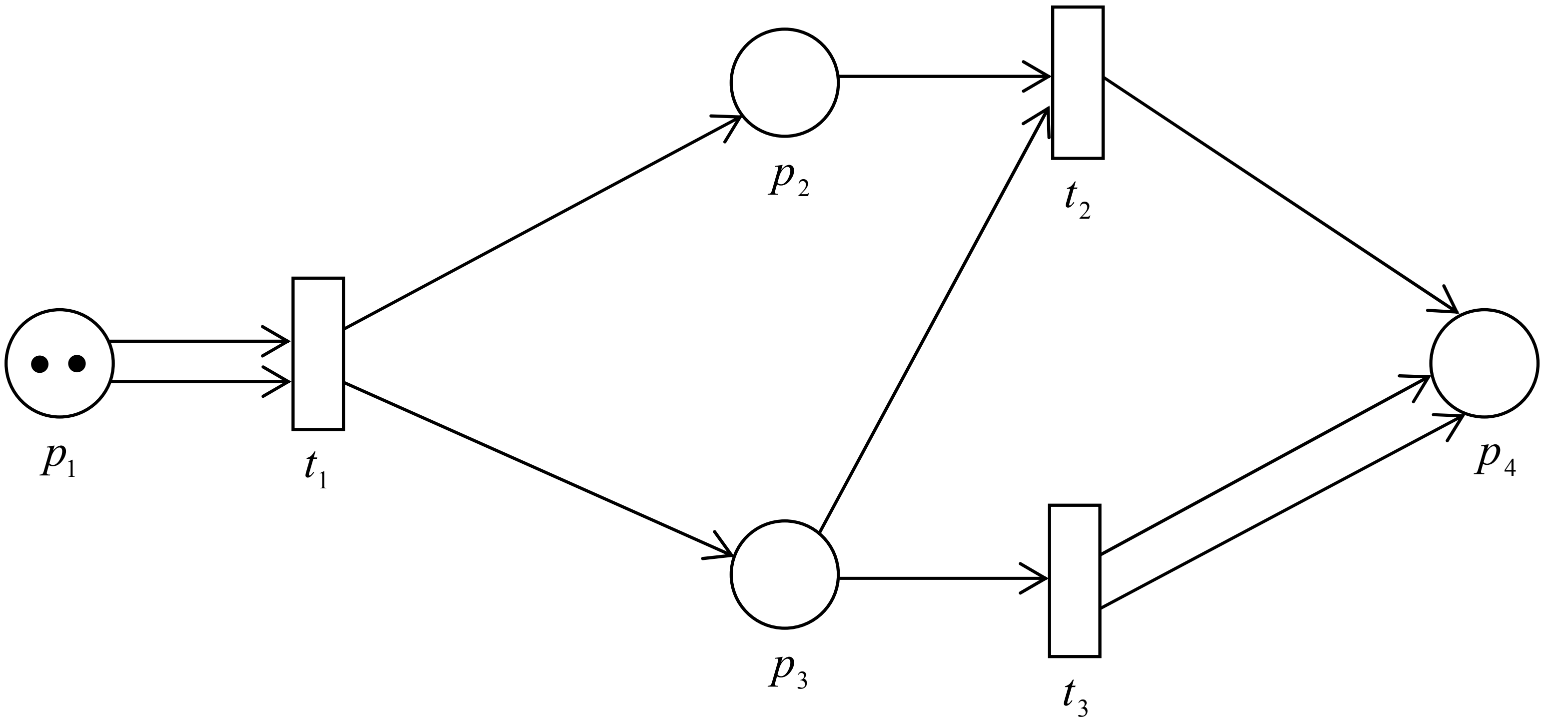
- Označavanje Petrijeve mreže provodi se pridruživanjem oznaka (•) mjestima mreže, sa značenjem ispunjenosti uvjeta.
- Broj i raspored oznaka u mjestima može se izmijeniti tokom izvedbe Petrijeve mreže.
- Za primjer 2. označena mreža prikazana je na sljedećem slajdu.
- Vektor oznaka za takvo označenu mrežu izgleda ovako:

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (2,0,0,0)$$

Osnove Petrijevih mreža

Označavanje Petrijeve mreže

- Označena mreža iz primjera 2. izgleda kao na slici ispod.



Označena Petrijeva mreža

Osnove Petrijevih mreža

Označavanje Petrijeve mreže

- Broj oznaka koji se može pridružiti mjestu nije ograničen.
- Skup svih oznaka Petrijeve mreže sa *n* mjesta jest skup svih *n* vektora, odnosno N^n.
- **Praktična interpretacija vektora oznaka odgovara pojmu stanja koje se definira kao skup istodobno ispunjenih uvjeta.**

3.2. Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Izvedba Petrijeve mreže

- **Izvedba Petrijeve mreže određena je pravilima izvođenja koji upravljaju kada i kako se oznake pomiču iz jednog mjesta u drugi uz pomoć aktiviranja prijelaza**.
- Međutim, prijelaz se može aktivirati samo ako je omogućen, to jest ako svaki od ulaznih mjesta ima najmanje onoliko oznaka koliko ima grana usmjerenih prema prijelazu.
- Broj i distribucija oznaka određuju izvedbu Petrijeve mreže.
- Mreža se izvodi realizacijom prijelaza, pri čemu ulazna mjesta gube oznake, a izlazna ih dobivaju.

Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Omogućenje prijelaza

- **Def. 3.5.** **(Omogućenje prijelaza)** Prijelaz $t_j \in T$ u označenoj Petrijevoj mreži $M = (P, T, I, O, \mu)$ je omogućen (može se izvesti) ako je za svaki $p_i \in P$:

$$\boxed{\mu(p_i) \geq \#(p_i, I(t_j))}$$

- Drugim riječima prijelaz se može izvesti ako svako ulazno mjesto ima najmanje toliko oznaka sa koliko je grana povezano sa prijelazom.
- Nedeterminizam se javlja kada se omogući simultano izvođenje prijelaza, u ovom slučaju, bilo koji od ovih prijelaza može se aktivirati kao sljedeći.

Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Provedba prijelaza

- **Def. 2.6 (Provedba prijelaza).**

  Prijelaz $t_j \in T$ u označenoj Petrijevoj mreži $M = (P, T, I, O, \mu)$ sa oznakom μ može se izvesti uvijek kada je on omogućen.

  Provedba prijelaza t_j rezultira novim stanjem (oznakom) μ' definiranim sa:

$$\boxed{\mu'(p_i) = \mu(p_i) - \#(p_i, I(t_j)) + \#(p_i, O(t_j)), \ \forall p_i \in P}$$

Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Primjer izvedbe prijelaza (1/5)

- **Primjer 3.2.** Za mrežu sa slajda 20. uz početno stanje μ ispitati koji se prijelaz može provesti i prikazati stanje mreže nakon izvedenog prijelaza.
- **Rješenje:**
- Za ovu mrežu se može izvesti samo prijelaz t_1 jer je ispunjeno:

$$\mu(p_1) = 2 \geq \#(p_1, I(t_1)) = 2$$
$$\mu(p_2) = 0 \geq \#(p_2, I(t_1)) = 0$$
$$\mu(p_3) = 0 \geq \#(p_3, I(t_1)) = 0$$
$$\mu(p_4) = 0 \geq \#(p_4, I(t_1)) = 0$$

Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Primjer izvedbe prijelaza (2/5)

- Za ostale prijelaze to ne vrijedi:

$$\mu(p_1) = 2 \geq \#(p_1, I(t_2)) = 0$$
$$\mu(p_2) = 0 \geq \#(p_2, I(t_2)) = 1$$
$$\mu(p_3) = 0 \geq \#(p_3, I(t_2)) = 1$$
$$\mu(p_4) = 0 \geq \#(p_4, I(t_2)) = 0$$

$$\mu(p_1) = 2 \geq \#(p_1, I(t_3)) = 0$$
$$\mu(p_2) = 0 \geq \#(p_2, I(t_3)) = 0$$
$$\mu(p_3) = 0 \geq \#(p_3, I(t_3)) = 1$$
$$\mu(p_4) = 0 \geq \#(p_4, I(t_3)) = 0.$$

Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Primjer izvedbe prijelaza (3/5)

- Izvedbom prijelaza dolazi se u novo stanje:

$$\mu'(p_1) = \mu(p_1) - \#(p_1, I(t_1)) + \#(p_1, O(t_1)) = 2 - 2 + 0 = 0$$
$$\mu'(p_2) = \mu(p_2) - \#(p_2, I(t_1)) + \#(p_2, O(t_1)) = 0 - 0 + 1 = 1$$
$$\mu'(p_3) = \mu(p_3) - \#(p_3, I(t_1)) + \#(p_3, O(t_1)) = 0 - 0 + 1 = 1$$
$$\mu'(p_4) = \mu(p_4) - \#(p_4, I(t_1)) + \#(p_4, O(t_1)) = 0 - 0 + 0 = 0$$

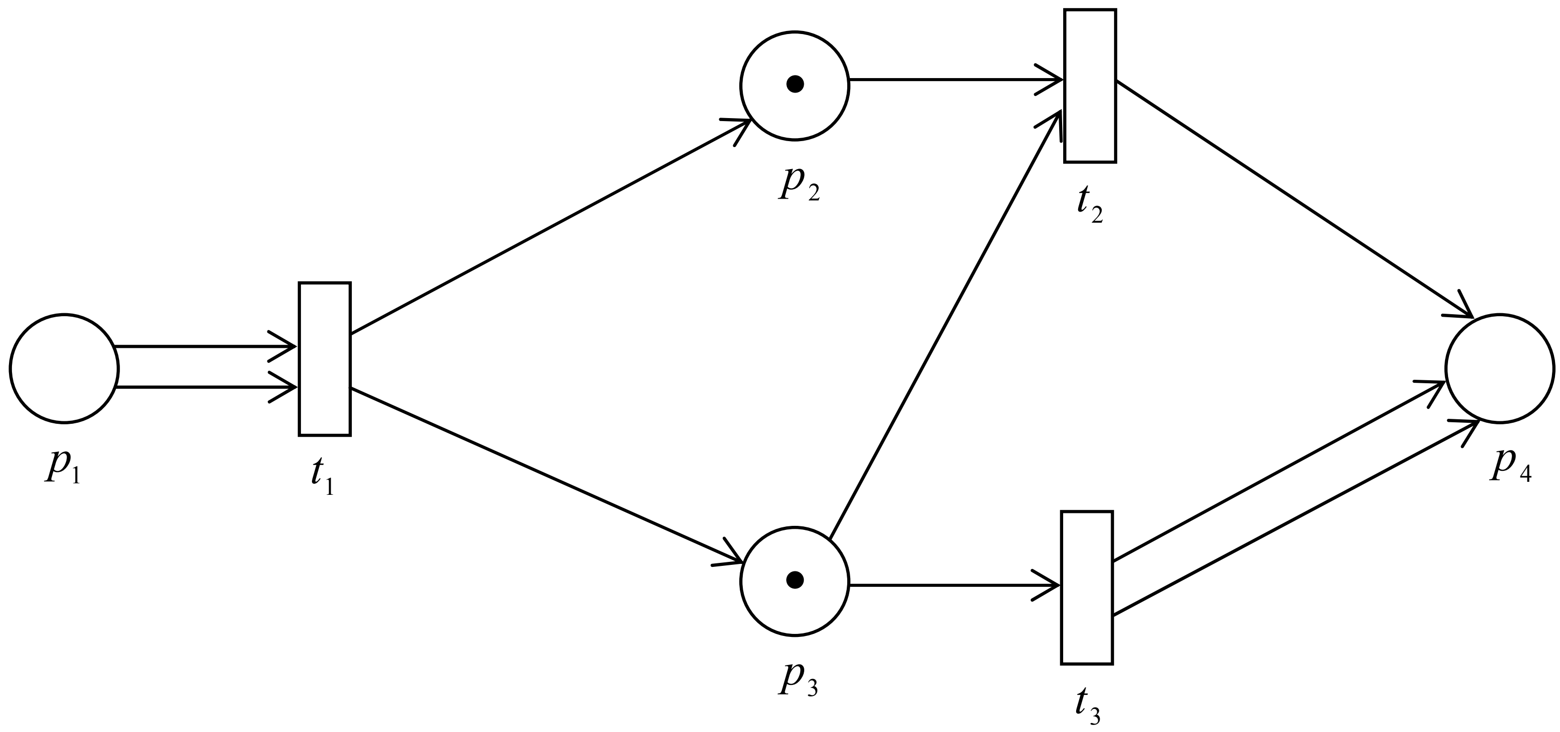
odnosno:

$$\mu' = (0, 1, 1, 0)$$

Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Primjer izvedbe prijelaza (4/5)

- Sva ulazna mjesta prijelaza koji se izvodi gube oznake, a sva ih izlazna dobivaju.
- Stanje mreže nakon izvedbe prijelaza t_1 izgleda kao na slici



Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Primjer izvedbe prijelaza (5/5)

- Odnos mjesta i prijelaza u procesu izvedbe može biti ovakav:

$$\mu'(p_i) = \mu(p_i)$$

- mjesto p_i i prijelaz t_j nisu povezani,

$$\mu'(p_i) = \mu(p_i) - \#(p_i, I(t_j))$$

- mjesto p_i je ulazno mjesto za prijelaz t_j,

$$\mu'(p_i) = \mu(p_i) + \#(p_i, O(t_j))$$

- mjesto p_i je izlazno mjesto za prijelaz t_j ,

$$\mu'(p_i) = \mu(p_i) - \#(p_i, I(t_j)) + \#(p_i, O(t_j))$$

- mjesto p_i je ulazno i izlazno za prijelaz t_j .

- Prostor stanja označava skup svih stanja, a promjenu stanja opisuje funkcija sljedećeg stanja.

Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Funkcija sljedećeg stanja

Def. 3.7. (Funkcija sljedećeg stanja).
Funkcija sljedećeg stanja $\delta : N^n \times T \rightarrow N^n$ za označenu Petrijevu mrežu $M = (P, T, I, O, \mu)$ i prijelaz $t_j \in T$ je definirana ako i samo ako vrijedi:

$$\boxed{\mu(p_i) \geq \#(p_i, I(t_j)), \quad \forall p_i \in P}$$

odnosno ako se prijelaz t_j može izvesti u stanju μ.
Ako je $\delta(\mu, t_j)$ definirana, tada je $\delta(\mu, t_j) = \mu'$, gdje je:

$$\boxed{\mu'(p_i) = \mu(p_i) - \#(p_i, I(t_j)) + \#(p_i, O(t_j)), \qquad \forall p_i \in P}$$

Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Trenutno dostupno stanje

- **Def. 3.8. (Trenutno dostupno stanje)**

  Za označenu Petrijevu mrežu $M = (P, T, I, O, \mu)$ stanje μ' je trenutno dostupno iz μ ako postoji prijelaz $t_j \in T$ takav da vrijedi:

$$\boxed{\delta(\mu, t_j) = \mu'}$$

Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Graf stanja i stablo dostupnosti

- Graf stanja dobiva se izvedbom Petrijeve mreže uz zadano početno stanje.
- U prvom koraku određuju se prijelazi koji se mogu izvesti u početnom stanju. Svakom takvom prijelazu odgovara grana prema čvoru koji opisuje novo stanje u kojem mreža prelazi provedbom prijelaza.
- Svaki sljedeći korak izvodi se na isti način, slično metodi promjene stanja.
- Mreža može prijeći u sljedeće stanje koje već postoji. Tada se granom povezuju dva postojeća čvora mreže.
- Graf stanja ekvivalentan je njezinom stablu dostupnosti.
- Početno stanje označava korijen stabla dostupnosti.

Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Graf stanja i stablo dostupnosti

- Stablasta struktura postiže se tako da se za svaki prijelaz uvode nova grana i novi čvor, bez povezivanja postojećih stanja.
- Ostaje problem ograničavanja pojavljivanja jednog prijelaza unutar slijeda prijelaza koji se izvode.
- To se odražava pojavom stanja u kojima su označena ista mjesta, ali su neka od njih označena različitim brojem oznaka.
- Neka je takvo prvo stanje μ, a nekom sekvencijom prijelaza došlo se u drugo stanje μ' u kojem se ponovo izvodi ista sekvencija stanja i prelazi se u μ''.

Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Graf stanja i stablo dostupnosti

- Za navedenu sekvencu prijelaza vrijedi:

$$\mu' = \mu + (\mu' - \mu)$$
$$\mu'' = \mu' + (\mu' - \mu) = \mu + (\mu' - \mu) + (\mu' - \mu) = \mu + 2(\mu' - \mu)$$

ili općenito:

$$\mu^n = \mu + n(\mu' - \mu)$$

što se pokazuje da će se po volji velik broj oznaka u nekom mjestu dobiti odgovarajućim ponavljanjem slijeda prijelaza.

Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Graf stanja i stablo dostupnosti

- Takav se broj oznaka može smatrati i beskonačnim, pa se može označiti simbolom ω za koji, uz zadanu konstantu a, vrijedi:

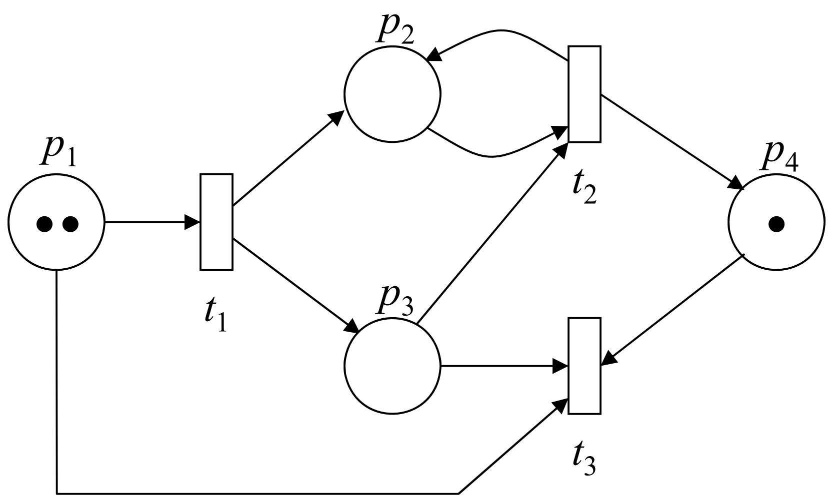
$$\boxed{\begin{aligned} &\omega + a = \omega \\ &\omega - a = \omega \\ &a < \omega \\ &\omega \leq \omega. \end{aligned}}$$

- Tako se postiže konačnost grafa stanja.
- Graf stanja je temelj za određivanje dinamičkih svojstava modeliranog sistema.

Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Graf stanja i stablo dostupnosti

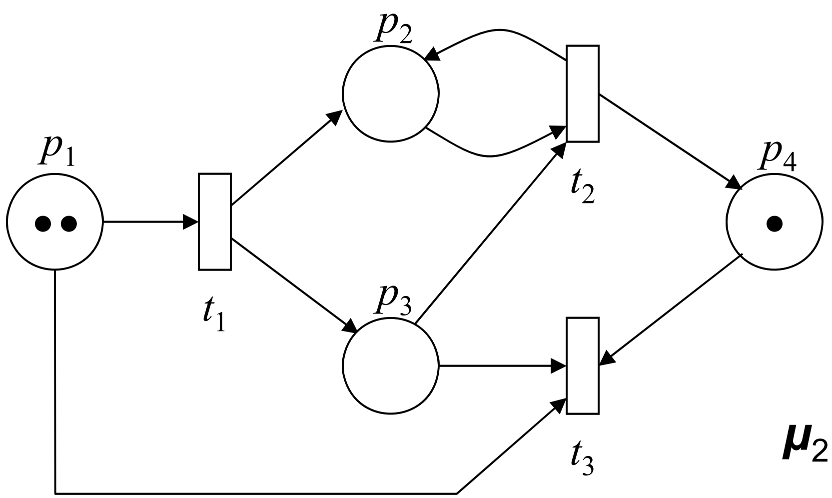
- **Primjer 3.3.** Za Petrijevu mrežu na slici nacrtati stablo dostupnosti?



Pravila izvedbe Petrijevih mreža

Graf stanja i stablo dostupnosti

- **Rješenje**



$\boldsymbol{\mu}_0 = (2, 0, 0, 1)$

$\downarrow t_1$

$\boldsymbol{\mu}_1 = (1, 1, 1, 1)$

$\boldsymbol{\mu}_1 \xrightarrow{t_1} \boldsymbol{\mu}_2 = (0, 2, 2, 1)$

$\boldsymbol{\mu}_1 \xrightarrow{t_2} \boldsymbol{\mu}_3 = (1, 1, 0, 2)$

$\boldsymbol{\mu}_1 \xrightarrow{t_3} \boldsymbol{\mu}_4 = (0, 1, 0, 0)$

$\boldsymbol{\mu}_2 \xrightarrow{t_2} \boldsymbol{\mu}_5 = (0, 2, 1, 2)$

$\boldsymbol{\mu}_3 \xrightarrow{t_1} \boldsymbol{\mu}_6 = (0, 2, 1, 2)$

$\boldsymbol{\mu}_5 \xrightarrow{t_2} \boldsymbol{\mu}_7 = (0, 2, 0, 3)$

3.3. Svojstva Petrijevih mreža

Sigurnost (engl. Safeness)

Def. 3.9. Mjesto $p_i \in P$ označene mreže $M = (P, T, I, O, \mu)$ je sigurno ako za svaki $\mu' \in R(C, \mu)$ vrijedi:

$$\boxed{\mu'(p_i) \leq 1}$$

- **Svojstvo sigurnosti Petrijeve mreže određuje da broj oznaka u svakom mjestu ne smije biti veći od jedan, odnosno da svaki uvjet može biti samo ispunjen ili neispunjen.**
- Petrijeva mreža je sigurna ako su sva mjesta u njoj sigurna.

Svojstva Petrijevih mreža

Ograničenost (engl. Boundedness)

Def. 3.10. Mjesto $p_i \in P$ označene Petrijeve mreže *M* je *k*-ograničeno ako za svaki $\mu' \in R(C, \mu)$ vrijedi:

$$\boxed{\mu'(p_i) \leq k}$$

- **Ograničenost se odnosi na pojam maksimalnog broja oznaka u mjestu mreže.**
- Petrijeva mreža je *k*-ograničena ako su sva mjesta u mreži *k*-ograničena.
- Ograničenost se može razmatrati kao funkcija mjesta kojima se može podijeliti različit stupanj ograničenosti.

Svojstva Petrijevih mreža

Životnost (engl. Liveness)

Def 3.11. Označena Petrijeva mreža $M=(P,T,I,O,\mu)$ je *i*-aktivna (životna) ako su svi prijelazi aktivni na razini *i*.

- Razine aktivnosti se definiraju na sljedeći način:
  - **Razina 0:** prijelaz t_j je neaktivan, odnosno ne može se izvesti niti u jednom slijedu prijelaza.
  - **Razina 1:** prijelaz t_j je potencijalno aktivan (može se izvesti barem u jednom stanju).
  - **Razina 2:** prijelaz t_j se u slijedu prijelaza izvodi najmanje *n* puta.
  - **Razina 3:** prijelaz t_j se u beskonačnom slijedu prijelaza izvodi bezbroj puta.
  - **Razina 4:** prijelaz t_j je aktivan, odnosno za svako stanje postoji slijed prijelaza u kojem će se prijelaz izvesti.

Svojstva Petrijevih mreža

Životnost

- Slijedi da je mreža (prijelaz) aktivna ako je razine 4, a neaktivna ako je razine 0. Bitno je naglasiti da pojam aktivnosti mreže nije precizno i jednoznačno definiran, za razliku od drugih svojstava mreže. Pojam aktivnosti ima više interpretacija:
  - Prijelaz t_j Petrijeve mreže $C = (P,T,I,O)$ je potencijalno aktivan u stanju μ ako postoji stanje $\mu' \in R(C,\mu)$ i ako se t_j može izvesti u μ‘.
  - Prijelaz t_j je aktivan u stanju μ ako je potencijalno aktivan u svim stanjima iz $R(C, \mu)$.
  - Prijelaz t_j je aktivan ako se iz jednog stanja, izvedbom drugih prijelaza, može prijeći u stanje u kojem se izvodi t_j.

Svojstva Petrijevih mreža

Životnost

- **Svojstvo aktivnosti (životnosti) odnosi se na mogućnost izvedbe prijelaza.**
- Aktivna mreža isključuje mogućnost blokiranja ili potpunog zastoja u modeliranom sistemu koji se manifestira postojanjem prijelaza koji se nikad ne izvodi ili stanja u kojem se ne može izvesti niti jedan prijelaz.

Svojstva Petrijevih mreža

Zastoj (Deadlock) i dostupnost (Reachability)

- **Def. 3.12.** Prijelaz na razini 0 je neaktivan, ili u zastoju.
- Petrijeva mreža je neaktivna ako je bilo koji od njenih prijelaza u zastoju.
- Odnos među stanjima opisan je **dostupnošću**.
- Za mrežu sa početnim stanjem μ^0 izvedbom se generira slijed stanja $(\mu^0, \mu^1, \mu^2, \ldots)$ i slijed izvedenih prijelaza $(t_j^0, t_j^1, t_j^2, \ldots)$ pri čemu vrijedi odnos:

$$\boxed{\delta(\mu, t_j^k) = \mu^k + 1,}$$

za $k=0,1,2,\ldots$

Svojstva Petrijevih mreža

Dostupnost

- **Def. 3.13.** Za mrežu $M=(P,T,I,O,\mu)$ stanje μ' je neposredno dostupno iz μ ako postoji prijelaz $t_j \in T$ takav da je:

$$\boxed{\delta(\mu, t_j) = \mu'}$$

- Ako je stanje μ' neposredno dostupno iz μ, a μ' iz μ'', tada je μ'' dostupno iz μ.
- Skup dostupnih stanja $R(M) = R(C,\mu)$ je najmanji takav skup definiran kao:

$$\boxed{\mu \in R(M)}$$

- Ako $\mu \in R(M)$ i $\mu'' \in \delta(\mu', t_j)$ za neki $t_j \in T$ tada $\mu'' \in R(M)$.

Svojstva Petrijevih mreža

Dostupnost

- Problem dostupnosti formulira se pitanjem da li za Petrijevu mrežu *C* sa početnim stanjem μ i nekim stanjem μ' vrijedi $\mu' \in R(C, \mu)$?
- Dostupnost se može definirati i za podskup mjesta, kao i za odabrani skup stanja.
- **Dostupnost je važna za izučavanje dinamičkih svojstava mreže i za njenu analizu, a to je jedan od najsloženijih problema.**
- Složenost analize povećava i mogućnost interpretacija dostupnosti u procesu optimiranja mreža.
- Mreža koja ima jednostavniju strukturu od početno zadane može se zasnivati na kriteriju ekvivalencije mreža u smislu dostupnosti.

Svojstva Petrijevih mreža

Prekrivanje (engl. Coverability)

- **Def. 3.14.** Prekrivanje se odnosi na stanja za koja vrijedi $\mu'' \geq \mu'$, a iskazuje se pitanjem da li za mrežu *C* sa početnim stanjem μ i stanjem μ' postoji stanje $\mu'' \in R(C, \mu)$ takvo da je:

$$\boxed{\mu'' \geq \mu'}$$

- Prekrivanje zahtijeva najmanje 1-aktivnu mrežu, odnosno potencijalno izvedive prijelaze.
- Prekrivanje se može definirati i za podskup mjesta, a i za odabrani skup stanja.
- Po složenosti prekrivanje je problem sličan dostupnosti.

Svojstva Petrijevih mreža

Reverzibilnost (engl. Reversibility) i konverzacija (engl. Conversation)

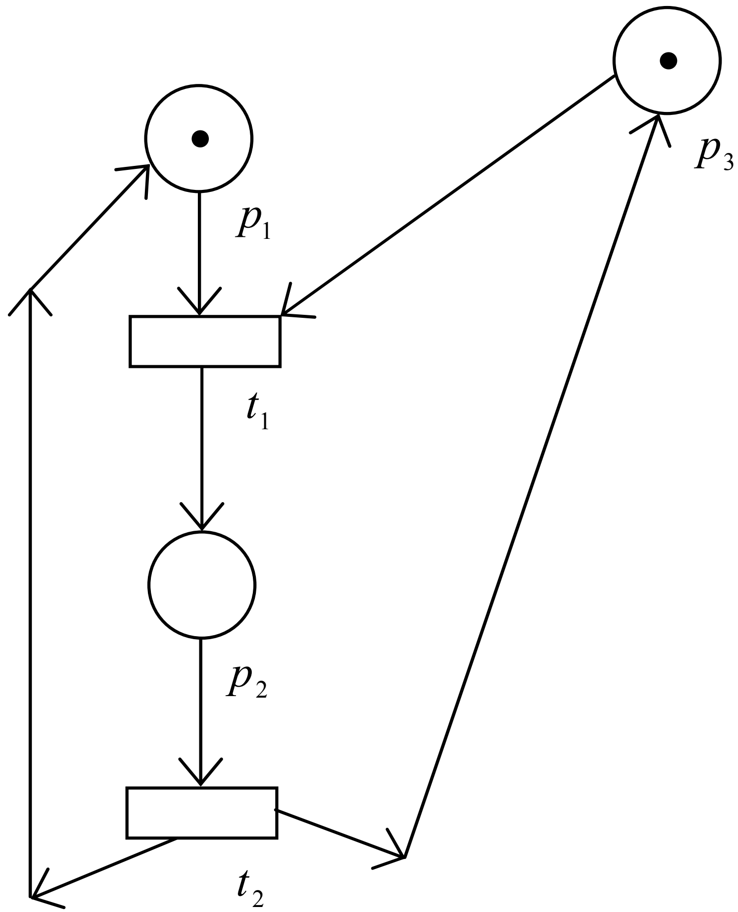
- **Def. 3.15.** Petrijeva mreža je reverzibilna ako se iz svakog stanja $\mu' \in R(M)$ može vratiti u početno stanje μ, odnosno ako je početno stanje dostupno iz svakog stanja.
- **Svojstvo konverzacije odnosi se na zadržavanje jednakog, početnog broja oznaka u svim stanjima mreže.**
- **Def. 3.16.** Petrijeva mreža $C=(P, T, I, O)$ sa početnim stanjem μ je strogo konverzacijska ako za svaki $\mu' \in R(M)$ vrijedi:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{|P|} \mu'(p_i) = \sum_{i=1}^{|P|} \mu(p_i)}$$

Svojstva Petrijevih mreža

Konzervacija

- Navedena postavka izričito utječe na strukturu mreže, jer je očito da broj ulaza i izlaza za svaki prijelaz mora biti jednak.
- Mreža koja nije strogo konzervacijska može se pretvoriti u takvu mrežu izjednačavanjem broja ulaznih i izlaznih grana za svaki prijelaz (dodavanje paralelnih grana).
- Mreža na slici nije striktno konzervativna.



Svojstva Petrijevih mreža

Konzervacija

- **Def. 3.17.** Označena Petrijeva mreža $M=(P,T,I,O,\mu)$ je konzervativna s obzirom na težinski vektor $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, \ldots, w_i, \ldots., w_n)$, $n=|P|$, $w_i \geq 0$ ako za svaki $\mu' \in R(C,\mu)$ vrijedi:

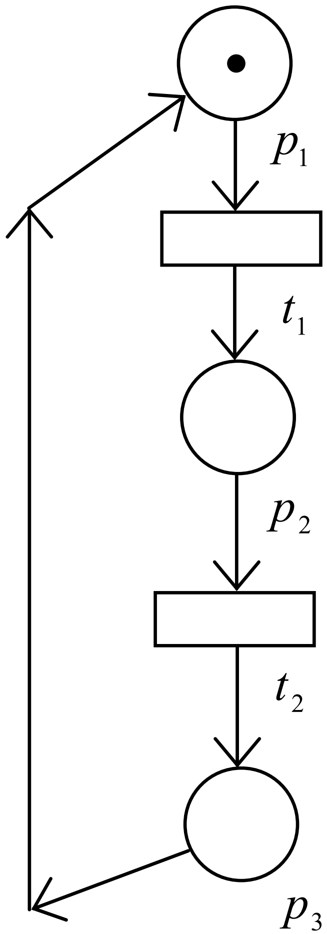
$$\boxed{\sum_{i=1}^{|P|} w_i \cdot \mu'(p_i) = \sum_{i=1}^{|P|} w_i \cdot \mu(p_i)}$$

- Primjer nekonzervativne mreže je prikazan na sljedećem slajdu.

Svojstva Petrijevih mreža

Konzervacija

- Nekonzervativna Petrijeva mreža



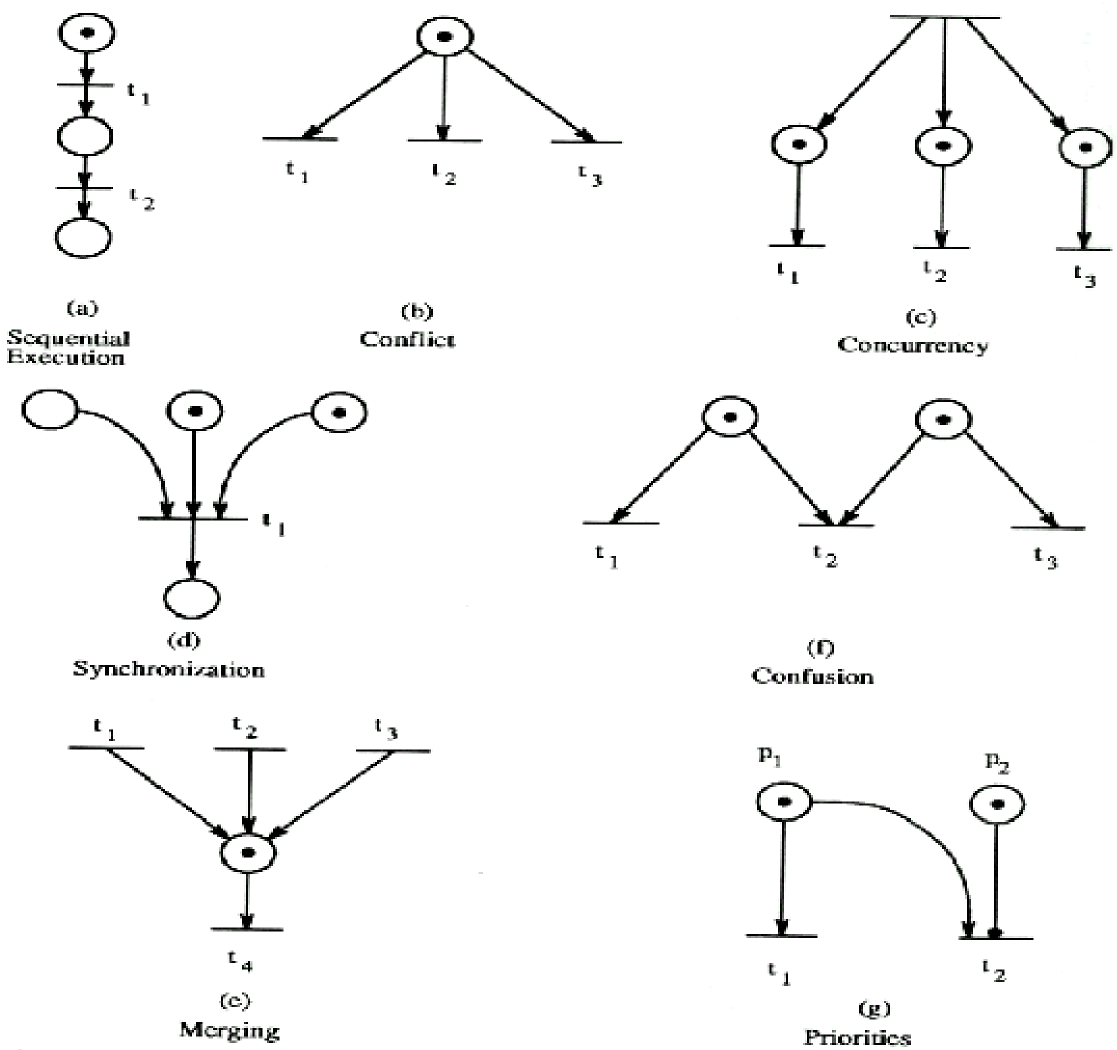
Svojstva Petrijevih mreža

Konzervacija

- Pojam konflikta prijelaza na razini mreže izražava se svojstvom perzistentnosti.
- **Def. 3.18.** Petrijeva mreža se naziva **perzistentnom** ako prijelaz koji se može izvesti gubi uvjete samo vlastitom izvedbom.
- Perzistentnost ima značenje odsutnosti konflikta u procesu izvedbe mreže.

Svojstva Petrijevih mreža

Modeliranje sposobnosti



3.4. Klasifikacija Petrijevih mreža

Podjela Petrijevih mreža s obzirom na vremenska kašnjenja u prijelazima

- **Obična Petrijeva mreža** – nema vremenskih prijelaza, te se ne može koristiti za real-time aplikacije.
- **Vremenska Petrijeva mreža** – vremenska kašnjenja pridružena prijelazima mreže.
- **Eksponencijalna vremenska Petrijeva mreža** – prijelazi imaju eksponencijalna kašnjenja.
- **Generalizirana stohastička Petrijeva mreža** – specijalna vrsta eksponencijalne mreže.

Klasifikacija Petrijevih mreža

Vremenska Petrijeva mreža

- **Vremenska kašnjenja** su pridružena prijelazima.
  - Prijelaz bez kašnjenja se naziva **trenutni** ili **neposredni** prijelaz (immediate transition) – za zaključivanje i grananje.
  - U nekim drugim modelima vremenska kašnjenja su pridružena mjestima (Timed Place Petri Nets).
  - **Vremenska Petrijeva mreža**: minimalno kašnjenje (interval) i maksimalno kašnjenje su pridruženi svakom prijelazu.

Klasifikacija Petrijevih mreža

Vremenska Petrijeva mreža

- **Pravilo propaljivanja** (firing rule)
  - Omogućeni prijelaz će se aktivirati (propaliti) nakon proteklog vremenskog kašnjenja ako ulazna mjesta zadrže oznake (žetone) tako da je uvjet omogućenja zadržan neprestano tokom kašnjenja.
  - Ne postoje oznake u mjestu povezanom sa neaktivnom granom tokom kašnjenja.
  - Oznake se uklanjaju i dodaju u toku epohe propaljivanja.

Klasifikacija Petrijevih mreža

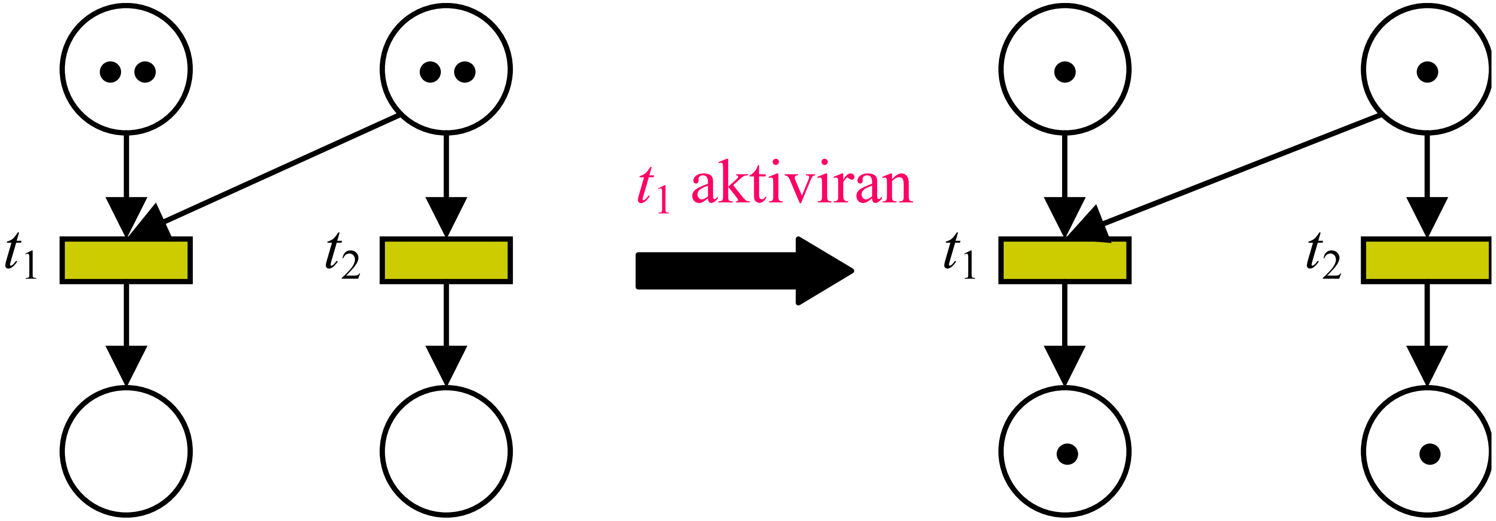
Eksponencijalna vremenska Petrijeva mreža

- Svi prijelazi u mreži imaju eksponencijalna kašnjenja.
- Sva vremena boravka su eksponencijalno distribuirana:
  - Rezidualno (preostalo) vrijeme kašnjenja u propaljivanju omogućenog prijelaza tokom vremenskog označavanja – eksponencijalno distribuirano zbog ***memorijskog*** svojstva.
  - Minimalno vrijeme kašnjenja u propaljivanju omogućenih prijelaza u stanju označavanja -- ***eksponencijalna distribuiranost***.

Klasifikacija Petrijevih mreža

Eksponencijalna vremenska Petrijeva mreža

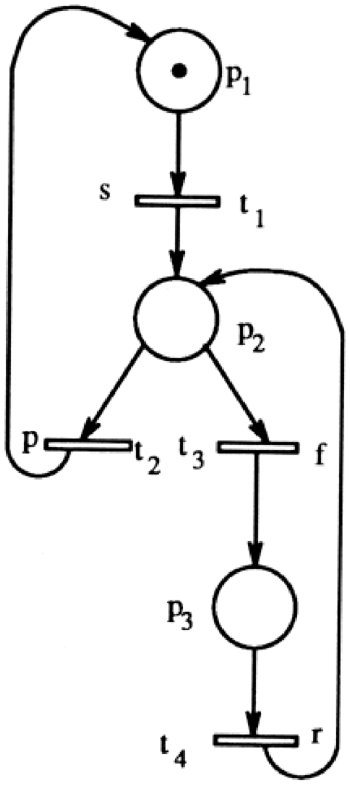
- Primjer eksponencijalne vremenske mreže



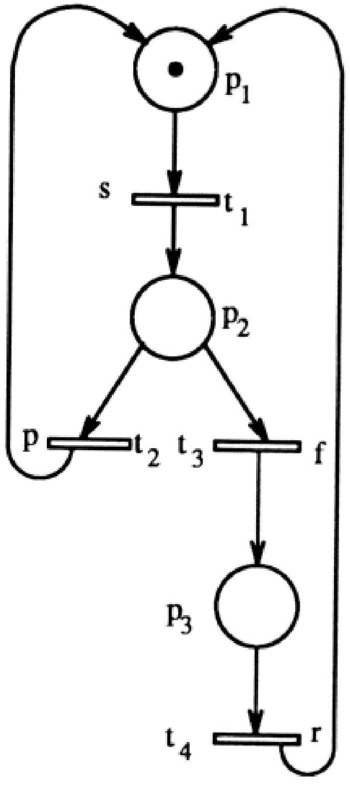
Klasifikacija Petrijevih mreža

Eksponencijalna vremenska Petrijeva mreža

- Primjer eksponencijalne vremenske mreže



(a)



(b)

μ_0=(1, 0, 0)

Mašina se postavlja za sljedeći dio

μ_1=(0, 1, 0)

Mašina obrađuje dio

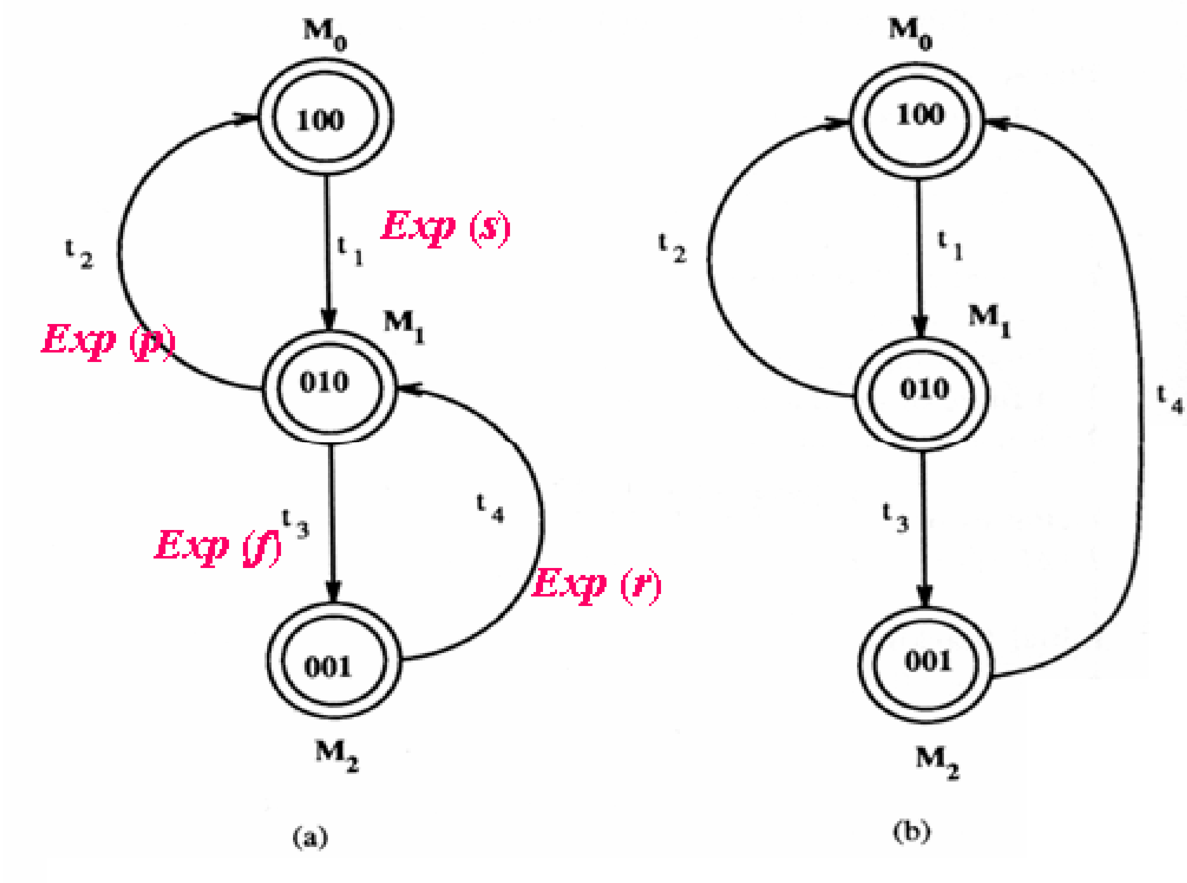
μ2=(1, 0, 0)

Mašina u kvaru, zahtijeva se popravak

Klasifikacija Petrijevih mreža

Eksponencijalna vremenska Petrijeva mreža

- Primjer eksponencijalne vremenske mreže



$$Q = \begin{bmatrix} -s & s & 0 \\ p & -p-f & f \\ 0 & r & -r \end{bmatrix}$$

Klasifikacija Petrijevih mreža

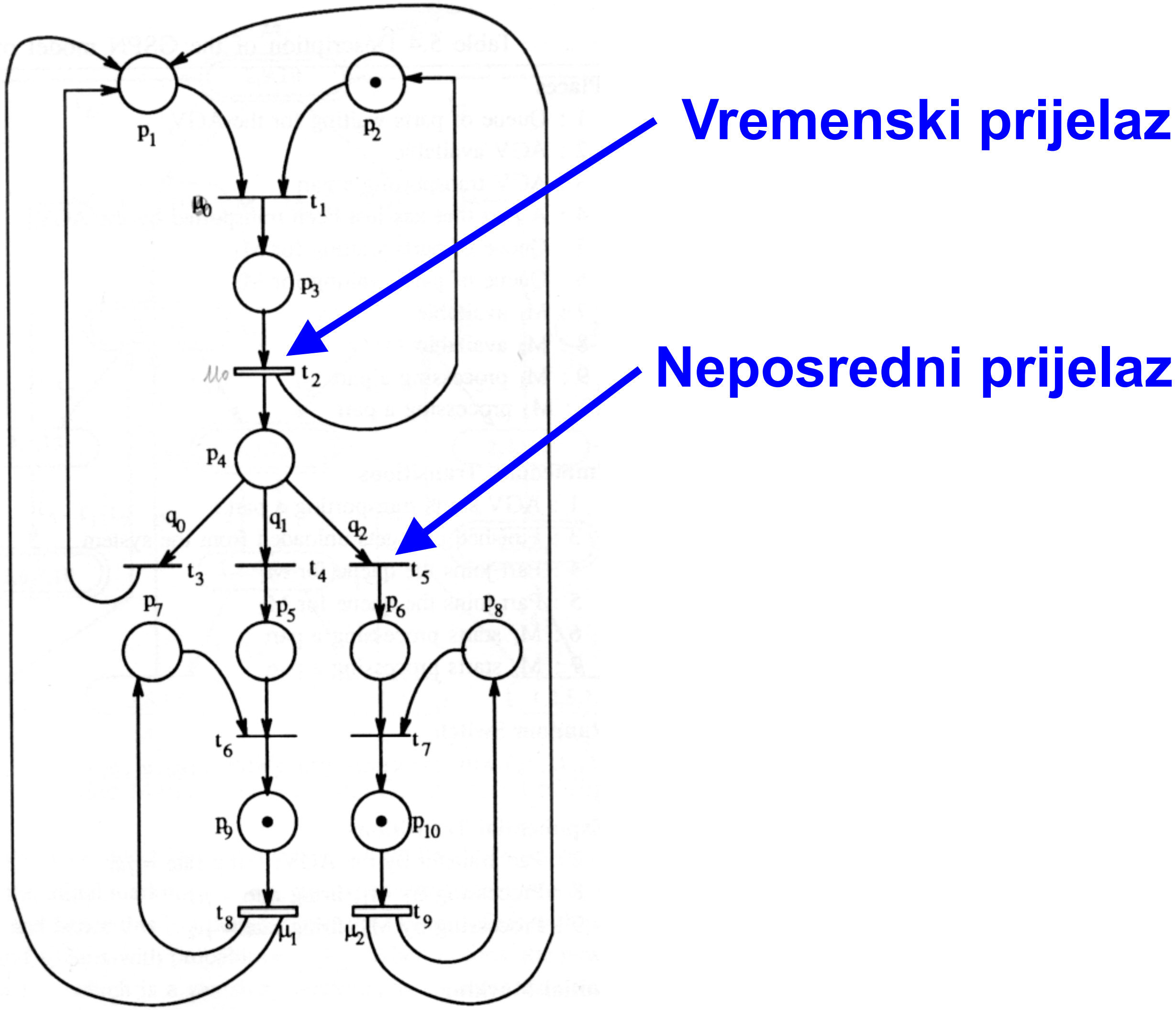
Generalizirana stohastička Petrijeva mreža

Def. 3.19. (Generalizirana stohastička Petrijeva mreža) GSPN je četvorka $GSPN = (C, T_1, T_2, W)$ gdje je:

- *C=(P,T,I,O)* osnovna Petrijeva mreža,
- $T_1 \subseteq T$ skup vremenskih prijelaza, $T_1 \neq 0$,
- $T_2 \subset T$ skup neposrednih prijelaza,
- $T_1 \cap T_2 = 0,\ T = T_1 \cup T_2$,
- $W = (w_1, w_2, \ldots, w_{|T|})$ polje čiji je element $w_i \in \mathbf{R}^+$:
  - ➢ Brzina eksponencijalne raspodjele koja specificira brzinu izvođenja prijelaza, odnosno prijelaz se izvodi nakon slučajnog vremenskog intervala koji ima eksponencijalnu raspodjelu. Ovo se odnosi na vremenske prijelaze, to jest $t_j \in T_1$.
  - ➢ Težina koja specificira relativnu frekvenciju izvođenja prijelaza t_j, gdje je t_j neposredni prijelaz, to jest $t_j \in T_2$.

Klasifikacija Petrijevih mreža

Generalizirana stohastička Petrijeva mreža



Klasifikacija Petrijevih mreža

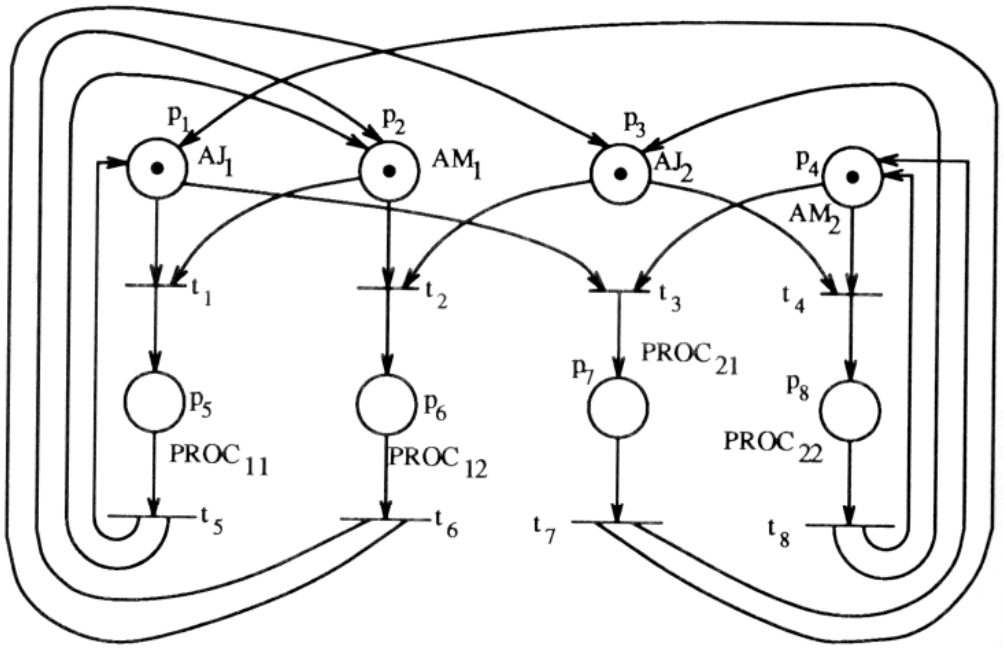
Generalizirana stohastička Petrijeva mreža

- **Nedostatak obične Petrijeve mreže:**
  - nije uključena vremenska komponenta i stoga se ne može provesti analiza performansi sistema (može samo analiza korektnosti).

- **Prednost GSPN u odnosu na običnu (ordinarnu) Petrijevu mrežu:**
  - mogućnost obavljanja funkcionalne analize i analize performansi sistema.

Klasifikacija Petrijevih mreža

Primjer prikaza proizvodnog sistema



Prikaz jednostavnog proizvodnog procesa pomoću Petrijeve mreže

PLACES

AJ_1 : p_1 : Raw parts of type 1
AM_1 : p_2 : Machine M_1 available
AJ_2 : p_3 : Raw parts of type 2
AJ_2 : p_4 : Machine M_1 available
$PROC_{11}$: p_5 : M_1 processing a part type 1
$PROC_{12}$: p_6 : M_1 processing a part type 2
$PROC_{21}$: p_7 : M_2 processing a part type 1
$PROC_{22}$: p_8 : M_2 processing a part type 2

TRANSITIONS

TSP_{11} : t_1: M_1 starts processing a part type 1
TSP_{12} : t_2: M_1 starts processing a part type 2
TSP_{21} : t_3: M_2 starts processing a part type 1
TSP_{22} : t_4: M_2 starts processing a part type 2
TFP_{11} : t_5: M_1 finishes processing a part type 1
TFP_{12} : t_6: M_1 finishes processing a part type 2
TFP_{21} : t_7: M_2 finishes processing a part type 1
TFP_{22} : t_8: M_2 finishes processing a part type 2