3.3 ANALITIČKI JACOBIAN

Ako su položaj i orijentacija vrha manipulatora zadani u obliku minimalnog broja parametara u operacijskom prostoru, prirodno je upitati se da li je moguće računati Jacobian deriviranjem funkcije direktne kinematike s obzirom na varijable zglobova. U tu svrhu koristi se analitička metoda računanja Jacobiana.
Translacijska (linearna) brzina vrha manipulatora može se izraziti preko vremenske derivacije vektora položaja vrha manipulatora $\boldsymbol{p}$ u odnosu na ishodište koordinatnog sistema baze, tj.

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} . \tag{3.14}$$

Minimalni prikaz orijentacije je izražen u obliku tri variable $\boldsymbol{\phi} = [\varphi, \vartheta, \psi]^T$. Vremenska derivacija funkcije $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{q})$ daje drugu komponentu analitičkog Jacobiana $\boldsymbol{J}_\phi(\boldsymbol{q})$:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_\phi(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} , \tag{3.15}$$

tako da je analitički Jacobian oblika:

$$\boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_\phi(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Računanje Jacobiana $\boldsymbol{J}_\phi(\boldsymbol{q})$ kao $\partial\boldsymbol{\phi}/\partial\boldsymbol{q}$ nije jednostavno, budući da funkcija $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{q})$ nije uvijek dostupna u direktnoj formi, ali zahtijeva računanje elemenata relativne matrice rotacija. Tako|er, važno je napomenuti da se derivacija $\dot{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{q})$ razlikuje od vektora ugaone brzine definiranog kod geometrijskog Jacobiana.
Na temelju gornjih premisa, jednadžba diferencijalne kinematike se dobiva preko derivacije direktne kinematičke jednadžbe:

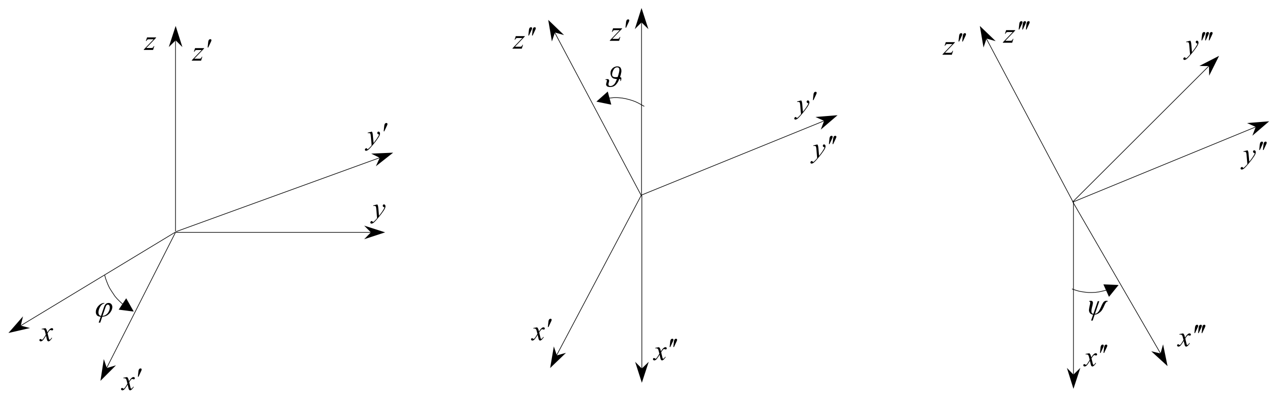
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_\phi(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} , \tag{3.17}$$

gdje je analitički Jacobian :

$$\boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{k}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} . \tag{3.18}$$

Prema tome, analitički Jacobian se razlikuje od geometrijskog jer ugaona brzina vrha manipulatora ω s obzirom na koordinatni sistem baze nije data sa $\dot{\boldsymbol{\phi}}$.
Računanje dijela analitičkog Jacobiana koji se odnosi na orijentaciju $\boldsymbol{J}_\phi(\boldsymbol{q})$ osniva se na minimalnom prikazu orijentacije pomoću Eulerovih uglova. Eulerovi uglovi formiraju minimalni prikaz orijentacije dobivene kompozicijom elementarnih rotacija izraženih u odnosu na osi tekućih koordinatnih sistema.
Neka je $(\varphi, \vartheta, \psi)$ zadani skup Eulerovih uglova. Ukupna rotacija je opisana kompozicijom slijedećih elementarnih rotacija (Sl. 3.1):

- Rotacija referentnog koordinatnog sistema za ugao φ oko osi z, što je opisano matricom $\boldsymbol{R}_z(\varphi)$.
- Rotacija dobivenog koordinatnog sistema za ugao ϑ oko osi y', što je opisano matricom $\boldsymbol{R}_{y'}(\vartheta)$.
- Rotacija tekućeg koordinatnog sistema za ugao ψ oko osi z'', što je opisano matricom $\boldsymbol{R}_{z''}(\psi)$.



Slika 3.1. Prikaz Eulerovih uglova.

Navedene matrice su oblika:

$$\boldsymbol{R}_z(\varphi)=\begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}_{y'}(\vartheta)=\begin{bmatrix} c_\vartheta & 0 & s_\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\vartheta & 0 & c_\vartheta \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}_{z''}(\psi)=\begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Budući da se rezultat dobiva kompozicijom rotacija oko tekućih koordinatnih sistema, slijedi da se množenje matrica vrši sukcesivno zdesna, tj.

$$\boldsymbol{R}_{EUL}=\boldsymbol{R}_z(\varphi)\boldsymbol{R}_{y'}(\vartheta)\boldsymbol{R}_{z''}(\psi)=\begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi c_\vartheta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta s_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

Korisno je riješiti inverzni problem, tj. odrediti skup Eulerovih uglova koji odgovaraju zadanoj matrici rotacije:

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Usporedbom navedenih matrica dobiva se rješenje, uz pretpostavku da vrijedi $r_{13} \neq 0$ i $r_{23} \neq 0$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \mathrm{Atan2}(r_{23}, r_{13}) \\ \vartheta &= \mathrm{Atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi\,. \\ \psi &= \mathrm{Atan2}(r_{32}, -r_{31}) \end{aligned} \tag{3-21}$$

Ako se izabere $-\pi \leq \vartheta \leq 0$, tada je rješenje:

$$\begin{aligned} \varphi &= \mathrm{Atan2}(-r_{23}, -r_{13}) \\ \vartheta &= \mathrm{Atan2}(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \qquad -\pi \leq \vartheta \leq 0\,. \\ \psi &= \mathrm{Atan2}(-r_{32}, r_{31}) \end{aligned} \tag{3-22}$$

Oba rješenja se degeneriraju za $s_\vartheta = 0$, jer se u tom slučaju može odrediti samo suma $\varphi + \psi$, a nije moguće derivirati svaki od njih pojedinačno. Zaista, ako je $\vartheta = 0, \pi$, uzastopne rotacije za uglove φ i ψ obavljaju se oko osi tekućih koordinatnih sistema koji su paralelni, tako da se dobiva jednaka raspodjela s obzirom na rotaciju, tj. prva i treća rotacija se vrše oko iste ose.

Primjer 1. Trosegmentna planarana ruka

Matrica homogene transformacije trosegmentne planarne strukture jednaka je:

$$\boldsymbol{T}_3^0(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

Geometrijska gra|a planarne ruke sugerira da je položaj vrha manipulatora odre|en sa dvije koordinate p_x i p_y, dok je orijentacija odre|ena uglom kojeg vrh manipulatora zatvara sa koordinatnom osi x_0. Prema tome komponente vektora položaja vrha manipulatora i orijentacije dani su izrazima:

$$\begin{aligned} p_x &= a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ p_y &= a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123}\;. \\ \varphi &= \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \end{aligned}$$

Parcijalne derivacije navedenih komponenti s obzirom na varijable zglobova računaju se na slijedeći način:

$$J_{11} = \frac{\partial p_x}{\partial \vartheta_1} = -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} \qquad J_{21} = \frac{\partial p_y}{\partial \vartheta_1} = a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \qquad J_{31} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1} = 1$$

$$J_{12} = \frac{\partial p_x}{\partial \vartheta_2} = -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} \qquad J_{22} = \frac{\partial p_y}{\partial \vartheta_2} = a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \qquad J_{32} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_2} = 1$$

$$J_{13} = \frac{\partial p_x}{\partial \vartheta_3} = -a_3 s_{123} \qquad J_{23} = \frac{\partial p_y}{\partial \vartheta_3} = a_3 c_{123} \qquad J_{33} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_3} = 1$$

Analitički Jacobian trosegmentne planarne ruke ima oblik:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_P \\ \boldsymbol{J}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Vidi se da su elementi Jacobieve matrice složena, nelinearna funkcija karakterističnih dimenzija robota i iznosa upravljanih varijabli, tj. položaja robota.

Primjer 2. Antropomorfna ruka

Matrica prijelaza stanja antropomorfne ruke ima oblik:

$$\boldsymbol{T}_3^0(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

iz koje direktno slijedi vektor položaja:

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ a_2 s_2 + a_3 s_{23} \end{bmatrix}.$$

Parcijalne derivacije komponenti vektora položaja u odnosu na varijable zglobova (upravljane varijable) dobivaju se na slijedeći način:

$$J_{11} = \frac{\partial p_x}{\partial \vartheta_1} = -s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \qquad J_{21} = \frac{\partial p_y}{\partial \vartheta_1} = c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \qquad J_{31} = \frac{\partial p_z}{\partial \vartheta_1} = 0$$

$$J_{12} = \frac{\partial p_x}{\partial \vartheta_2} = -c_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) \qquad J_{22} = \frac{\partial p_y}{\partial \vartheta_2} = -s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) \qquad J_{32} = \frac{\partial p_z}{\partial \vartheta_2} = a_2 c_2 + a_3 c_{23}\ .$$

$$J_{13} = \frac{\partial p_x}{\partial \vartheta_3} = -a_3 c_1 s_{23} \qquad J_{23} = \frac{\partial p_y}{\partial \vartheta_3} = -a_3 s_1 s_{23} \qquad J_{33} = \frac{\partial p_z}{\partial \vartheta_3} = a_3 c_{23}$$

Dio analitičkog Jacobiana koji se odnosi na položaj ima oblik:

$$\boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Drugi dio analitičkog Jacobiana koji se odnosi na orijentaciju računa se na temelju poznavanja Eulerovih uglova. Eulerovi uglovi se računaju na osnovu izraza (3-21) kako sliedi:

$$\varphi = \text{Atan2}(r_{23}, r_{13}) = \text{Atan2}(-c_1, s_1) = \vartheta_1$$

$$\vartheta = \text{Atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) = \text{Atan2}(\sqrt{s_1^2 + (-c_1)^2}, 0) = \text{Atan2}(1,0) = \frac{\pi}{2} \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$

$$\psi = \text{Atan2}(r_{32}, -r_{31}) = \text{Atan2}(c_{23}, -s_{23}) = \vartheta_2 + \vartheta_3$$

Elementi matrice $\boldsymbol{J}_\phi(\boldsymbol{q})$ dobivaju se računanjem parcijalnih derivacija Eulerovih uglova u odnosu na varijable pojedinih zglobova:

$$\begin{array}{lll} J_{41} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1} = 1 & J_{51} = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta_1} = 0 & J_{61} = \dfrac{\partial \psi}{\partial \vartheta_1} = 0 \\ J_{42} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_2} = 0 & J_{52} = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta_2} = 0 & J_{62} = \dfrac{\partial \psi}{\partial \vartheta_2} = 1 \\ J_{43} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_3} = 0 & J_{53} = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta_3} = 0 & J_{63} = \dfrac{\partial \psi}{\partial \vartheta_3} = 1 \end{array}.$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti $\boldsymbol{J}_\phi(\boldsymbol{q})$ postaje

$$\boldsymbol{J}_\phi(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

Konačno, cjelokupna matrica Jacobiana ima oblik:

$$\boldsymbol{J}_A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_\phi(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

Primjer 3. Četverosegmentni manipulator sferne strukture

Matrica prijelaza stanja manipulatora sferne strukture jednaka je:

$$\boldsymbol{T}_4^0 = \begin{bmatrix} c_1c_{24} & -s_1 & c_1s_{24} & c_1[s_2(l_3+d_3)+s_{24}l_4]-s_1l_2 \\ s_1c_{24} & c_1 & s_1s_{24} & s_1[s_2(l_3+d_3)+s_{24}l_4]-c_1l_2 \\ -s_{24} & 0 & c_{24} & l_1+c_2(l_3+d_3)+c_{24}l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

vektor položaja $\boldsymbol{p}$ i Eulerovi uglovi iznose:

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1[s_2(l_3+d_3)+s_{24}l_4]-s_1l_2 \\ s_1[s_2(l_3+d_3)+s_{24}l_4]-c_1l_2 \\ l_1+c_2(l_3+d_3)+c_{24}l_4 \end{bmatrix}, \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \mathrm{Atan2}(r_{23}, r_{13}) = \mathrm{Atan2}(s_1s_{24}, c_1s_{24}) = \mathrm{Atan2}(s_1, c_1) = \vartheta_1 \\ \vartheta &= \mathrm{Atan2}(\sqrt{r_{13}^2+r_{23}^2}, r_{33}) = \mathrm{Atan2}(\sqrt{(c_1s_{24})^2+(s_1s_{24})^2}, \mathrm{c}_{24}) \\ &= \mathrm{Atan2}\,(\sqrt{(c_1^2+s_1^2)s_{24}^2}, \mathrm{c}_{24}) = \mathrm{Atan2}\,(s_{24}, c_{24}) = \vartheta_2+\vartheta_4 \qquad 0 \le \vartheta \le \pi \\ \psi &= \mathrm{Atan2}(r_{32}, -r_{31}) = \mathrm{Atan2}(0, s_{24}) = \mathrm{Atan2}(0) = 0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Iz dobivenih uglova se vidi da se jedino poniranje (ugao ϑ) može proizvoljno zadati kombinacijom upravljanih koordinata ϑ_2 i ϑ_4, skretanje je već definirano sa ϑ_1, a valjanje je uvijek 0. Stoga se može pisati da je vektor vanjskih koordinata za zadani robot jednak: $\boldsymbol{r} = [p_x \;\; p_y \;\; p_z \;\; \vartheta]^T$.

Elementi Jacobieve matrice su:

$$J_{11} = \frac{\partial p_x}{\partial \vartheta_1} = -c_1l_2 - s_1s_2(l_3+d_3) - s_1s_{24}l_4 = -p_y \qquad J_{21} = \frac{\partial p_y}{\partial \vartheta_1} = -s_1l_2 + c_1s_2(l_3+d_3) + c_1s_{24}l_4 = p_x$$

$$J_{12} = \frac{\partial p_x}{\partial \vartheta_2} = c_1c_2(l_3+d_3) + c_1c_{24}l_4 \qquad J_{22} = \frac{\partial p_y}{\partial \vartheta_2} = s_1c_2(l_3+d_3) + s_1c_{24}l_4$$

$$J_{13} = \frac{\partial p_x}{\partial d_3} = c_1s_2 \qquad J_{23} = \frac{\partial p_y}{\partial d_3} = s_1s_2$$

$$J_{34} = \frac{\partial p_x}{\partial \vartheta_4} = c_1c_{24}l_4 \qquad J_{24} = \frac{\partial p_y}{\partial \vartheta_4} = s_1c_{24}l_4$$

$$J_{31} = \frac{\partial p_z}{\partial \vartheta_1} = 0 \qquad J_{41} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta_1} = 0$$

$$J_{32} = \frac{\partial p_z}{\partial \vartheta_2} = -s_2(l_3 + d_3) - s_{24} l_4 \qquad J_{42} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta_2} = 1$$

$$J_{33} = \frac{\partial p_z}{\partial d_3} = c_2 \qquad J_{43} = \frac{\partial \vartheta}{\partial d_3} = 0$$

$$J_{34} = \frac{\partial p_z}{\partial \vartheta_4} = -s_{24} \mathrm{l}_4 \qquad J_{44} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta_4} = 1$$

Matrica Jacobiana je:

$$\boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -c_1 l_2 - s_1 s_2 (l_3 + d_3) - s_1 s_{24} l_4 & c_1 c_2 (l_3 + d_3) + c_1 c_{24} l_4 & c_1 s_2 & c_1 c_{24} l_4 \\ -s_1 l_2 + c_1 s_2 (l_3 + d_3) + c_1 s_{24} l_4 & s_1 c_2 (l_3 + d_3) + s_1 c_{24} l_4 & s_1 s_2 & s_1 c_{24} l_4 \\ 0 & -s_2 (l_3 + d_3) - s_{24} l_4 & c_2 & -s_{24} l_4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.32}$$

Primjer 4. Stanford manipulator

Matrica prijelaza stanja (homogene transformacije) Stanford manipulatora dana je izrazima (2.12) i (2.13). Vektor položaj manipulatora je:

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + (c_1 (c_2 c_4 s_5 - s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5) d_6 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + (s_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5) d_6 \\ c_2 d_3 + (-s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5) d_6 \end{bmatrix}. \tag{3.33}$$

Elementi matrice $\boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{q})$ računaju se na slijedeći način:

$$J_{11} = \frac{\partial p_x}{\partial \vartheta_1} = -s_1 s_2 d_3 - c_1 d_2 - d_6 (c_1 s_4 s_5 + s_1 c_2 c_4 s_5 + s_1 s_2 c_5) \qquad J_{21} = \frac{\partial p_y}{\partial \vartheta_1} = c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + d_6 (c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 s_2 c_5 - s_1 s_4 s_5)$$

$$J_{12} = \frac{\partial p_x}{\partial \vartheta_2} = c_1 c_2 d_3 + c_1 d_6 (c_2 c_5 - s_2 c_4 s_5) \qquad J_{22} = \frac{\partial p_y}{\partial \vartheta_2} = s_1 c_2 d_3 + s_1 d_6 (c_2 c_5 - s_2 c_4 s_5)$$

$$J_{13} = \frac{\partial p_x}{\partial d_3} = c_1 s_2 \qquad J_{23} = \frac{\partial p_y}{\partial d_3} = s_1 s_2$$

$$J_{14} = \frac{\partial p_x}{\partial \vartheta_4} = -s_5 d_6 (s_1 c_4 + c_1 c_2 s_4) \qquad J_{24} = \frac{\partial p_y}{\partial \vartheta_4} = s_5 d_6 (c_1 c_4 - s_1 c_2 s_4)$$

$$J_{15} = \frac{\partial p_x}{\partial \vartheta_5} = d_6 (c_1 c_2 c_4 c_5 - s_1 s_4 c_5 - c_1 s_2 s_5) \qquad J_{25} = \frac{\partial p_y}{\partial \vartheta_5} = -d_6 (c_1 c_4 s_4 - s_1 s_2 s_5 + s_1 c_2 c_4 c_5)$$

$$J_{16} = \frac{\partial p_x}{\partial \vartheta_6} = 0 \qquad J_{26} = \frac{\partial p_y}{\partial \vartheta_6} = 0$$

Eulerovi uglovi iznose:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \mathrm{Atan2}(r_{23}, r_{13}) \\
\vartheta &= \mathrm{Atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \qquad 0 \le \vartheta \le \pi \\
\psi &= \mathrm{Atan2}(r_{32}, -r_{31})
\end{aligned} \tag{3.34}$$

gdje su:

$$\begin{aligned}
r_{13} &= c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5 \\
r_{23} &= s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5 \\
r_{31} &= -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6 \,. \\
r_{32} &= s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 \\
r_{33} &= -s_2c_4s_5 + c_2c_5
\end{aligned}$$