3. DIFERENCIJALNA KINEMATIKA

3.1 UVOD

U prethodnom poglavlju su razmatrane jednadžbe direktne i inverzne kinematike koje povezuju varijable zglobova (unutrašnje, upravljane koordinate) sa pozicijom i orijentacijom vrha manipulatora (vanjske koordinate). Međutim, često je potrebno poznavati ne samo položaj robota, već i njegovu brzinu u prostoru vanjskih koordinata. Brzina robota najčešće se mjeri indirektno, mjerenjem brzina upravljanih koordinata. Poznavajući geometriju robota, njegov položaj i brzinu svake upravljane koordinate, brzina vrha manipulatora može se izračunati. Diferencijalna kinematika ima za cilj naći ovisnost brzine zgloba u odnosu na odgovarajuću linearnu i ugaonu brzinu vrha manipulatora. Kao rezultat nastaje matrica, poznata pod nazivom *geometrijski Jacobian,* koja ovisi o strukturi manipulatora. Ako je lokacija vrha manipulatora izražena u odnosu na minimalnu prezentaciju u operacijskom prostoru, moguće je izračunati Jacobianovu matricu deriviranjem direktne kinematičke funkcije s obzirom na varijable zgloba. Rezultirajuća matrica naziva se *analitički Jacobian* i općenito se razlikuje od geometrijskog. Matrica Jacobiana predstavlja važan matematički alat koji pomaže u pronalaženje singulariteta manipulatora, analizi redudancije, određivanje inverznih kinematičkih algoritama, opisu preslikavanja između sila primjenjenih na vrh manipulatora i rezultantnih momenata zglobova, a posebno kod izvoda dinamičke jednadžbe kretanja i projektiranja upravljačke sheme u operacijskom prostoru.

3.2 GEOMETRIJSKI JACOBIAN

Kod problema diferencijalne kinematike želimo izraziti linearnu brzinu $\dot{\boldsymbol{p}}$ i ugaonu brzinu $\boldsymbol{\omega}$ kao funkciju brzina zglobova $\dot{\boldsymbol{q}}$, na slijedeći način:

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{J}_O(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{3.2}$$

gdje je $\boldsymbol{J}_P$ (dimenzija (3xn)) matrica koja karakterizira doprinos brzine zglobova $\dot{\boldsymbol{q}}$ linearnoj brzini vrha manipulatora $\dot{\boldsymbol{p}}$, i $\boldsymbol{J}_O$ (dimenzija (3xn)) matrica koja izražava doprinos brzine zglobova $\dot{\boldsymbol{q}}$ ugaonoj brzini vrha manipulatora ω. Gornje jednadžbe se mogu napisati u kompaktnoj formi:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{3.3}$$

Izraz (3.3) predstavlja diferencijalnu kinematičku jednadžbu manipulatora. Matrica J (dimenzija (6xn)) je geometrijski Jacobian manipulatora:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_P \\ \boldsymbol{J}_O \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Pojedini elementi matrice (3.4), odnosno geometrijskog Jacobiana, dobivaju se na temelju slijedećeg izraza:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{P_i} \\ \boldsymbol{J}_{O_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{i-1} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} & \text{za prizmatični zglob,} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{i-1} \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{i-1}) \\ \boldsymbol{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{za rotacijski zglob.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Jednadžba (3.5) omogućuje računanje Jacobiana na jednostavan, sistematičan način na osnovu relacija direktne kinematike. U stvari, vektori $\boldsymbol{z}_{i-1}, \boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{p}_{i-1}$ su funkcije varijabli zglobova i računaju se na slijedeći način:

- $\boldsymbol{z}_{i-1}$ predstavlja treći stupac matrice rotacije $\boldsymbol{R}_{i-1}^{0}$, tj.,

$$\boldsymbol{z}_{i-1} = \boldsymbol{R}_1^0(q_1)\ \dots\ \boldsymbol{R}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})\boldsymbol{z}_0, \tag{3.6}$$

  gdje $\boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ omogućuje izdvajanje datog stupca.

- $\boldsymbol{p}$ je dat sa prva tri elementa četvrtog stupca matrice transformacije $\boldsymbol{T}_n^0$, označenog sa $\widetilde{\boldsymbol{p}}$. Vektor $\widetilde{\boldsymbol{p}}$ je:

$$\widetilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{A}_1^0(q_1)\ \dots\ \boldsymbol{A}_n^{n-1}(q_n)\widetilde{\boldsymbol{p}}_0, \tag{3.7}$$

  gdje je $\widetilde{\boldsymbol{p}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

- Prva tri elementa četvrtog stupca matrice transformacije $\boldsymbol{T}_{i-1}^0$ sačinjavaju vektor $\boldsymbol{p}_{i-1}$:

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}_{i-1} = \boldsymbol{A}_1^0(q_1)\ \dots\ \boldsymbol{A}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})\widetilde{\boldsymbol{p}}_0. \tag{3.8}$$

U nastavku su dani primjeri izračunavanja geometrijskog Jacobiana za neke od tipičnih struktura manipulatora.

Primjer 1. Antropomorfna ruka

Budući da su sva tri zgloba obrtna, geometrijski Jacobian ima oblik:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0) & \boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1) & \boldsymbol{z}_2 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_2) \\ \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 \end{bmatrix}.$$

Vektori položaja pojedinih zglobova dani su redom:

i=1

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i=2

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}_1 = \boldsymbol{A}_1^0 \widetilde{\boldsymbol{p}}_0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i=3

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}_2 = \boldsymbol{A}_1^0 \boldsymbol{A}_2^1 \widetilde{\boldsymbol{p}}_0 = \boldsymbol{T}_2^0 \widetilde{\boldsymbol{p}}_0 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 & a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & -c_1 & a_2 s_1 s_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_3 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 \\ a_2 s_1 s_2 \\ a_3 s_2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 \\ a_2 s_1 s_2 \\ a_3 s_2 \end{bmatrix},$$

te vektor položaja vrha manipulatora:

$$\widetilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{A}_1^0 \boldsymbol{A}_2^1 \boldsymbol{A}_3^2 \widetilde{\boldsymbol{p}}_0 = \boldsymbol{T}_3^0 \widetilde{\boldsymbol{p}}_0 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ a_2 s_2 + a_3 s_{23} \end{bmatrix}.$$

Postupak dobivanja jediničnih vektora $\boldsymbol{z}_{i-1}$ je slijedeći:

i=1

$$\boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i=2

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{R}_1^0 \boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i=3

$$\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{R}_2^0 \boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & -c_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vektorski produkti $\boldsymbol{z}_{i-1} \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{i-1})$, i=1,2,3 , su:

$$
z_0 \times (p - p_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ a_2s_2 + a_3s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
z_1 \times (p - p_1) = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ a_2s_2 + a_3s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) \\ -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) \\ a_2c_2 + a_3c_{23} \end{bmatrix}
$$

$$
z_2 \times (p - p_2) = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_3c_1c_{23} \\ a_3s_1c_{23} \\ a_3s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3c_1s_{23} \\ -a_3s_1s_{23} \\ a_3c_{23} \end{bmatrix}.
$$

Konačno, geometrijski Jacobian je:

$$
J = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.9}
$$

Samo tri od šest redaka Jacobianove matrice (3.9) su linearno nezavisni. Imamo samo tri stupnja pokretljivosti određena sa prva tri retka (3.9):

$$
J_P = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \end{bmatrix} \tag{3.10}
$$

koji opisuju veze između brzina zglobova i linearne brzine vrha manipulatora. Struktura ne dopušta postizanje proizvoljne ugaone brzine ω zbog činjenice da komponente ω_x i ω_y nisu nezavisne $(s_1\omega_y = -c_1\omega_x)$.

Primjer 2. Trosegmentna planarna ruka

Jacobian trosegmentne planarne ruke je:

$$
J = \begin{bmatrix} z_0 \times (p - p_0) & z_1 \times (p - p_1) & z_2 \times (p - p_2) \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix},
$$

budući da su svi zglobovi obrtni.
Na osnovu (3.5),(3.6) i (3.7) dobivaju se izrazi za vektore položaja pojedinih segmenata:

$$\boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1c_1 \\ a_1s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

i jediničnih vektora koordinatnih osa obrtnih zglobova:

$$\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

koji su paralelni sa koordinatnom osom $\boldsymbol{z}_0$.
Vektorski produkti $\boldsymbol{z}_{i-1} \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{i-1})$, i=1,2,3 , su:

$$\boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} - a_3s_{123} \\ a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ a_2s_{12} + a_3s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2s_{12} - a_3s_{123} \\ a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}_2 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_3c_{123} \\ a_3s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3s_{123} \\ a_3c_{123} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Geometrijski Jacobian je predstavljen matricom:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} - a_3s_{123} & -a_2s_{12} - a_3s_{123} & -a_3s_{123} \\ a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} & a_2c_{12} + a_3c_{123} & a_3c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

U izrazu (3.11) su samo tri nenulta retka relevantna (rang matrice je najviše 3), a odnose se na dvije komponente linearne brzine duž osi x_0, y_0 i komponente ugaone brzine oko osi z_0. Ako orijentacija nije važna, (2x3) matricu Jacobiana za poziconi dio čine prva dva redka matrice (3.11), tj.

$$\boldsymbol{J}_P = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Primjer 3. Sferna ruka

Geometrijski Jacobian sferne ruke ima oblik:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0) & \boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1) & \boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{z}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

jer su prva dva zgloba obrtna, a treći zglob translacijski.

Vektori položaja pojedinih zglobova dani su slijedećim izrazima:

$$\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix}.$$

Postupak dobivanja jediničnih vektora $\boldsymbol{z}_{i-1}$ je slijedeći:

$$\boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Vektorski produkti $\boldsymbol{z}_{i-1} \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{i-1})$, i=1,2 su:

$$\boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 s_2 d_3 - c_1 d_2 \\ c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1) = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 d_3 \\ s_1 c_2 d_3 \\ -s_2 d_3 \end{bmatrix}$$

Konačno, geometrijski Jacobian je:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -s_1 s_2 d_3 - c_1 d_2 & c_1 c_2 d_3 & c_1 s_2 \\ c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 & s_1 c_2 d_3 & s_1 s_2 \\ 0 & -s_2 d_3 & c_2 \\ 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3-13}$$

Primjer 4. Stanford manipulator

U slučaju Stanford manipulatora matrica Jacobiana je oblika:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0) & \boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1) & \boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{z}_3 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_3) & \boldsymbol{z}_4 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_4) & \boldsymbol{z}_5 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_5) \\ \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{z}_1 & 0 & \boldsymbol{z}_3 & \boldsymbol{z}_4 & \boldsymbol{z}_5 \end{bmatrix}.$$

Računanjem vektora položaja različitih zglobova dobivaju se slijedeći izrazi:

$$\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{p}_5 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + d_6 (c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 s_2 c_5 - s_1 s_4 s_5) \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + d_6 (c_1 s_4 s_5 + s_1 c_2 c_4 s_5 + s_1 s_2 c_5) \\ c_2 d_3 + d_6 (c_2 c_5 - s_2 c_4 s_5) \end{bmatrix}.$$

Jedinični vektori $\boldsymbol{z}_{i-1}$ su:

$$\boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_3 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}_4 = \begin{bmatrix} -c_1c_2s_4 - s_1c_4 \\ -s_1c_2s_4 + c_1c_4 \\ s_2s_4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{z}_5 = \begin{bmatrix} c_1c_2c_4s_5 - s_1s_4s_5 + c_1s_2c_5 \\ s_1c_2c_4s_5 + c_1s_4s_5 + s_1s_2c_5 \\ -s_2c_4s_5 + c_2c_5 \end{bmatrix}.$$

Za vektorske produkte $\boldsymbol{z}_{i-1} \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{i-1})$, i=1,2,3 , dobivaju se slijedeće vrijednosti:

$$\boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0) = \begin{bmatrix} -s_1s_2d_3 - c_1d_2 - d_6(c_1s_4s_5 + s_1c_2c_4s_5 + s_1s_2c_5) \\ c_1s_2d_3 - s_1d_2 + d_6(c_1c_2c_4s_5 + c_1s_2c_5 - s_1s_4s_5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1) = \begin{bmatrix} c_1c_2d_3 + c_1d_6(c_2c_5 - s_2c_4s_5) \\ s_1c_2d_3 + s_1d_6(c_2c_5 - s_2c_4s_5) \\ -s_2d_3 - d_6(s_2c_5 + c_2c_4s_5) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}_3 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_3) = \begin{bmatrix} -s_5d_6(s_1c_4 + c_1c_2s_4) \\ s_5d_6(c_1c_4 - s_1c_2s_4) \\ s_2s_4s_5d_6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}_4 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_4) = \begin{bmatrix} d_6(c_1c_2c_4c_5 - s_1s_4c_5 - c_1s_2s_5) \\ d_6(c_1c_4s_4 - s_1s_2s_5 + s_1c_2c_4c_5) \\ -d_6(c_2s_5 + s_2c_4c_5) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}_5 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_5) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$