4. DINAMIKA MANIPULATORA

4.1 UVOD

Određivanje *dinamičkog modela* (eng. dinamic model) manipulatora je bitno sa stajališta simulacije kretanja, analize strukture manipulatora i sinteze algoritma upravljanja. Dinamičko ponašanje manipulatora dano je u obliku vremenske promjene konfiguracije robotske ruke u odnosu na momente zglobova, izazvane djelovanjem aktuatora pridruženih korespodentnim zglobovima manipulatora. Ova povezanost se može izraziti skupom diferencijalnih jednadžbi, tzv. *jednadžbi kretanja*, koje određuju odziv manipulatora uz prisustvo ulaznih momenata zglobova. Odziv manipulatora predstavlja kretanje segmenata manipulatora.
Postoje dvije osnovne metode određivanja jednadžbi kretanja, odnosno dinamičkog modela robota, a to su: Lagrangeova i Newton-Eulerova metoda. Obje metode opisuju dinamike manipulatora u zglobovskom prostoru. Prva metoda opisuje dinamičko ponašanje manipulatora na osnovu rada i energije upotrebom generaliziranih koordinata. Sve radne i prinudne sile se automatski eliminiraju primjenom ove metode, a rezultantne jednadžbe su općenito izražene pomoću pomaka i momenata zglobova. Newton-Eulerova metoda se temelji na direktnoj primjeni drugog Newtonovog zakona kretanja, koji opisuje dinamiku sistema pomoću sila i momenata. Jednadžbe kretanja, dobivene ovom metodom, uključuju sve sile i momente koji djeluju na pojedinačne zglobove, kao i sile i momente koji djeluju među zglobovima. Newton-Eulerov postupak dobivanja dinamičkog modela robota je rekurzivan, te je pogodan za proračun dinamičkog modela na računaru, posebno kod robota sa većim brojem osi. Lagrangeov model je konceptualno jednostavniji i sistematičniji.
U nastavku se tretira problematika dinamičkog modela manipulatora upotrebom Lagrangeovog postupka.

4.2 LAGRANGEOVA JEDNADŽBA

Dinamički model manipulatora opisuje veze između momenata koji pogone zglobove i kretanja strukture manipulatora.
Lagrangeovim postupkom se formiraju jednadžbe kretanja na sistematičan način neovisno o referentnom koordinatnom sistemu. Ovaj model se temelji na pojmovima: *generalizirane koordinate* i *generalizirane sile*. Generalizirane koordinate $\lambda_i, i = 1,2,...,n$ opisuju položaj segmenata manipulatora sa n-stupnjeva pokretljivosti. Za manipulator sa strukturom otvorenog kinematičkog lanca, generalizirane koordinate čine vektor varijabli zglobova:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{q} . \tag{4.1}$$

Generalizirane sile su sile koje djeluju na zglobove manipulatora, odnosno, sile koje preostaju nakon uklanjanja inercijalnih sila i sile teže, pri čemu su inercijalne sile povezane sa kinetičkom energijom robotske ruke, a gravitacijske sile sa potencijalnom nergijom.
Lagrangeova funkcija mehaničkog sistema se može definirati kao funkcija generaliziranih koordinata:

$$L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{q}) , \tag{4.2}$$

gdje T i U predstavljaju kinetičku i potencijalnu energiju sistema.

Kinetička energija ovisi o položaju i brzini manipulatora ($\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$), a potencijalna energija ovisi samo o položaju ($\boldsymbol{q}$), tj. zakretu robotske ruke.
Korištenjem Lagrangeove funkcije, jednadžba kretanja manipulatora (Lagrangeova jednadžba) poprima slijedeći oblik:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})-\frac{\partial}{\partial q_i}L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\xi_i \quad , i=1,...,n \tag{4.3}$$

gdje je ξ_i generalizirana sila povezana sa generaliziranom koordinatom λ_i.

Jednadžba (4.3) uspostavlja relacije između generalizirani sila narinutih na manipulator i položaja, brzine i ubrzanja zglobova. Slijedi da je pri izvodu dinamičkog modela manipulatora potrebno početi sa određivanjem kinetičke i potencijalne enrgije sistema.

4.2.1 Računanje kinetičke energije

Ukupna kinetička energija manipulatora sa n krutih segmenata je definirana kao suma doprinosa kretanja svakog segmenta i doprinosa kretanja svakog aktuatora (motora):

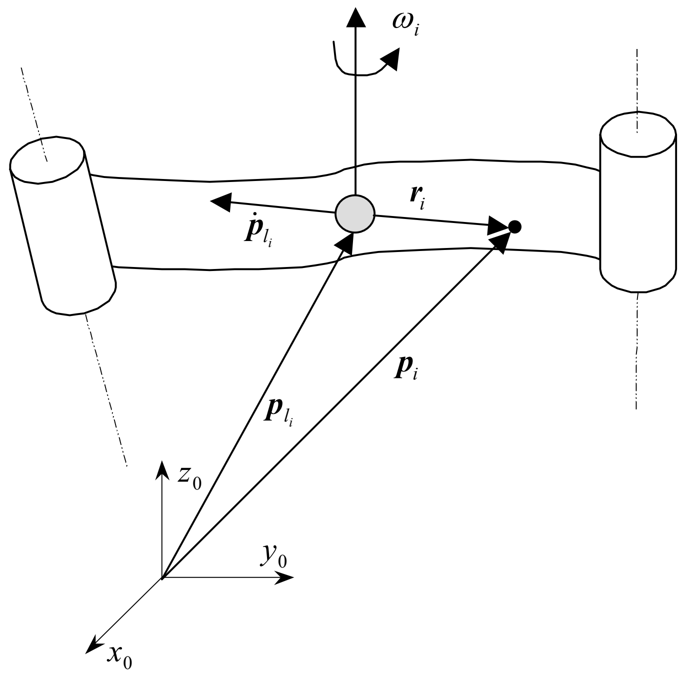
$$T=\sum_{i=1}^{n}\left(T_{l_i}+T_{m_i}\right), \tag{4.4}$$

gdje je T_{l_i} kinetička energija segmenta i, a T_{m_i} kinetička energija motora koji osnažuje segment i.

Kinetička energija segmenta i dana je slijedećim izrazom:

$$T_{l_i}=\frac{1}{2}\int_{V_{l_i}}\dot{\boldsymbol{p}}_i^T\dot{\boldsymbol{p}}_i\rho dV , \tag{4.5}$$

gdje su $\dot{\boldsymbol{p}}_i$ vektor linijske brzine, ρ gustoća elementarnog dijela volumena dV i V_{l_i} volumen segmenta i (Sl. 4.1.).



Slika 4.1. Kinematički opis segmenta i za potrebe Lagrangeove formulacije.

Vektori pozicije elementarnog dijela $\boldsymbol{p}_i$ i centra mase segmenta $\boldsymbol{p}_{l_i}$ izraženi su u odnosu na koordinatni sistem baze. Razlika ovih vektora izražena je vektorom $\boldsymbol{r}_i$:

$$\boldsymbol{r}_i = [r_{ix} \;\; r_{iy} \;\; r_{iz}]^T = \boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_{l_i}\,. \tag{4.6}$$

Vektor centra mase segmenta i dan je slijedećim izrazom:

$$\boldsymbol{p}_{l_i} = \frac{1}{m_{l_i}} \int_{V_{l_i}} \boldsymbol{p}_i \rho dV \tag{4.7}$$

gdje je m_{l_i} masa segmenta. Kao rezultat nevedenog, brzina zamišljene tačke zgloba može se napisati kao:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}}_i &= \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i} + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_i \\ &= \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}_i)\boldsymbol{r}_i\,, \end{aligned} \tag{4.8}$$

gdje $\dot{\boldsymbol{p}}_{l_i}$ i $\boldsymbol{\omega}_i$ predstavljaju respektivno linijsku brzinu centra mase i ugaonu brzinu segmenta.
Uvrštavanjem izraza (4-8) u (4-5) dobivaju se slijedeći doprinosi kinetičkih energija uslijed translacijskog i rotacijskog kretanja:

Translacijsko. Doprinos je :

$$\frac{1}{2}\int_{V_{l_i}} \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i}^T \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i} \rho dV = \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i}^T \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i}\,. \tag{4.9}$$

Međusobno. Doprinos je :

$$2\left(\frac{1}{2}\int_{V_{l_i}} \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i}^T \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}_i)\boldsymbol{r}_i \rho dV\right) = 2\left(\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i}^T \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \int_{V_{l_i}} (\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_{l_i}) \rho dV\right) = 0$$

budući da na osnovu (4.7) vrijedi

$$\int_{V_{l_i}} \boldsymbol{p}_i \rho dV = \boldsymbol{p}_{l_i} \int_{V_{l_i}} \rho dV\,.$$

Rotacijsko. Doprinos je :

$$\frac{1}{2}\int_{V_{l_i}} \boldsymbol{r}_i^T \boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{\omega}_i) \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{\omega}_i)\boldsymbol{r}_i \rho dV = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \left(\int_{V_{l_i}} \boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{r}_i) \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{r}_i) \rho dV\right) \boldsymbol{\omega}_i$$

gdje je iskorišteno svojstvo $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}_i)\boldsymbol{r}_i = -\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{\omega}_i$. S obzirom na izraz matričnog operatora $\boldsymbol{S}(\cdot)$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}_i) = \begin{bmatrix} 0 & -r_{iz} & r_{iy} \\ r_{iz} & 0 & -r_{iy} \\ -r_{iy} & r_{ix} & 0 \end{bmatrix},$$

dobiva se

$$\frac{1}{2}\int_{V_{l_i}} \boldsymbol{r}_i^{\,T}\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{\omega}_i)\boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{\omega}_i)\boldsymbol{r}_i\rho dV = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i^T\boldsymbol{I}_{l_i}\boldsymbol{\omega}_i\,. \tag{4.10}$$

Matrica

$$\boldsymbol{I}_{l_i} = \begin{bmatrix} \int(r_{iy}^2 + r_{iz}^2)\rho dV & -\int r_{ix}r_{iy}\rho dV & -\int r_{ix}r_{iz}\rho dV \\ -\int r_{ix}r_{iy}\rho dV & \int(r_{ix}^2 + r_{iz}^2)\rho dV & -\int r_{iy}r_{iz}\rho dV \\ -\int r_{ix}r_{iz}\rho dV & -\int r_{iy}r_{iz}\rho dV & \int(r_{ix}^2 + r_{iy}^2)\rho dV \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{l_ixx} & -I_{l_ixy} & -I_{l_ixz} \\ -I_{l_ixy} & I_{l_iyy} & -I_{l_iyz} \\ -I_{l_ixz} & -I_{l_iyz} & I_{l_izz} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

je simetrična i predstavlja *tenzor inercije* relativno u odnosu na centar mase segmenta i izraženog u koordinatama sistema baze. Tenzor inercije određuje raspodjelu mase krutog tijela. Matrica (4.11) se sastoji od šest različitih volumnih integrala pri čemu se izrazi na dijagonali te matrice nazivaju momenti inercije, a preostali vandijagonalni izrazi su produkti inercije. Budući da je pozicija segmenta i ovisna o konfiguraciji manipulatora to je i tenzor inercije, mjeren u odnosu na ishodište koordinatnog sistema baze, također ovisan o konfiguraciji manipulatora. Ugaona brzina $\boldsymbol{\omega}_i$ izražena je u koordinatama baze. Međutim, za računanje ugaone brzine segmenta i izražene u koordinatama sistema centra mase segmenta (kao kod Denevit-Hartenbergove konvencije), potrebno je koristiti matricu rotacije na slijedeći način:

$$\boldsymbol{\omega}_i^i = \boldsymbol{R}_i^T\boldsymbol{\omega}_i$$

gdje $\boldsymbol{R}_i$ predstavlja matricu rotacije iz koordinatnog sistema segmenta i u koordinatnatni sistem baze. U odnosu na koordinatni sistem segmenta, tenzor inercije je konstantan, jer segment i njemu pridruženi koordinatni sistem rotiraju zajedno. Ako se ovaj konstantni tenzor označi sa $\boldsymbol{I}_{l_i}^i$ i upotrijebi relacija (4.10) dobiva se:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i^T\boldsymbol{I}_{l_i}\boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i^T\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{I}_{l_i}^i\boldsymbol{R}_i^T\boldsymbol{\omega}_i\,. \tag{4.12}$$

Iz izraza (4.12) slijedi izraz za računanje tenzora inercije $\boldsymbol{I}_{l_i}$:

$$\boldsymbol{I}_{l_i} = \boldsymbol{R}_i\boldsymbol{I}_{l_i}^i\boldsymbol{R}_i^T\,. \tag{4.13}$$

Ako se osi koordinatnog sistema centra segmenta i podudaraju s koordinatama tačke određene vektorom $\boldsymbol{p}_i$, tada su produkti inercije jednaki nuli i tenzor inercije relativno u odnosu na centar mase je dijagonalna matrica.

Prema tome, ukupna kinetička energija segmenta i, koja obuhvaća i translacijska i rotacijska kretanja, jednaka je

$$T_{l_i} = \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i}^T \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{I}_{l_i}^i \boldsymbol{R}_i^T \boldsymbol{\omega}_i \,. \tag{4.14}$$

Kinetička energija manipulatora sastavljenog od n segmenata jednaka je zbroju kinetičkih energija svih njegovih segmenata:

$$T_l = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{l_i} \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i}^T \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i} + \boldsymbol{\omega}_i^T \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{I}_{l_i}^i \boldsymbol{R}_i^T \boldsymbol{\omega}_i}{2} \tag{4.15}$$

Sada je potrebno kinetičku energiju napisati kao funkciju generaliziranih koordinata manipulatora, odnosno varijabli zglobova. U tu će se svrhu primijeniti geometrijski postupak računanja Jacobiana na međusegmente. Rezultat ovoga su slijedeći izrazi:

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{l_i} = \boldsymbol{J}_{P1}^{(l_i)} \dot{q}_1 + \ldots + \boldsymbol{J}_{Pi}^{(l_i)} \dot{q}_i = \boldsymbol{J}_P^{(l_i)} \dot{\boldsymbol{q}} \tag{4.16}$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{J}_{O1}^{(l_i)} \dot{q}_1 + \ldots + \boldsymbol{J}_{Oi}^{(l_i)} \dot{q}_i = \boldsymbol{J}_O^{(l_i)} \dot{\boldsymbol{q}} \,, \tag{4.17}$$

gdje je doprinos stupaca matrice Jacobiana brzini zglobova uzet u obzir za trenutni segment i. Jacobiani $\boldsymbol{J}_P^{(l_i)}$ i $\boldsymbol{J}_O^{(l_i)}$ jednaki su:

$$\boldsymbol{J}_P^{(l_i)} = [\boldsymbol{J}_{P1}^{(l_i)} \ \ldots \ \boldsymbol{J}_{Pi}^{(l_i)} \ \ \mathbf{0} \ \ldots \ \mathbf{0}] \tag{4.18}$$

$$\boldsymbol{J}_o^{(l_i)} = [\boldsymbol{J}_{o1}^{(l_i)} \ \ldots \ \boldsymbol{J}_{oi}^{(l_i)} \ \ \mathbf{0} \ \ldots \ \mathbf{0}] \tag{4.19}$$

i stupci matrica (4.18) i (4.19) mogu se izračunati u skladu sa (3-5), dajući

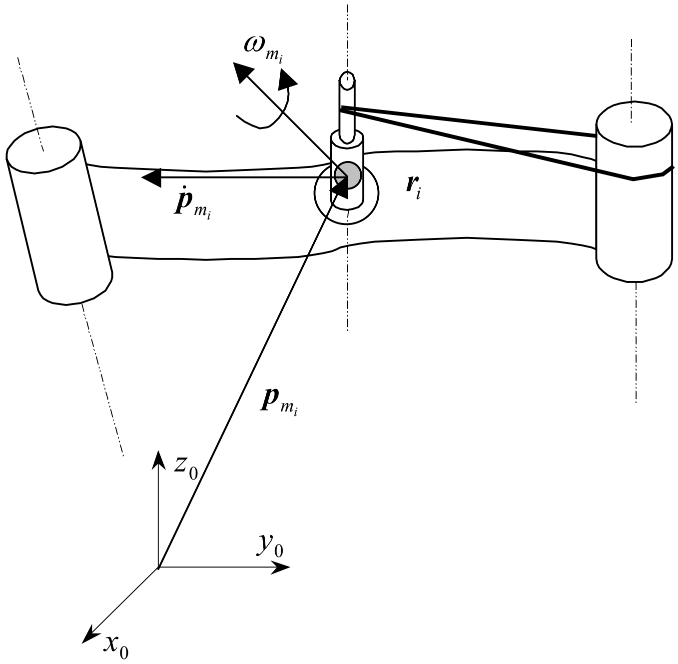
$$\boldsymbol{J}_{P_j}^{(l_i)} = \begin{cases} \boldsymbol{z}_{j-1} & \text{za translacijski zglob} \\ \boldsymbol{z}_{j-1} \times (\boldsymbol{p}_{l_i} - \boldsymbol{p}_{j-1}) & \text{za obrtni zglob} \end{cases} \tag{4.20}$$

$$\boldsymbol{J}_{O_j}^{(l_i)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{za translacijski zglob} \\ \boldsymbol{z}_{j-1} & \text{za obrtni zglob} \end{cases} , \tag{4.21}$$

gdje su $\boldsymbol{p}_{j-1}$ vektor pozicije ishodišta koordinatnog sistema j-1 i $\boldsymbol{z}_{j-1}$ jedinični vektor duž osi z istog koordinatnog sistema, respektivno.
Uzimajući u obzir izraze (4.14) – (4.19), izraz za ukupnu kinetičku energiju segmenta i (4.14) postaje:

$$T_{l_i} = \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{J}_P^{(l_i)T} \boldsymbol{J}_P^{(l_i)} \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{J}_O^{(l_i)T} \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{I}_{l_i}^i \boldsymbol{R}_i^T \boldsymbol{J}_O^{(l_i)} \dot{\boldsymbol{q}} \,. \tag{4.22}$$

Kinetička energija motora koji pokreće zglob i može se izračunati na formalno analogan način onome provedenom za segment manipulatora. Razmatat će se tipičan slučaj rotirajućeg električnog motora (koji može pokretati i rotirajuće i translacijske zglobove uz upotrebu odgovarajućih prijenosnih mehanizama). Pretpostavlja se da je stator motora smješten na segment manipulatora (masi segmenta pridodaje se masa statora), tako da se računa samo kinetička energija rotora (Sl. 4.2).



Slika 4.2. Kinematički opis motora.

Na temelju Sl. 4.2 motor zgloba *i* smješten je na segment *i-1*. U praksi, kod sinteze mehaničke strukture otvorenog kinematičkog lanca manipulatora nastoji se smjestiti pogonske motore što je moguće bliže bazi manipulatora tako da se olakša dinamički teret prvom zglobu lanca. Pogonski momenti razvijeni na osovinama motora prenose se na zglobove preko mehaničkih prijenosnika (reduktora, zupčanika). Doprinos kinetičke energije prijenosnog mehanizma može se na prikladan način uključiti u ukupnu kinetičku energiju motora. Također se pretpostavlja da nema pojave induciranih kretanja, tj. kretanje zgloba *i* ne utječe na kretanje drugih zglobova.
Kinetička energija rotora *i* može se napisati kao

$$T_{m_i} = \frac{1}{2} m_{m_i} \dot{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{m_i}}^T \dot{\boldsymbol{p}}_{m_i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{m_i}^T \boldsymbol{I}_{m_i} \boldsymbol{\omega}_{m_i}\,, \tag{4.23}$$

gdje je m_{m_i} masa rotora, $\dot{\boldsymbol{p}}_{m_i}$ označava linijsku brzinu centra mase rotora, $\boldsymbol{I}_{m_i}$ je tenzor inercije rotora u odnosu na centar mase i $\boldsymbol{\omega}_{m_i}$ označava ugaonu brzinu rotora.
Neka ϑ_{m_i} označava ugaonu poziciju rotora. U slučaju upotrebe krutih prijenosnika dobiva se slijedeća relacija:

$$k_{ri} \dot{q}_i = \dot{\vartheta}_{m_i}\,, \tag{4.24}$$

gdje je k_{r_i} omjer redukcije prijenosnika snage. Važno je napomenuti da je u slučaju pogona translacijskog zgloba omjer redukcije kvantitativno dimenzioniran.
U skladu s pravilom kompozicije ugaonih brzina i relacije (4.24), ukupna ugaona brzina rotora je:

$$\boldsymbol{\omega}_{m_i} = \boldsymbol{\omega}_{i\text{-}1} + k_{r_i} \dot{q}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{z}_{m_i} \tag{4.25}$$

gdje je $\boldsymbol{\omega}_{i-1}$ ugaona brzina segmenta *i*-1 na koji je motor smješten, i $\boldsymbol{z}_{m_i}$ označava jedinični vektor duž osi rotora.

Da bi napisali kinetičku energiju rotora kao funkciju zglobovskih varijabli, neophodno je izraziti linijsku brzinu centra mase rotora – slično u (4.16) kao

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{m_i} = \boldsymbol{J}_P^{(m_i)}\dot{\boldsymbol{q}}\,. \tag{4.26}$$

Jacobian se računa na slijedeći način:

$$\boldsymbol{J}_P^{(m_i)} = [\boldsymbol{J}_{P1}^{(m_i)} \;\ldots\; \boldsymbol{J}_{P,i-1}^{(m_i)} \quad \mathbf{0} \;\ldots\; \mathbf{0}] \tag{4.27}$$

čiji su stupci jednaki

$$\boldsymbol{J}_{P_j}^{(m_i)} = \begin{cases} \boldsymbol{z}_{j-1} & \text{za translacijski zglob} \\ \boldsymbol{z}_{j-1} \times (\boldsymbol{p}_{m_i} - \boldsymbol{p}_{j-1}) & \text{za obrtni zglob} \end{cases} \tag{4.28}$$

gdje je $\boldsymbol{p}_{j-1}$ vektor pozicije ishodišta koordinatnog sistema relativno u odnosu na zglob $j-1$. Komponenta Jacobiana $\boldsymbol{J}_{P_i}^{(m_i)} = \mathbf{0}$ u izrazu (4.27), jer je centar mase rotora uzet da leži duž osi rotacije. Ugaona brzina u (4.25) može se napisati kao funkcija zglobovskih varijabli, tj.,

$$\boldsymbol{\omega}_{m_i} = \boldsymbol{J}_O^{(m_i)}\dot{\boldsymbol{q}}\,. \tag{4.29}$$

Komponenta Jacobiana koja se odnosi na orijentaciju ima oblik:

$$\boldsymbol{J}_O^{(m_i)} = [\boldsymbol{J}_{O1}^{(m_i)} \;\ldots\; \boldsymbol{J}_{O,i-1}^{(m_i)}\, \boldsymbol{J}_{Oi}^{(m_i)} \quad \mathbf{0} \;\ldots\; \mathbf{0}] \tag{4.30}$$

čiji stupci se računaju prema izrazu

$$\boldsymbol{J}_{O_j}^{(m_i)} = \begin{cases} \boldsymbol{J}_{O_j}^{(l_i)} & j = 1,\ldots,i\text{-}1 \\ k_{r_i}\boldsymbol{z}_{j-1} & j = i. \end{cases} \tag{4.31}$$

Za računanje druge relacije u (4.31) dovoljno je poznavati komponente jediničnog vektora osi rotacije rotora $\boldsymbol{z}_{m_i}$ s obzirom na koordinatni sistem baze. Slijedi, kinetička energija rotora i može se napisati kao

$$T_{m_i} = \frac{1}{2} m_{m_i} \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{J}_P^{(m_i)T} \boldsymbol{J}_P^{(m_i)} \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{J}_O^{(m_i)T} \boldsymbol{R}_{m_i} \boldsymbol{I}_{m_i}^{m_i} \boldsymbol{R}_{m_i}^T \boldsymbol{J}_O^{(m_i)} \dot{\boldsymbol{q}}\,. \tag{4.32}$$

Konačno, sumiranjem različitih doprinosa u odnosu na pojedinačne segmente (4.22) i pojedinačne rotore (4.32) kao i u (4.4), ukupna kinetička energija manipulatora zajedno sa pogonima je dana u kvadratičnom obliku:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{4.33}$$

gdje je

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})=\sum_{i=1}^{n}\left(m_{l_i}\boldsymbol{J}_P^{(l_i)T}\boldsymbol{J}_P^{(l_i)}+\boldsymbol{J}_O^{(l_i)T}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{l}_i}^{i}\boldsymbol{R}_i^T\boldsymbol{J}_O^{(l_i)}+m_{m_i}\boldsymbol{J}_P^{(m_i)T}\boldsymbol{J}_P^{(m_i)}+\boldsymbol{J}_O^{(m_i)T}\boldsymbol{R}_{m_i}\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{m}_i}^{m_i}\boldsymbol{R}_{m_i}^T\boldsymbol{J}_O^{(m_i)}\right) \tag{4.34}$$

(nxn) matrica inercije koja je:

- simetrična
- pozitivno definitna
- ovisna o konfiguraciji (općenito).

4.2.2 Računanje potencijalne energije

Ukupna potencijalna energija akumulirana u manipulatoru se dobije kao suma doprinosa svakog pojedinačnog segmenta i svakog pojedinačnog motora

$$U=\sum_{i=1}^{n}\left(U_{l_i}+U_{m_i}\right). \tag{4.35}$$

Uz pretpostavku krutih segmenata, potencijalna energija segmenta i određena je samo djelovanjem gravitacijskih sila[1]:

$$U_{l_i}=\int_{V_{l_i}}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{p}_i\rho dV=-m_{l_i}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{p}_{l_i} \tag{4.36}$$

gdje je $\boldsymbol{g}_0$ vektor gravitacijskog ubrzanja u koordinatnom sistemu baze (npr. $\boldsymbol{g}_0=[0 \quad 0 \quad g]^T$ ako je os z vertikalna), pri čemu je g koeficijent ubrzanja sile teže, čija standardna vrijednost iznosi: $g_0=9.80665\ m/s^2$. $\boldsymbol{p}_{l_i},\boldsymbol{p}_{m_i}$ su vektori položaja centara mase segmenta i i rotora motora i u odnosu na koordinatni sistem baze.
Slično relaciji (4.36) dobiva se izraz za potencijalnu energiju rotora motora:

$$U_{m_i}=-m_{m_i}\boldsymbol{g}_0^T p_{m_i}, \tag{4.37}$$

Uvrštavanjem (4.36) i (4.37) u (4.35) dobiva se izraz za ukupnu potencijalnu energiju

$$U=-\sum_{i=1}^{n}\left(m_{l_i}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{p}_{l_i}+m_{m_i}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{p}_{m_i}\right). \tag{4.38}$$

Na temelju jednadbže (4.38) dolazi se do zaključka da je potencijalna energija, preko vektora $\boldsymbol{p}_{l_i}$ i $\boldsymbol{p}_{m_i}$, funkcija samo varijabli zglobova $\boldsymbol{q}$ i da ne ovisi o brzinama zglobova $\dot{\boldsymbol{q}}$.

[1] U slučaju fleksibilnog segmenta postoji komponenta potencijalne energije uslijed djelovanja elastičnih sila.

4.2.3 Dinamičke jednadžbe kretanja

Na temelju izračunatih potencijalnih i kinetičkih energija (4.33) i (4.38), Lagrangeova funkcija (4.1) za manipulator može se napisati kao

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) &= T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{q}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\left(m_{l_i}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{p}_{l_i}(\boldsymbol{q}) + m_{m_i}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{p}_{m_i}(\boldsymbol{q})\right). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Korištenjem dobivene Lagrangeove funkcije, jednadžba kretanja manipulatora (uzimajući u obzir činjenicu da potencijalna energija ne ovisi o $\dot{\boldsymbol{q}}$) poprima slijedeći oblik:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\boldsymbol{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{db_{ij}(\boldsymbol{q})}{dt}\dot{q}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\boldsymbol{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b_{ij}(\boldsymbol{q})}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j, \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\frac{\partial T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b_{jk}(\boldsymbol{q})}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_j \tag{4.41}$$

i

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(\boldsymbol{q})}{\partial q_i} &= -\sum_{j=1}^{n}\left(m_{l_j}\boldsymbol{g}_0^T\frac{\partial \boldsymbol{p}_{l_j}(\boldsymbol{q})}{\partial q_i} + m_{m_j}\boldsymbol{g}_0^T\frac{\partial \boldsymbol{p}_{m_j}(\boldsymbol{q})}{\partial q_i}\right) \\ &= -\sum_{j=1}^{n}\left(m_{l_j}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{J}_{Pi}^{(l_j)}(\boldsymbol{q}) + m_{m_j}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{J}_{Pi}^{(m_j)}(\boldsymbol{q})\right) = g_i(\boldsymbol{q}) \end{aligned} \tag{4-42}$$

Uvrštavanjem izraza (4.40)–(4.42) u jednadžbu kretanja manipulatora (4.2) dobiva se:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\boldsymbol{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}(\boldsymbol{q})\dot{q}_k\dot{q}_j + g_i(\boldsymbol{q}) = \xi_i \qquad i = 1,\dots,n. \tag{4.43}$$

gdje je

$$h_{ijk} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}. \tag{4.44}$$

Fizička interpretacija jednadžbe (4.43) otkriva slijedeće:

- Koeficijent b_{ii} predstavlja moment inercije u osi zgloba *i*, u trenutnoj konfiguraciji manipulatora, kada su ostali zglobovi blokirani.
  Koeficijent b_{ij} objašnjava djelovanje ubrzanja zgloba *i* na zglob *j*.
- Izraz $h_{ijj}\dot{q}_j^2$ predstavlja centrifugalni efekat zgloba *i* izazvan brzinom zgloba *j*.
  Izraz $h_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k$ jeste Coriolisov efekat induciran na zglobu *i* pomoću brzina zglobova *j* i *k*.

- Izraz g_i označava moment generiran u osi i-tog zgloba manipulatora, u trenutnoj konfiguraciji, u prisustvu gravitacijskog djelovanja.

Neki dinamička spregnuća zglobova, kao što su koeficijenti b_{ij} i h_{ijk}, mogu se reducirati ili eliminirati u postupku sinteze strukture, tako da se pojednostavi problem upravljanja.
U pogledu nekonzervativnim sila koje djeluju na zglobove manipulatora, one su dane sa *pogonskim momentom* $\boldsymbol{\tau}$ minus *moment viskoznog* i *statičkog trenja*. Momenti viskoznog trenja dani su sa $\boldsymbol{F}_v\dot{\boldsymbol{q}}$, gdje $\boldsymbol{F}_v$ označava (*nxn*) matricu koeficijenata visoznog trenja. Kao pojednostavljeni model momenata statičkog trenja, može se pretpostaviti $\boldsymbol{F}_S\,\mathrm{sgn}(\dot{\boldsymbol{q}})$, gdje je $\boldsymbol{F}_s$ (*nxn*) dijagonalna matrica i $\mathrm{sgn}(\dot{\boldsymbol{q}})$ označava vektor dimenzija (*nx1*) sa komponentama izraženim preko *sign* funkcija brzina pojedinačnih zglobova.
Ako je vrh manipulatora u dodiru sa okolinom, dio pogonskih momenata se koristi za uravnoteženje momenata izazvanih zglobovima sa dodirnim silama. Ovi momenti se mogu izraziti sa $\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{h}$, pri čemu $\boldsymbol{h}$ označava vektor sila i momenata izazvanih djelovanjem vrha manipulatora na okolinu.
Uzimajući u obzir sve navedeno, jednadžbe kretanja (4.43) mogu se napisati u kompaktnom matričnom obliku, predstavljajući *dinamički model zglobovskog prostora*, na slijedeći način:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{F}_v\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{F}_s\mathrm{sgn}(\dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{h}, \tag{4.45}$$

gdje $\boldsymbol{C}$ predstavlja prikladnu (*nxn*) matricu čiji elementi c_{ij} zadovoljavaju slijedeću jednadžbu:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j\ . \tag{4.46}$$

4.2.4 Bitna svojstva dinamičkog modela

Izbor matrice $\boldsymbol{C}$ nije jednoznačan, budući da postoji više matrica $\boldsymbol{C}$ čiji elementi zadovoljavaju jednadžbu (4.46). Da bi se dobili koeficijenti c_{ij} potrebno je prvo izračunati elemrnte h_{ijk}, na osnovu izraza (4.44), a nakon toga razmatrati cjelokupan izraz na desnoj strani jednadžbe (4.46). Na taj način se dobiva:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\dot{q}_j &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k\dot{q}_j\end{aligned}.$$

Gornja jednadžba se može dalje napisati kao:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k\dot{q}_j\ ,$$

iz koje slijedi izraz za računanje koeficijenata c_{ij}:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk}\dot{q}_k , \tag{4.47}$$

gdje su c_{ijk} jednaki:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right). \tag{4.48}$$

Elementi c_{ijk} nazivaju se *Christoffelovi simboli prve vrste*. S obzirom na svojstvo simetrije matrice ***B***, vrijedi da je:

$$c_{ijk} = c_{ikj} . \tag{4.49}$$

Izbor matrice ***C*** vodi ka određivanju prvog važnog svojstva jednadžbe kretanja (4.45), a to je da je matrica

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \dot{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{q}) - 2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{4.50}$$

kososimetrična. To znači da za bilo koji vektor ***w*** dimenzije (*nx1*) vrijedi slijedeća relacija:

$$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{w} = 0 . \tag{4.51}$$

Supstitucijom c_{ijk} iz (4.48) u (4.47) dobiva se:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2}\dot{b}_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k , \end{aligned}$$

a zatim uvrštavanje dobivenog c_{ij} u jednadžbu (4.50) daje:

$$n_{ij} = \dot{b}_{ij} - 2c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k . \tag{4.52}$$

Promatranjem izraza (4.52) slijedi slijedeća jednakost:

$$n_{ij} = -n_{ji} .$$

Interesantno svojstvo, koje slijedi iz direktne primjene kososimetričnog svojstva matrice $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$, postavljanjem $\boldsymbol{w} = \dot{\boldsymbol{q}}$ jeste:

$$\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} = 0 . \tag{4.53}$$

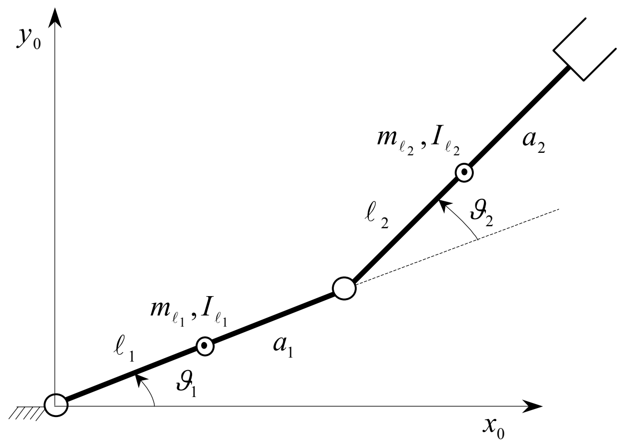
Može se lahko pokazati da izraz (4.53) vrijedi za bilo koji izbor matrice ***C***, budući da je on rezultat principa očuvanja energije (*hamilton*). Na osnovu ovog principa, ukupan iznos vremenske derivacije kinetičke energije je uravnotežen sa snagom koju generiraju sve sile koje djeluju na zglobove

manipulatora. Nasuprot tome, izraz (4.51) vrijedi samo za pojedinačan izbor elemenata matrice $\boldsymbol{C}$, kako je definirano u (4.47) i (4.48).
Osim *kososimetričnog* svojstva matrice $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$, drugo važno svojstvo dinamičke jednadžbe kretanja jeste *linearnost u dinamičkim parametrima*. Ova linearnost se odnosi na parametre karakterizirane manipulatorskim segmentima i rotorima motora. O ovom svojstvu se ovdje neće podrobno diskutirati, budući da zahtijeva malo složeniji izvod.

4.2.5 Primjeri dinamičkih modela osnovnih struktura manipulatora

Primjer 4.1 Dvosegmentna planarna ruka

Promatrajmo robotsku ruku na Sl. 4.3, za koju je vektor generaliziranih koordinata $\boldsymbol{q} = [\vartheta_1, \vartheta_2]^T$.



Slika 4.3. Dvosegmentna planarna ruka.

Neka su ℓ_1, ℓ_2 udaljenosti centara mase segmenata od osi zglobova, respektivno. Mase pojedinačnih segmenata označene su sa m_{ℓ_1}, m_{ℓ_2}, a mase rotora motora pridruženih zglobovima sa m_{m_1}, m_{m_2}. Neka se sa I_{m_1}, I_{m_2} označe momenti inercije s obzirom na osi rotora, a sa I_{ℓ_1}, I_{ℓ_2} momenti inercije u odnosu na centre mase segmenata. U proračunima se pretpostavlja da je $p_{m_i} = p_{i-1}$ i $z_{m_i} = z_{i-1}$, za i =1,2,..., tj. motori su locirani na osi zglobova s centrima mase u ishodištima kordinatnih sistema.

Jednadžba dinamike u kompaktnoj matričnoj formi je:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{F}_v\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{F}_s\text{sgn}(\dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{h} \qquad (4.54)$$

gdje su:

gdje su:	$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})$	- matrica inercija
	$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$	- matrica koja je nastala na temelju fizikalnih svojstava sistema
	$\boldsymbol{F}_v\dot{\boldsymbol{q}}$	- moment viskoznog trenja
	$\boldsymbol{F}_s\text{sgn}(\dot{\boldsymbol{q}})$	- moment statičkog trenja
	$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$	- moment usljed gravitacijskog ubrzanja
	$\boldsymbol{\tau}$	- aktivni moment

$\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{h}$ - moment kojim vrh manipulatora djeluje na okolinu

a) Računanje Jacobiana za segmente

Geometrijski Jacobiani koji daju vezu između linearnih brzina centara masa prvog i drugog segmenta, i brzina zglobova, su:

$$\boldsymbol{J}_P^{(\ell_1)} = [\boldsymbol{J}_{P_1}^{(\ell_1)} \quad 0]$$

$$\boldsymbol{J}_P^{(\ell_2)} = [\boldsymbol{J}_{P_1}^{(\ell_2)} \quad \boldsymbol{J}_{P_2}^{(\ell_2)}].$$

Budući da je prvi zglob obrtni, imamo :

$$\boldsymbol{J}_{P_1}^{(\ell_1)} = \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p}_{\ell_1} - \boldsymbol{p}_0)$$

Matrica homogene transformacije centra mase prvog segmenta u odnosu na ishodište koordinatnog sistema baze je:

$$\boldsymbol{A}_{\ell_1}^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & \ell_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & \ell_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vektor pozicije centra mase prvog segmenta u odnosu na bazni koordinatni sistem $\boldsymbol{p}_{\ell_1}$ i ort $\boldsymbol{z}_0$ su:

$$\boldsymbol{p}_{\ell_1} = \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 \\ \ell_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

a na temelju njih Jacobiani $\boldsymbol{J}_{P_1}^{(\ell_1)}$, odnosno $\boldsymbol{J}_P^{(\ell_1)}$ su:

$$\boldsymbol{J}_{P_1}^{(\ell_1)} = \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p}_{\ell_1} - \boldsymbol{p}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 \\ \ell_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ell_1 s_1 \\ \ell_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_P^{(\ell_1)} = \begin{bmatrix} -\ell_1 s_1 & 0 \\ \ell_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (4.55)$$

Analogan postupak se provodi za računanje $\boldsymbol{J}_P^{(\ell_2)}$, čije su komponente :

$$\boldsymbol{J}_{P_1}^{(\ell_2)} = \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p}_{\ell_2} - \boldsymbol{p}_0)$$
$$\boldsymbol{J}_{P_2}^{(\ell_2)} = \boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{p}_{\ell_2} - \boldsymbol{p}_1)\,.$$

Matrice homogenih transformacija prvog segmenta, centra mase prvog i drugog segmenta u odnosu na bazni koordinatni sistem su:

$$\boldsymbol{A}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{A}_{\ell_2}^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & \ell_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & \ell_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{A}_{\ell_2}^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1c_1 + \ell_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1s_1 + \ell_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Na temelju njih se dobivaju slijedeći pripadajući vektori pozicija i ortovi, potrebni za izračunavanje Jacobiana :

$$\boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1c_1 \\ a_1s_1 \\ 0 \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{p}_{\ell_2} = \begin{bmatrix} a_1c_1 + \ell_2c_{12} \\ a_1s_1 + \ell_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uvrštavanjem vrijednosti gornjih vektora u izraze za komponente matrice Jacobiana:

$$\boldsymbol{J}_{P_1}^{(\ell_2)} = \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p}_{\ell_2} - \boldsymbol{p}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1c_1 + \ell_2c_{12} \\ a_1s_1 + \ell_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - \ell_2s_{12} \\ a_1c_1 + \ell_2c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{P_2}^{(\ell_2)} = \boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{p}_{\ell_2} - \boldsymbol{p}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ell_2c_{12} \\ \ell_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ell_2s_{12} \\ \ell_2c_{12} \\ 0 \end{bmatrix},$$

dobiva se matrica Jacobiana koja daje ovisnost između linearne brzine centra mase drugog segmenta i brzine zglobova:

$$\boldsymbol{J}_P^{(\ell_2)} = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - \ell_2s_{12} & -\ell_2s_{12} \\ a_1s_1 + \ell_2c_{12} & \ell_2c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.56}$$

Veze između ugaonih brzina centara mase segmenata i brzina zglobova su izražene slijedećim Jacobianima:

$$\boldsymbol{J}_O^{(\ell_1)} = [\boldsymbol{J}_{O_1}^{(\ell_1)} \quad 0]$$

$$\boldsymbol{J}_O^{(\ell_2)} = [\boldsymbol{J}_{O_1}^{(\ell_2)} \quad \boldsymbol{J}_{O_2}^{(\ell_2)}]$$

Postupak izračunavanja ovih Jacobiana je slijedeći:

$$\boldsymbol{J}_{O_1}^{(\ell_1)} = \boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_O^{(\ell_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

$$\boldsymbol{J}_{O_1}^{(\ell_2)} = \boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \; \boldsymbol{J}_{O_2}^{(\ell_2)} = \boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_O^{(\ell_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.58}$$

Sljedeći korak se sastoji u izračunavanju Jacobiana koji se odnose na rotore motora smještenih na pojedine segmente. Važno je napomenuti da se mase statora motora pridodaju masama korespodentnih segmenata, a mase rotora motora se uzimaju odvojeno (m_{m_1}, m_{m_2}).

Povezanost linearnih brzina centara masa rotora motora i brzina zglobova je izražena slijedećim izrazima:

$$\boldsymbol{J}_P^{(m_1)} = [\boldsymbol{J}_{P_1}^{(m_1)} \quad 0]$$

$$\boldsymbol{J}_P^{(m_2)} = [\boldsymbol{J}_{P_1}^{(m_2)} \quad \boldsymbol{J}_{P_2}^{(m_2)}]$$

gdje su:

$$\boldsymbol{J}_{P_1}^{(m_1)} = \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p}_{m_1} - \boldsymbol{p}_0) = \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_P^{(m_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.59}$$

i

$$\boldsymbol{J}_{P_1}^{(m_2)} = \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p}_{m_2} - \boldsymbol{p}_0) = \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 \\ a_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{P_2}^{(m_2)} = \boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{p}_{m_2} - \boldsymbol{p}_1) = \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{P}^{(m_2)} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 & 0 \\ a_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.60}$$

Veze između ugaonih brzina centara masa rotora motora i brzina zglobova je dana sa:

$$\boldsymbol{J}_{O}^{(m_1)} = [\boldsymbol{J}_{O_1}^{(m_1)} \quad 0]$$

$$\boldsymbol{J}_{O}^{(m_2)} = [\boldsymbol{J}_{O_1}^{(m_2)} \quad \boldsymbol{J}_{O_2}^{(m_2)}].$$

Postupak izračunavanja Jacobiana je slijedeći:

$$\boldsymbol{J}_{O_1}^{(m_1)} = [k_{r1} z_{m_1} \quad 0] = [k_{r1} z_0 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{r1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{O}^{(m_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{r1} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

$$\boldsymbol{J}_{O_1}^{(m_2)} = \boldsymbol{J}_{O_1}^{(\ell_2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{O_2}^{(m_2)} = k_{r2} z_{m_2} = k_{r2} z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{r2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{O}^{(m_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & k_{r2} \end{bmatrix}. \tag{4.62}$$

Matrica inercije za zadanu strukturu manipulatora je oblika:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}) = & \, m_{\ell_1}\boldsymbol{J}_P^{(\ell_1)T}\boldsymbol{J}_P^{(\ell_1)} + \boldsymbol{J}_O^{(\ell_1)T}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{I}_{\ell_1}^1\boldsymbol{R}_1^T\boldsymbol{J}_O^{(\ell_1)} + m_{m_1}\boldsymbol{J}_P^{(m_1)T}\boldsymbol{J}_P^{(m_1)} + \boldsymbol{J}_O^{(m_1)T}\boldsymbol{R}_{m_1}\boldsymbol{I}_{m_1}^{m_1}\boldsymbol{R}_{m_1}^T\boldsymbol{J}_O^{(m_1)} \\ & + m_{\ell_2}\boldsymbol{J}_P^{(\ell_2)T}\boldsymbol{J}_P^{(\ell_2)} + \boldsymbol{J}_O^{(\ell_2)T}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{I}_{\ell_2}^2\boldsymbol{R}_2^T\boldsymbol{J}_O^{(\ell_2)} + m_{m_2}\boldsymbol{J}_P^{(m_2)T}\boldsymbol{J}_P^{(m_2)} + \boldsymbol{J}_O^{(m_2)T}\boldsymbol{R}_{m_2}\boldsymbol{I}_{m_2}^{m_2}\boldsymbol{R}_{m_2}^T\boldsymbol{J}_O^{(m_2)}\end{aligned}$$

Smjenom $\boldsymbol{I}_{\ell_i} = \boldsymbol{R}_{\ell_i}\boldsymbol{I}_{\ell_i}^i\boldsymbol{R}_{\ell_i}^T$ i $\boldsymbol{I}_{m_i} = \boldsymbol{R}_{m_i}\boldsymbol{I}_{m_i}^{m_i}\boldsymbol{R}_{m_i}^T$ u gornju jednadžbu dobiva se:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}) = & \, m_{\ell_1}\boldsymbol{J}_P^{(\ell_1)T}\boldsymbol{J}_P^{(\ell_1)} + \boldsymbol{J}_O^{(\ell_1)T}\boldsymbol{I}_{\ell_1}\boldsymbol{J}_O^{(\ell_1)} + m_{m_1}\boldsymbol{J}_P^{(m_1)T}\boldsymbol{J}_P^{(m_1)} + \boldsymbol{J}_O^{(m_1)T}\boldsymbol{I}_{m_1}\boldsymbol{J}_O^{(m_1)} \\ & + m_{\ell_2}\boldsymbol{J}_P^{(\ell_2)T}\boldsymbol{J}_P^{(\ell_2)} + \boldsymbol{J}_O^{(\ell_2)T}\boldsymbol{I}_{\ell_2}\boldsymbol{J}_O^{(\ell_2)} + m_{m_2}\boldsymbol{J}_P^{(m_2)T}\boldsymbol{J}_P^{(m_2)} + \boldsymbol{J}_O^{(m_2)T}\boldsymbol{I}_{m_2}\boldsymbol{J}_O^{(m_2)}.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti matrica Jacobiana u izraz za matricu inercije imamo:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} b_{11}(\vartheta_2) & b_{12}(\vartheta_2) \\ b_{21}(\vartheta_2) & b_{22} \end{bmatrix}, \tag{4.63}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} b_{11} &= I_{\ell_1} + m_{\ell_1}\ell_1^2 + k_{r1}^2 I_{m_1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1\ell_2 c_2) + I_{m_2} + m_{m_2}a_1^2 \\ b_{12} &= b_{21} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(\ell_2^2 + a_1\ell_2 c_2) + k_{r2}I_{m_2} \\ b_{22} &= I_{\ell_2} + m_{\ell_2}\ell_2^2 + k_{r2}^2 I_{m_2} \end{aligned}$$

Važna svojstva matrice inercije su : simetričnost, pozitivna definitnost i ovisnost o konfiguraciji.

Cristoffelovi simboli prvog tipa su:

$$\begin{aligned} c_{111} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial b_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial q_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial b_{11}}{\partial q_1} = 0 \\ c_{112} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial b_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial q_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} = -m_{\ell_2}a_1\ell_2 s_2 = h \\ c_{122} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial b_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial b_{12}}{\partial q_2} = -m_{\ell_2}a_1\ell_2 s_2 = h \\ c_{211} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial b_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} = m_{\ell_2}a_1\ell_2 s_2 = -h \end{aligned} \tag{4.64}$$

$$c_{212} = c_{221} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial q_2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = 0$$

$$c_{222} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial b_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial q_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial b_{22}}{\partial q_2} = 0$$

Na temelju Cristoffelovih simbola dobiva se matrica $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$, čiji su elementi:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \sum_{k=1}^{2} c_{11k}\dot{q}_k = c_{111}\dot{q}_1 + c_{112}\dot{q}_2 = c_{112}\dot{\vartheta}_2 = h\dot{\vartheta}_2 \\
c_{12} &= \sum_{k=1}^{2} c_{12k}\dot{q}_k = c_{121}\dot{q}_1 + c_{122}\dot{q}_2 = h\dot{\vartheta}_1 + h\dot{\vartheta}_2 = h(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \\
c_{21} &= \sum_{k=1}^{2} c_{21k}\dot{q}_k = c_{211}\dot{q}_1 + c_{212}\dot{q}_2 = -h\dot{\vartheta}_1 \\
c_{22} &= \sum_{k=1}^{2} c_{22k}\dot{q}_k = c_{221}\dot{q}_1 + c_{222}\dot{q}_2 = 0
\end{aligned},$$

odnosno

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} h\dot{\vartheta}_2 & h(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \\ -h\dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.65}$$

Računanje matrice $\boldsymbol{N}$ daje:

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \dot{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{q}) - 2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} 2h\dot{\vartheta}_2 & h\dot{\vartheta}_2 \\ -h\dot{\vartheta}_2 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} h\dot{\vartheta}_2 & h(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \\ -h\dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2h\dot{\vartheta}_1 - h\dot{\vartheta}_2 \\ 2h\dot{\vartheta}_1 + h\dot{\vartheta}_2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.66}$$

što omogućuje provjeru negativno-simetričnog svojstva matrice $\boldsymbol{N}$.

Elementi vektora $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ se računaju po formuli:

$$g_i(\boldsymbol{q}) = -\sum_{j=1}^{n}\left(m_{\ell_j}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{J}_{P_i}^{(\ell_j)}(\boldsymbol{q}) + m_{m_j}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{J}_{P_i}^{(m_j)}(\boldsymbol{q})\right), \tag{4.67}$$

gdje je $\boldsymbol{g}_0 = \begin{bmatrix}0 & -g & 0\end{bmatrix}$ vektor gravitacijskog ubrzanja.

Na osnovu (4.67) dobiva se:

$$\begin{aligned}
g_1(\boldsymbol{q}) &= -\left(m_{\ell_1}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{J}_{P_1}^{(\ell_1)}(\boldsymbol{q}) + m_{m_1}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{J}_{P_1}^{(m_1)}(\boldsymbol{q})\right) - \left(m_{\ell_2}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{J}_{P_1}^{(\ell_2)}(\boldsymbol{q}) + m_{m_2}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{J}_{P_1}^{(m_2)}(\boldsymbol{q})\right) = \\
&= \left(m_{\ell_1}\ell_1 + m_{m_2}a_1 + m_{\ell_2}a_1\right)gc_1 + m_{\ell_2}\ell_2 gc_{12}
\end{aligned}$$

$$g_2(\boldsymbol{q}) = -\left(m_{\ell_1}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{J}_{P_2}^{(\ell_1)}(\boldsymbol{q}) + m_{m_1}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{J}_{P_2}^{(m_1)}(\boldsymbol{q})\right) - \left(m_{\ell_2}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{J}_{P_2}^{(\ell_2)}(\boldsymbol{q}) + m_{m_2}\boldsymbol{g}_0^T\boldsymbol{J}_{P_2}^{(m_2)}(\boldsymbol{q})\right) =$$
$$= m_{\ell_2}\ell_2 g c_{12}$$

Uz zanemarenje djelovanja sila trenja i svih tipova kontaktnih sila, rezultirajuća dinamička jednadžba glasi:

$$\begin{aligned}
&\left(I_{\ell_1} + m_{\ell_1}\ell_1^2 + k_{r1}^2 I_{m_1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1\ell_2 c_2) + I_{m_{12}} + m_{m_2}a_1^2\right)\ddot{\vartheta}_1 \\
&+ \left(I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(\ell_2^2 + a_1\ell_2 c_2) + k_{r2} I_{m_2}\right)\ddot{\vartheta}_2 \\
&- 2m_{\ell_2}a_1\ell_2 s_2\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2 - m_{\ell_2}a_1\ell_2 s_2\dot{\vartheta}_2^2 \\
&+ \left(m_{\ell_1}\ell_1 + m_{m_2}a_1 + m_{\ell_2}a_1\right)gc_1 + m_{\ell_2}\ell_2 gc_{12} = \tau_1
\end{aligned} \tag{4.68}$$

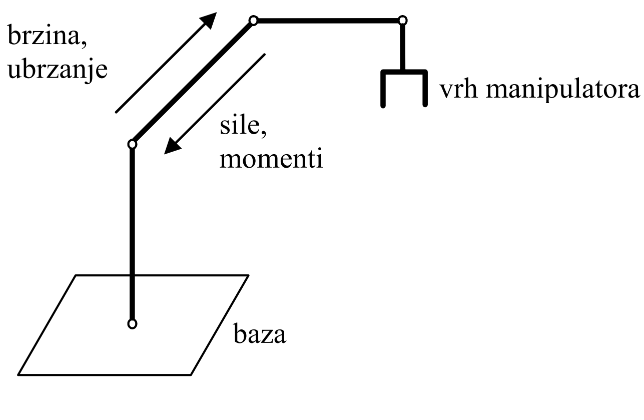
$$\begin{aligned}
&\left(I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(\ell_2^2 + a_1\ell_2 c_2) + k_{r2} I_{m_2}\right)\ddot{\vartheta}_1 + \left(I_{\ell_2} + m_{\ell_2}\ell_2^2 + k_{r2}^2 I_{m_2}\right)\ddot{\vartheta}_2 \\
&+ m_{\ell_2}a_1\ell_2 s_2\dot{\vartheta}_1^2 + m_{\ell_2}\ell_2 gc_{12} = \tau_2
\end{aligned}$$

4.3 NEWTON-EULEROVA JEDNADŽBA

Lagrangeova formulaciji dinamičke jednadžbe manipulatora opisuje ponašanje sistema u obliku rada i energije pohranjenih u sistemu (ukupni Lagrangian sistema). Prisilne sile uključene u sistem se automatski eliminiraju primjenom ovog postupka izvođenja dinamičkih jednadžbi manipulatora.

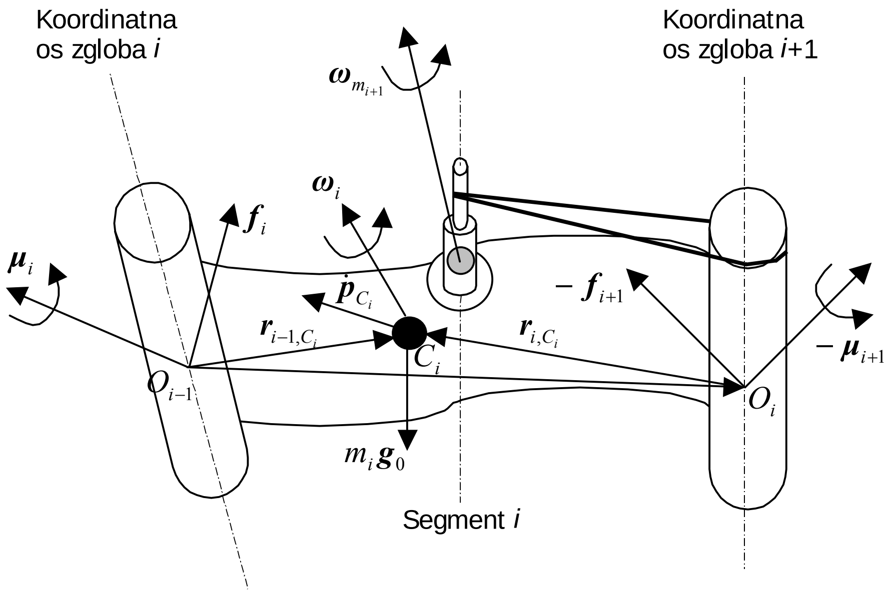
U Euler-Newtonovoj formulaciji, jednadžbe kretanja se izvode na temelju drugog Newtonovog zakona, koji povezuje sile i momente. Jednadžbe u sebi uključuju sve sile i momente koji djeluju na pojedini segment manipulatora, kao i sile i momente koji nastaju kao rezultat međudjelovanja između segmenata. Newton-Eulerova formulaciji se temelji na ravnoteži svih sila koje djeluju segment manipulatora. Ovo vodi ka skupu jednadžbi čija struktura omogućuje dobivanje rekurzivnog oblika rješenja; rekurzija prema naprijed se obavlja u svrhu dobivanja brzina i ubrzanja segmenta (jednadžbe s računanjem prema naprijed) i na temelju njih se dalje u povratnom prostiranju izračunavaju sile i momenti koji djeluju na svaki segment robotske ruke (jednadžbe s računanjem unatrag). U tim se jednadžbama kretanje svakog segmenta opisuje pomoću njegovog susjednog segmenta.

Prema tome, Newton-Eulerovim postupkom se dva puta prolazi po segmentima, kako je prikazano na Sl. 4.4.



Slika 4.4. Rekurzivna Newton-Eulerova metoda.

U ovom poglavlju ćemo izvesti jednadžbe kretanja pojedinačnog segmenta manipulatora. Kako je već naglašeno ranije, kretanje krutog tijela može se dekomponirati u translacijsko kretanje odgovarajuće tačke fiksirane na krutom tijelu i rotacijsko kretanje krutog tijela oko te tačke. Dinamičke jednadžbe krutog tijela mogu se također prikazati dvjema jednadžbama: jedna opisuje translacijsko kretanje centroida (centra mase tijela), dok druga opisuje rotacijsko kretanje oko centroida.
Promatrajmo osnaženi segment i (segment i kojemu je pridodat motor zgloba $i+1$) u kinematičkom lancu manipulatora na Sl. 4.5.



Slika 4.5. Označavanje segmenta za Newton-Eulerova formulaciju.

Centar mase osnaženog segmenta C_i karakteriziraju slijedeći parametri:

m_i masa osnaženog segmenta,

$\bar{\boldsymbol{I}}_i$ tenzor inercije osnaženog segmenta,

I_{m_i} moment inercije rotora,

$\boldsymbol{r}_{i-1,C_i}$ vektor položaja centra mase segmenta u odnosu na ishodište kord. sistema $i-1$,

$\boldsymbol{r}_{i,C_i}$ vektor položaja centra mase segmenta u odnosu na ishodište kord. sistema i,

$\boldsymbol{r}_{i-1,i}$ vektor položaja ishodišta sistema i u odnosu na ishodište sistema $i-1$.

Oznake brzina i ubrzanja na Sl. 4.5 imaju slijedeća značenja:

$\dot{\boldsymbol{p}}_{C_i}$ linijska brzina centra mase C_i,

$\dot{\boldsymbol{p}}_i$ linijska brzina ishodišta koordinatnog sistema i,

$\boldsymbol{\omega}_i$ ugaona brzina segmenta,

$\boldsymbol{\omega}_{m_i}$ ugaona brzina rotora,

$\ddot{\boldsymbol{p}}_{C_i}$ linijsko ubrzanje centra mase C_i,

$\ddot{\boldsymbol{p}}_i$ linijsko ubrzanje ishodišta koordinatnog sistema *i*,

$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ ugaono ubrzanje segmenta,

$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}$ ugaono ubrzanje rotora,

$\boldsymbol{g}_0$ gravitacijsko ubrzanje.

Sile i momenti imaju slijedeće oznake:

$\boldsymbol{f}_i$ sila kojom segment $i-1$ djeluje na segment *i,*

$-\boldsymbol{f}_{i+1}$ sila kojom segment $i+1$ djeluje na segment *i,*

$\boldsymbol{\mu}_i$ moment kojim segment $i-1$ djeluje na segment *i* s obzirom na ishodište sistem *i* -- 1*,*

$-\boldsymbol{\mu}_{i+1}$ moment kojim segment $i+1$ djeluje na segment *i* s obzirom na ishodište sistem *i*

Također se pretpostavlja da su vektori i matrice izraženi u odnosu nakoordinatni sistem baze. Newtonova jednadbža koja opisuje translacijsko kretanje centra mase može se napisati kao

$$\boldsymbol{f}_i - \boldsymbol{f}_{i+1} + m_i\boldsymbol{g}_0 - m_i\ddot{\boldsymbol{p}}_{C_i} = 0. \tag{4.69}$$

Eulerova jednadžba za rotacijsko kretanje segmenta (momenti centra mase) može se napisati na slijedeći način:

$$\boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{f}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,C_i} - \boldsymbol{\mu}_{i+1} - \boldsymbol{f}_{i+1} \times \boldsymbol{r}_{i,C_i} = \frac{d}{dt}(\bar{\boldsymbol{I}}_i\boldsymbol{\omega}_i + k_{r,i+1}\dot{q}_{i+1}I_{m_{i+1}}\boldsymbol{z}_{m_{i+1}}) \tag{4.70}$$

Napomenimo da gravitacijska sila $m_i\boldsymbol{g}_0$ ne generira bilo kakav momenat, jer je koncentrirana u centar mase.

Kako i kod Lagrangeove formulacije, prirodno je izraziti tenzor inercije u tekućem koordinatnom sistemu (konstantan tenzor). Slijedi, u skladu sa (4.13), da imamo $\bar{\boldsymbol{I}}_i = \boldsymbol{R}_i\bar{\boldsymbol{I}}_i^i\boldsymbol{R}_i^T$, gdje je $\boldsymbol{R}_i$ matrica rotacije iz koordinatnog sistema *i* u bazni koordinatni sistem. Uvrštavanjem ove relacije u prvi izraz na desnoj strani jednadbže (4.70) dobiva se:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\bar{\boldsymbol{I}}_i\boldsymbol{\omega}_i) &= \dot{\boldsymbol{R}}_i\bar{\boldsymbol{I}}_i^i\boldsymbol{R}_i^T\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{R}_i\bar{\boldsymbol{I}}_i^i\dot{\boldsymbol{R}}_i^T\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{R}_i\bar{\boldsymbol{I}}_i^i\boldsymbol{R}_i^T\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \\ &= \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}_i)\dot{\boldsymbol{R}}_i\bar{\boldsymbol{I}}_i^i\boldsymbol{R}_i^T\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{R}_i\bar{\boldsymbol{I}}_i^i\boldsymbol{R}_i^T\boldsymbol{\omega}_i\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{\omega}_i)\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{R}_i\bar{\boldsymbol{I}}_i^i\boldsymbol{R}_i^T\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \\ &= \bar{\boldsymbol{I}}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\bar{\boldsymbol{I}}_i\boldsymbol{\omega}_i)\end{aligned} \tag{4.71}$$

gdje drugi izraz na desnoj strani ($\boldsymbol{\omega}_i \times (\bar{\boldsymbol{I}}_i\boldsymbol{\omega}_i)$) predstavlja žiroskopski moment izazvan ovisnošću $\bar{\boldsymbol{I}}_i$ o orijentaciji segmenta. Osim toga, uzimajući u obzir da jedinični vektor $\boldsymbol{z}_{m_{i+1}}$ rotira prema segmentu *i*, potrebno je derivirati samo drugi izraz na desnoj strani u jednadžbi (4.70):

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}_{i+1}I_{m_{i+1}}\boldsymbol{z}_{m_{i+1}}) = \ddot{q}_{i+1}I_{m_{i+1}}\boldsymbol{z}_{m_{i+1}} + \dot{q}_{i+1}I_{m_{i+1}}\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{z}_{m_{i+1}}. \tag{4.72}$$

Smjenom (4.71) i (4.72) u (4.70), rezultirajuća Eulerova jednadžba poprima oblik:

$$\boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{f}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,C_i} - \boldsymbol{\mu}_{i+1} - \boldsymbol{f}_{i+1} \times \boldsymbol{r}_{i,C_i} = \bar{\boldsymbol{I}}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\bar{\boldsymbol{I}}_i \boldsymbol{\omega}_i) + k_{r,i+1}\ddot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \boldsymbol{z}_{m_{i+1}} + k_{r,i+1}\dot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{z}_{m_{i+1}} . \quad (4.73)$$

Jednadžbe (4.69) i (4.73) vladaju dinamičkim ponašanjem pojedinačnog segmenta robotske ruke. Kompletan skup jednadžbi za cijeli manipulator dobiva se razvojem navedenih jednadžbi zva sve segmente manipulatora, i=1,...,n.
Generalizrana sila u zglobu i može se izračunati iz projekcije sile $\boldsymbol{f}_i$ za translacijski zglob, odnosno momenta $\boldsymbol{\mu}_i$ za rotirajući zglob, duž osi zgloba. Pored toga, postoji doprinos momenta inercije rotora $k_{ri} I_{m_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}^T \boldsymbol{z}_{m_i}$. Slijedi da je generalizirana sila u zglobu i jednaka:

$$\boldsymbol{\tau}_i = \begin{cases} \boldsymbol{f}_i^T \boldsymbol{z}_{i-1} + k_{ri} I_{m_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}^T \boldsymbol{z}_{m_i} & \text{za translacijski zglob} \\ \boldsymbol{\mu}_i^T \boldsymbol{z}_{i-1} + k_{ri} I_{m_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}^T \boldsymbol{z}_{m_i} & \text{za rotacijski zglob} \end{cases} \quad (4.74)$$

Newton-Eulerove jednadžbe (4.69) i (4.73) i jednadžba (4.74) zahtijevaju računanje linijskog i ugaonog ubrzanja segmenta i i rotora i. Računanje se može obaviti na temelju relacija izvedenih za linijske i ugaone brzine:

$$\boldsymbol{\omega}_i = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{i-1} & \text{za translacijski zglob} \\ \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{z}_{i-1} & \text{za rotacijski zglob} \end{cases} \quad (4.75)$$

i

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \dot{d}_i \boldsymbol{z}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i} & \text{za translacijski zglob} \\ \dot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i} & \text{za rotacijski zglob} \end{cases} \quad (4.76)$$

Deriviranjem po vremenu (4.75) dobivaju se izrazi za ugaono ubrzanje segmenta sa translacijskim zglobom

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} , \quad (4.77)$$

i ugaono ubrzanje segmenta sa rotacijskim zglobom

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \ddot{\vartheta}_i \boldsymbol{z}_{i-1} + \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \boldsymbol{z}_{i-1} . \quad (4.78)$$

Linijsko ubrzanje segmenta sa translacijskim zglobom dobiva se deriviranjem prvog elementa (4.76) po vremenu na slijedeći način:

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_i = \ddot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \ddot{d}_i \boldsymbol{z}_{i-1} + \dot{d}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \boldsymbol{z}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_i \times \dot{d}_i \boldsymbol{z}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i}) , \quad (4.79)$$

gdje je iskorištena relacija $\dot{\boldsymbol{r}}_{i-1,i} = \dot{d}_i \boldsymbol{z}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \boldsymbol{r}_{i-1,i}$. Uzimajući u obzir (4.77), jednadžba (4.79) može se napisati kao:

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_i = \ddot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \ddot{d}_i \boldsymbol{z}_{i-1} + 2\dot{d}_i \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{z}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i}) . \quad (4.80)$$

Analogno se dobiva izraz za linijsko ubrzanja u slučaju rotacijskog zgloba, deriviranjem drugog elementa (4.76) po vremenu:

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_i = \ddot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \ddot{d}_i \boldsymbol{z}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i})\,. \tag{4.81}$$

Jednadžbe (4.77), (4.78), (4.80) i (4.81) mogu se sažeti na slijedeći način:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} & \text{za translacijski zglob} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \ddot{\vartheta}_i \boldsymbol{z}_{i-1} + \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \boldsymbol{z}_{i-1} & \text{za rotacijski zglob} \end{cases} \tag{4.82}$$

i

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_i = \begin{cases} \ddot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \ddot{d}_i \boldsymbol{z}_{i-1} + 2\dot{d}_i \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{z}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i}) & \text{za translacijski zglob} \\ \ddot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i}) & \text{za rotacijski zglob} \end{cases} \tag{4.83}$$

Ubrzanje centra mase segmenta *i*, koje se pojavljuje na lijevoj strani Newton-Eulerove jednadžbe (4.69), dobiva se deriviranjem izraza $\dot{\boldsymbol{p}}_{C_i} = \dot{\boldsymbol{p}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_{i,C_i}$ na slijedeći način:

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_{C_i} = \ddot{\boldsymbol{p}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \boldsymbol{r}_{i,C_i} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{r}_{i,C_i})\,. \tag{4.84}$$

I na kraju, izraz za ugaono ubrzanje rotora dobiva se deriviranjem (4-25):

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i\text{-}1} + k_{ri} \ddot{q}_i \boldsymbol{z}_{m_i} + k_{r_i} \dot{q}_i \boldsymbol{\omega}_{i\text{-}1} \times \boldsymbol{z}_{m_i}\,. \tag{4.85}$$

4.3.1 Rekurzivni algoritam

Newton-Eulerove jednadžbe izvedene u prethodnoj sekciji nisu u prikladnom obliku za upotrebe analize dinamike i sinteze regulatora. One ne opisuju ulazno-izlazne relacije, odnosno relacije dobivene iz kinematike i statike. U ovom potpoglavlju, obavit će se modifikacija Newton-Eulerovih jednadžbi kako bi se dobile eksplicitne ulazno-izlazne relacije.
Jednadbže kretanja nisu u zatvorenom obliku, jer je kretanje jednog segmenta spregnuto sa kretanjem drugih segmenata kroz kinematičke veze za brzine i ubrzanja.
Kada su poznate pozicije, brzine i ubrzanja zglobova, mogu se na temelju njih izračunati brzine i ubrzanja segmenata, koja se dalje mogu iskoristiti u Newton-Eulerovim jednadbžama za pronalaženje sila i momenata koje djeluju na svaki segment u rekurzivnom obliku, polazeći od sila i momenata primijenjenih na vrh manipulatora. S druge strane, brzine segmenta i rotora mogu biti izračunate rekurzivno polazeći od brzine i ubrzanja baznog segmenta.
Sumarno, rekurzivni algoritam se konstruira na slijedeći način:

- Polazeći od baze, uz poznavanje kretanja robota u prostoru zglobova, rekurzivno se računaju brzine i ubrzanja svakog segmenta manipulatora pa se dobivaju jednadžbe s računanjem *prema naprijed* (eng. forward recursion).
- Pomoću izračunatih brzina i ubrzanja segmenata mogu se, počinjući s vrhom manipulatora i nastavljajući prema bazi, izračunati sile i momenti koji djeluju na svaki segment robotske ruke. Tako dobivene jednadžbe nazivaju se jednadžbe s računanjem *unatrag* (eng. backward recursion).

Za rekurziju *prema naprijed*, specificiraju se $\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}$, te brzina i ubrzanje baznog segmenta $\boldsymbol{\omega}_0, \ddot{\boldsymbol{p}}_0 - \boldsymbol{g}_0, \dot{\boldsymbol{\omega}}_0$. Nakon toga se računaju $\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i, \ddot{\boldsymbol{p}}_i, \ddot{\boldsymbol{p}}_{C_i}$ i $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}$ upotrebom izraza (4.75), (4.82), (4.83), (4.84) i (4.85), respektivno. Linearno ubrzanje može se uzeti kao $\ddot{\boldsymbol{p}}_0 - \ddot{\boldsymbol{g}}_0$ tako da se ukorporira izraz $-\boldsymbol{g}_0$ u računanju ubrzanja centra mase $\ddot{\boldsymbol{p}}_{C_i}$ pomoću jednadžbi (4.84) i (4.85).

Kada je završeno računanje brzina i ubrzanja u rekurziji prema naprijed od baznog segmenta do vrha manipulatora, rekurzijom prema unatrag mogu se odrediti sile. Ako je zadano $\boldsymbol{h} = [\boldsymbol{f}_{n+1}^T \;\; \boldsymbol{m}_{n+1}^T]^T$ (ili eventualno $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{0}$), Newtonova jednadžba (4.69) može se napisati kao

$$\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{f}_{i+1} + m_i \ddot{\boldsymbol{p}}_{C_i}, \tag{4.86}$$

jer je doprinos gravitacijskog ubrzanja sadržan u $\ddot{\boldsymbol{p}}_{C_i}$. Nadalje, Eulerova jednadžba daje

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_i = -\boldsymbol{f}_i \times (\boldsymbol{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{r}_{i,C_i}) + \boldsymbol{\mu}_{i+1} + \boldsymbol{f}_{i+1} \times \boldsymbol{r}_{i,C_i} + \bar{\boldsymbol{I}}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\bar{\boldsymbol{I}}_i \boldsymbol{\omega}_i) \\ + k_{r,i+1}\ddot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \boldsymbol{z}_{m_{i+1}} + k_{r,i+1}\dot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{z}_{m_{i+1}}\end{aligned}, \tag{4.87}$$

što je izvedeno iz izraza (4.73), gdje je $\boldsymbol{r}_{i-1,C_i}$ izražen kao suma dva vektora koji su se već pojavili u računanje rekurzije prema naprijed. Rezultirajuće generalizirane sile u zglobovima se mogu izračunati pomoću (4.74) kao

$$\tau_i = \begin{cases} \boldsymbol{f}_i^T \boldsymbol{z}_{i-1} + k_{ri} I_{m_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{m}_i}^T \boldsymbol{z}_{m_i} + F_{vi}\dot{d}_i + F_{si}\,\mathrm{sgn}(\dot{d}_i) & \text{za translacijski zglob} \\ \boldsymbol{\mu}_i^T \boldsymbol{z}_{i-1} + k_{ri} I_{m_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{m}_i}^T \boldsymbol{z}_{m_i} + F_{vi}\dot{\vartheta}_i + F_{si}\,\mathrm{sgn}(\dot{\vartheta}_i) & \text{za rotacijski zglob} \end{cases}, \tag{4.88}$$

gdje uključen utjecaj momenta uslijed viskoznog trenja.

U gornjim izvodima pretpostavljeno je da se svi vektori odnose na bazni koordinatni sistem. Rekurzivno računanje se znatno pojednostavljuje i postaje efikasnije ukoliko se svi vektore odnose na trenutni koordinatni sistem pridružen segmentu *i*. Ovo ima za posljedicu da se svi koji trebaju biti transformirani iz koordinatnog sistema *i*+1 u sistem *i* množe matricom rotacije $\boldsymbol{R}_{i+1}^i$, odnosno da se svi vektori koji trebaju biti transformirani iz koordinatnog sistema *i*-1 u sistem *i* množe matricom $\boldsymbol{R}_i^{i-1^T}$.

Prema tome, izrazi (4.74), (4.82)-(4.88) mogu se ponovo napisati kao:

$$\boldsymbol{\omega}_i^i = \begin{cases} \boldsymbol{R}_i^{i-1^T} \boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} & \text{za translacijski zglob} \\ \boldsymbol{R}_i^{i-1^T} (\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} + \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{z}_0) & \text{za rotacijski zglob} \end{cases} \tag{4.89}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i = \begin{cases} \boldsymbol{R}_i^{i-1^T} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{i-1} & \text{za translacijski zglob} \\ \boldsymbol{R}_i^{i-1^T} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{i-1} + \ddot{\vartheta}_i \boldsymbol{z}_0 + \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} \times \boldsymbol{z}_0) & \text{za rotacijski zglob} \end{cases} \tag{4.90}$$

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_i^i = \begin{cases} \boldsymbol{R}_i^{i-1^T} (\ddot{\boldsymbol{p}}_{i-1}^{i-1} + \ddot{d}_i \boldsymbol{z}_0) + 2\dot{d}_i \boldsymbol{\omega}_i^i \times \boldsymbol{R}_i^{i-1^T} \boldsymbol{z}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i}^i) & \text{za translacijski zglob} \\ \boldsymbol{R}_i^{i-1^T} \ddot{\boldsymbol{p}}_{i-1}^{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i}^i) & \text{za rotacijski zglob} \end{cases} \tag{4.91}$$

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_{C_i}^i = \ddot{\boldsymbol{p}}_i^i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \boldsymbol{r}_{i,C_i}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i + \boldsymbol{r}_{i,C_i}^i) \tag{4.92}$$

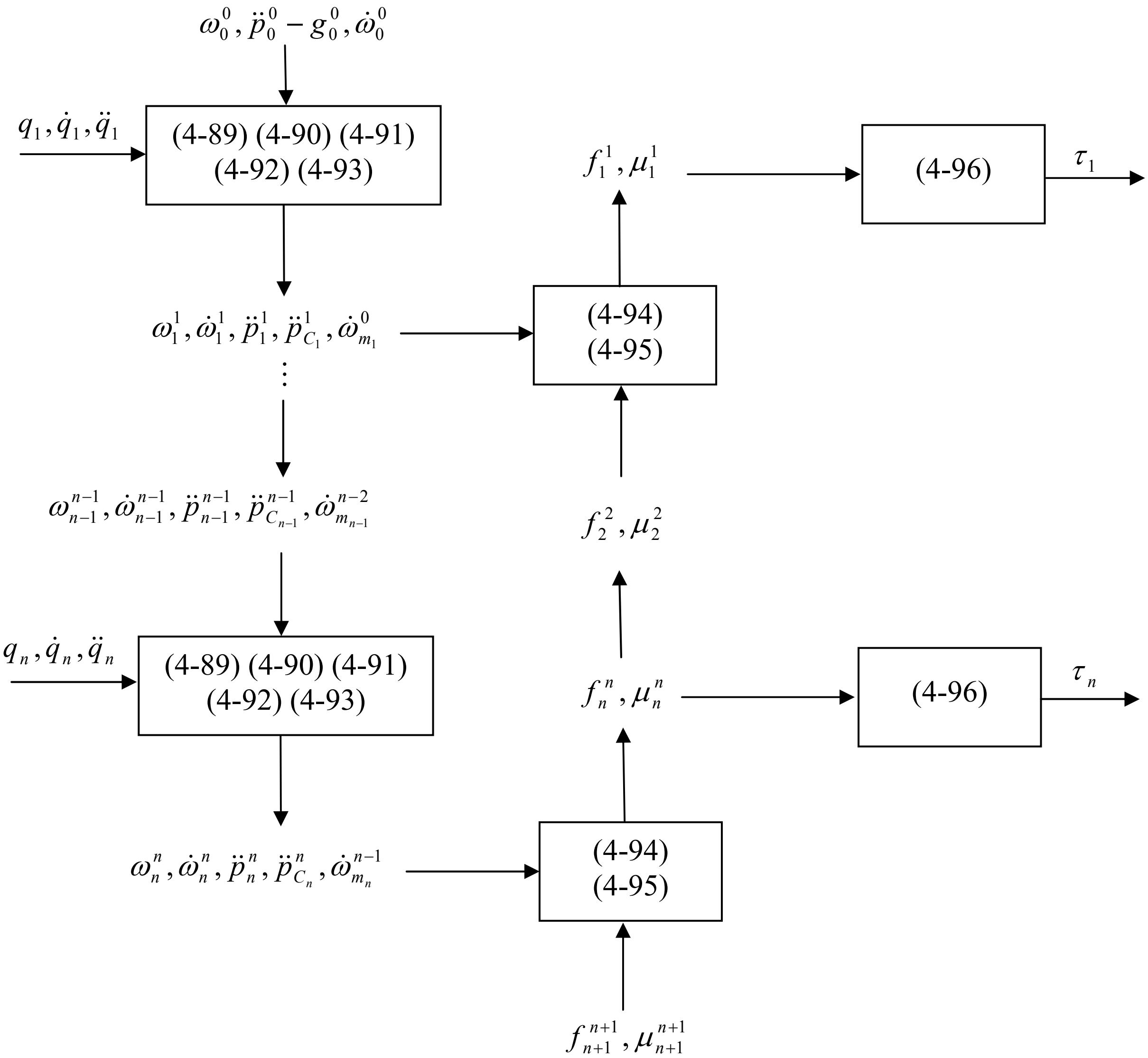
$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}^{i-1} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{i-1} + k_{r_i}\ddot{q}_i \boldsymbol{z}_{m_i}^{i-1} + k_{r_i}\dot{q}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} \times \boldsymbol{z}_{m_i}^{i-1} \tag{4.93}$$

$$\boldsymbol{f}_i^i = \boldsymbol{R}_{i+1}^i \boldsymbol{f}_{i+1}^{i+1} + m_i \ddot{\boldsymbol{p}}_{C_i}^i \tag{4.94}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_i^i = & -\boldsymbol{f}_i^i \times (\boldsymbol{r}_{i-1,i}^i + \boldsymbol{r}_{i,C_i}^i) + \boldsymbol{R}_{i+1}^i \boldsymbol{\mu}_{i+1} + \boldsymbol{R}_{i+1}^i \boldsymbol{f}_{i+1}^{i+1} \times \boldsymbol{r}_{i,C_i}^i + \bar{\boldsymbol{I}}_i^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\bar{\boldsymbol{I}}_i^i \boldsymbol{\omega}_i^i) \\ & + k_{r,i+1}\ddot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \boldsymbol{z}_{m_{i+1}}^i + k_{r,i+1}\dot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \boldsymbol{\omega}_i^i \times \boldsymbol{z}_{m_{i+1}}^i \end{aligned} \tag{4.95}$$

$$\tau_i^i = \begin{cases} \boldsymbol{f}_i^{i^T} \boldsymbol{R}_i^{i-1} \boldsymbol{z}_0 + k_{ri} I_{m_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{m_i}}^{i-1^T} \boldsymbol{z}_{m_i}^{i-1} + F_{vi}\dot{d}_i + F_{si}\,\mathrm{sgn}(\dot{d}_i) & \text{za translacijski zglob} \\ \boldsymbol{\mu}_i^{i^T} \boldsymbol{R}_i^{i-1} \boldsymbol{z}_0 + k_{ri} I_{m_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{m_i}}^{i-1^T} \boldsymbol{z}_{m_i}^{i-1} + F_{vi}\dot{\vartheta}_i + F_{si}\,\mathrm{sgn}(\dot{\vartheta}_i) & \text{za rotacijski zglob} \end{cases}. \tag{4.96}$$

Gornje jednadžbe imaju prednost da su $\bar{\boldsymbol{I}}_i^i, \boldsymbol{r}_{i,C_i}^i$ i $\boldsymbol{z}_{m_i}^{i-1}$ konstantni izrazi, što uzrokuje da je $\boldsymbol{z}_0 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$.



Slika 4.6. Računarska struktura Newton-Eulerovog rekurzivnog algoritma.

Sumarno, rekurzivni algoritam, za zadane pozicije, brzine i ubrzanja zglobova, izvodi se u slijedeće dvije faze:

- Sa poznatim početnim uvjetima $\boldsymbol{\omega}_0^0, \ddot{\boldsymbol{p}}_0^0 - \boldsymbol{g}_0^0$ i $\dot{\boldsymbol{\omega}}_0^0$, korištenjem izraza (4.89), (4.90), (4.91), (4.92) i (4.93) za i=1,...,n, računaju se $\boldsymbol{\omega}_i^i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i, \ddot{\boldsymbol{p}}_i^i, \ddot{\boldsymbol{p}}_{C_i}^i$ i $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}^{i-1}$.
- Sa poznatim krajnjim (rubnim) $\boldsymbol{f}_{n+1}^{n+1}$ i $\boldsymbol{m}_{n+1}^{n+1}$, korištenjem izraza (4.94) i (4.95) za i=1,...,n, računaju se $\boldsymbol{f}_i^i$ i $\boldsymbol{m}_i^i$. Nakon toga se pomoću izraza (4.96) računa τ_i.

Računarska struktura algoritma je shematski prikazana na Sl. 4.6.

Primjer 4.2 Dvosegmentna planarna ruka

U ovom primjeru će se ilustrirati primjena Newton-Eulerovog algoritma na dvosegmentnu planarnu ruku.
Zadani su početni uvjeti za brzine i ubrzanja:

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_0^0 - \boldsymbol{g}_0^0 = [0 \quad g \quad 0]^T \qquad \boldsymbol{\omega}_0^0 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^0 = \boldsymbol{0},$$

i rubni uvjeti za sile:

$$\boldsymbol{f}_3^3 = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\mu}_3^3 = \boldsymbol{0}.$$

Budući da se svi vektori posmatraju u odnosu na trenutni koordinatni sistem segmenta, dobivaju se slijedeći vektori konstantnih iznosa:

$$\boldsymbol{r}_{1,C_1}^1 = \begin{bmatrix} l_{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r}_{0,1}^1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r}_{2,C_2}^2 = \begin{bmatrix} l_{C_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r}_{1,2}^2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdje l_{C_1} i l_{C_2} idu sa negativnim predznakom. Matrice rotacije potrebne za transformaciju iz jednog u drugi koordinatni sistem su:

$$\boldsymbol{R}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 \\ s_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1,2 \qquad \boldsymbol{R}_3^2 = \boldsymbol{I}.$$

Nadalje se pretpostavlja da se osi rotacije dva rotora podudaraju sa respektivnim osima zglobova, tj. $\boldsymbol{z}_{m_i}^{i-1} = \boldsymbol{z}_0 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ za i=1,2.
U skladu sa jednadžbama (4.89)-(4.96), Newton-Eulerov algoritam zahtijeva izvođenje slijedećih korka:

- Rekurzija *prema naprijed*: segment 1

$$\boldsymbol{\omega}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta}_1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\vartheta}_1 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_1^1 = \begin{bmatrix} -a_1\dot{\vartheta}_1^2 + gs_1 \\ a_1\dot{\vartheta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_{C_1}^1 = \begin{bmatrix} -(l_{C_1} + a_1)\dot{\vartheta}_1^2 + gs_1 \\ (l_{C_1} + a_1)\ddot{\vartheta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_1}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{r1}\ddot{\vartheta}_1 \end{bmatrix}$$

- Rekurzija *prema naprijed*: segment 2

$$\boldsymbol{\omega}_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_2^2 = \begin{bmatrix} a_1s_2\ddot{\vartheta}_1 - a_1c_2\dot{\vartheta}_1^2 - a_2(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + gs_{12} \\ a_1c_2\ddot{\vartheta}_1 + a_2(\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + a_1s_2\dot{\vartheta}_1^2 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_{C_2}^2 = \begin{bmatrix} a_1s_2\ddot{\vartheta}_1 - a_1c_2\dot{\vartheta}_1^2 - (l_{C_2} + a_2)(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + gs_{12} \\ a_1c_2\ddot{\vartheta}_1 + (l_{C_2} + a_2)(\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + a_1s_2\dot{\vartheta}_1^2 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_2}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\vartheta}_1 + k_{r2}\ddot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}.$$

- Rekurzija *prema unatrag* : segment 2

$$\boldsymbol{f}_2^2 = \begin{bmatrix} m_2(a_1 s_2 \ddot{\vartheta}_1 - a_1 c_2 \dot{\vartheta}_1^2 - (l_{C_2} + a_2)(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + g s_{12}) \\ m_2(a_1 c_2 \ddot{\vartheta}_1 + (l_{C_2} + a_2)(\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + a_1 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + g c_{12}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}_2^2 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ \bar{I}_{2zz}(\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + m_2(l_{C_2} + a_2)^2(\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + m_2 a_1 (l_{C_2} + a_2) c_2 \ddot{\vartheta}_1 \\ + m_2 a_1 (l_{C_2} + a_2) s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + m_2 (l_{C_2} + a_2) g c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = {} & (\bar{I}_{2zz} + m_2((l_{C_2} + a_2)^2 + a_1(l_{C_2} + a_2)c_2) + k_{r2} I_{m_2})\ddot{\vartheta}_1 \\ & + (\bar{I}_{2zz} + m_2(l_{C_2} + a_2)^2 + k_{r2}^2 I_{m_2})\ddot{\vartheta}_2 \\ & + m_2 a_1 (l_{C_2} + a_2) s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + m_2 (l_{C_2} + a_2) g c_{12}. \end{aligned} \tag{4.97}$$

- Rekurzija *prema unatrag* : segment 1

$$\boldsymbol{f}_1^1 = \begin{bmatrix} -m_2(l_{C_2} + a_2) s_2 (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) - m_1(l_{C_1} + a_1)\dot{\vartheta}_1^2 - m_2 a_1 \dot{\vartheta}_1^2 \\ - m_2(l_{C_2} + a_2) c_2 (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + (m_1 + m_2) g s_1 \\ m_1(l_{C_1} + a_1)\ddot{\vartheta}_1 + m_2 a_1 \ddot{\vartheta}_1 + m_2 (l_{C_2} + a_2) c_2 (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) \\ - m_2 (l_{C_2} + a_2) s_2 (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + (m_1 + m_2) g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{\mu}_1^1 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ \bar{I}_{1zz}\ddot{\vartheta}_1 + m_2 a_1^2 \ddot{\vartheta}_1 + m_1(l_{C_1} + a_1)^2 \ddot{\vartheta}_1 + m_2 a_1 (l_{C_2} + a_2) c_2 \ddot{\vartheta}_1 \\ + \bar{I}_{2zz}(\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + m_2 a_1 (l_{C_2} + a_2) c_2 (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) \\ + m_2 (l_{C_2} + a_2)^2 (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + k_{r2} I_{m_2} \ddot{\vartheta}_2 \\ + m_2 a_1 (l_{C_2} + a_2) s_2 \dot{\vartheta}_1^2 - m_2 a_1 (l_{C_2} + a_2) s_2 (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 \\ + m_1 (l_{C_1} + a_1) g c_1 + m_2 a_1 g c_1 + m_2 (l_{C_2} + a_2) g c_{12} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_1 = {} & (\bar{I}_{1zz} + m_1 (l_{C_1} + a_1)^2 + k_{r1}^2 I_{m_1} + \bar{I}_{2zz} + m_2 (a_1^2 + (l_{C_2} + a_2)^2 + 2a_1 (l_{C_2} + a_2) c_2)) \ddot{\vartheta}_1 \\
& + (\bar{I}_{2zz} + m_2 ((l_{C_2} + a_2)^2 + a_1 (l_{C_2} + a_2) c_2) + k_{r2} I_{m_2}) \ddot{\vartheta}_2 \\
& - 2 m_2 a_1 (l_{C_2} + a_2) s_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - m_2 a_1 (l_{C_2} + a_2) s_2 \dot{\vartheta}_2^2 \\
& + (m_1 (l_{C_1} + a_1) + m_2 a_1) g c_1 + m_2 (l_{C_2} + a_2) g c_{12}.
\end{aligned} \tag{4.98}
$$

Momentne komponente označene sa ‘*’ nisu se računale jer nisu povezane sa zglobovskim momentima τ_2 i τ_1.
Rezultirajući Newton-Eulerov model je identičan Lagrangeovom (4-68), jer vrijedi:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= m_{l_1} + m_{m_2} \\
m_1 l_{C_1} &= m_{l_1}(l_1 - a_1) \\
\bar{I}_{1zz} + m_1 l_{C_1}^2 &= I_{l_1} + m_{l_1}(l_1 - a_1)^2 + I_{m_2} \\
m_2 &= m_{l_2} \\
m_2 l_{C_2} &= m_{l_2}(l_2 - a_2) \\
\bar{I}_{2zz} + m_2 l_{C_2}^2 &= I_{l_2} + m_{l_2}(l_2 - a_2)^2.
\end{aligned} \tag{4.99}
$$