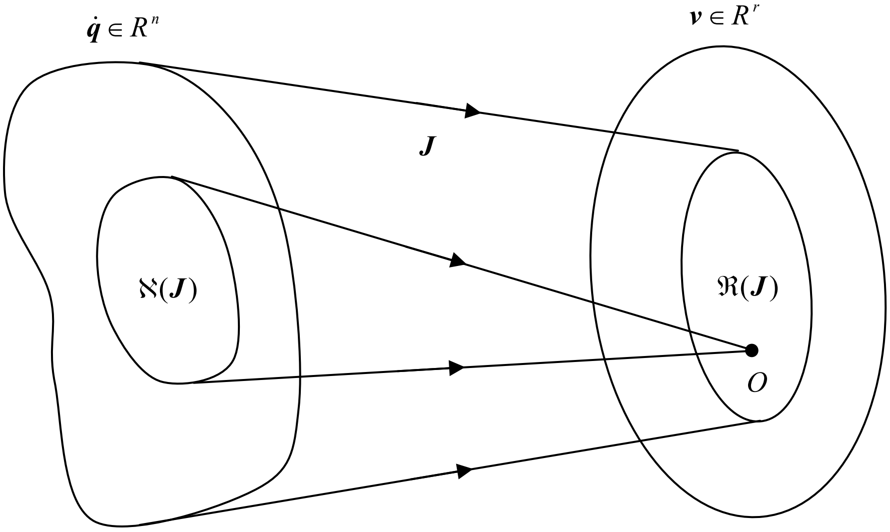
3.8 ANALIZA REDUDANCIJE

Kako je već ranije rečeno, redudancija je povezana sa brojem stupnjeva pokretljivosti n, brojem varijabli operacijskog prostora m i brojem varijabli operacijskog prostora r potrebnih za specificiranje zadanog zadatka.
Jednadžba diferencijalne kinematike, koja će se razmatrati u analizi redudancije, dana je izrazom (3.19), odnosno

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\,, \tag{3.86}$$

gdje $\boldsymbol{v}$ predstavlja ($r\times1$) vektor brzine vrha manipulatora koji se odnosi na specificiran zadatak, $\boldsymbol{J}$ je ($r\times n$) matrica geometrijskog Jacobiana i $\dot{\boldsymbol{q}}$ je ($n\times1$) vektor zglobovskih brzina. Ako je $r<n$, manipulator je kinematički redudantan i postoji (n-r) *redudantnih stupnjeva pokretljivosti*.
Jacobian opisuje linearno preslikavanje iz prostora brzina zglobova u prostor brzina vrha manipulatora. Općenito, on je funkcija konfiguracije. Ovo preslikavanje je shematski prikazano na Sl. 3.9.



Sl. 3.9. Preslikavanje između prostora brzina zglobova i brzina vrha manipulatora.

Jednadžba diferencijalne kinematike (3.19) može se karakterizirati u izrazima *područje* i *nul* prostori preslikavanja, pri čemu su oni:

- Područje od $\boldsymbol{J}$ je potprostor $\Re(\boldsymbol{J})$ u R^r prostoru brzina vrha manipulatora koje se mogu generirati brzinama zglobova za danu konfiguraciju manipulatora.
- *Nul* prostor od $\boldsymbol{J}$ je potprostor $\aleph(\boldsymbol{J})$ u R^n prostoru brzina zglobova koje ne proizvode nikakve brzine vrha manipulatora za danu konfiguraciju manipulatora.

Ako matrica Jacobiana ima puni rang, tada vrijedi:

$$\dim(\Re(\boldsymbol{J})) = r \qquad \text{i} \qquad \dim(\aleph(\boldsymbol{J})) = n - r\,, \tag{3.87}$$

i područje od $\boldsymbol{J}$ razapinje čitav prostor R^r. Ako se Jacobian degenerira u singularnim konfiguracijama, dimenzija područja prostora se smanjuje dok se dimenzija nul prostora povećava, budući da vrijedi slijedeća relacija:

$$\dim(\Re(\boldsymbol{J})) + \dim(\aleph(\boldsymbol{J})) = n\,. \tag{3.88}$$

Postojanje podprostora $\aleph(\boldsymbol{J})\neq 0$ za redudantne manipulatore dozvoljava određivanje sistematične tehnike za rukovnje redudantnim stupnjevima slobode. Za tu svrhu, ako $\dot{\boldsymbol{q}}^*$ označava rezultat jednadžbe (3.86) i $\boldsymbol{P}$ je $(n\times n)$ matrica takva da je

$$\Re(\boldsymbol{P}))\equiv\aleph(\boldsymbol{J}), \tag{3.89}$$

tada vektor zglobovskih brzina:

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\dot{\boldsymbol{q}}^*+\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{q}}_a, \tag{3.90}$$

uz odgovarajući $\dot{\boldsymbol{q}}_a$ predstavlja rješenje jednadžbe (3.86).
Množenjem obe strane jednadžbe (3.90) sa $\boldsymbol{J}$ dobiva se:

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}^*+\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{q}}_a=\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}^*=\boldsymbol{v}, \tag{3.91}$$

Budući da je $\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{q}}_a=\boldsymbol{0}$ za bilo koji $\dot{\boldsymbol{q}}_a$. Ovaj rezultat je od fundamentalne važnosti za analizu redudanciju. Rješenje jednadžbe (3.90) nameće mogući izbor vektora odgovarajućih brzina zglobova $\dot{\boldsymbol{q}}_a$ tako da naglašava prednost redudantnih stupnjeva slobode. Zaista, efekat koji ima $\dot{\boldsymbol{q}}_a$ je da generira unutarnja kretanja strukture koja ne dozvoljavaju promjenu pozicije i orijentacije vrha manipulatora, na primjer rekonfiguracija manipulatora u mnogo opasniju konfiguraciju za izvršenje zadanog zadatka.
U nastavku se analizira problem inverzne diferencijalne kinematike, odnosno uspostavljanje relacija preslikavanja brzina operacijskog u brzine zglobovskog prostora. Za razliku od direktne diferencijalne kinematike, kod inverzne diferencijalne kinematike relacija je ostvarena pomoću inverzne matrice Jacobiana.

3.9 INVERZNA DIFERENCIJALNA KINEMATIKA

Dobivanje rješenja inverznog kinematičkog problema u zatvorenoj formi moguće je samo za manipulatore koji imaju jednostavnu kinematičku strukturu. Problemi nastaju uvijek kada vrh manipulatora dostiže pojedinačni položaj i/ili orijentaciju u operacijskom prostoru, ili je struktura složena i nije moguće uspostaviti vezu između položaja i orijentacije vrha manipulatora za različite skupova varijabli zglobova, ili je manipulator redudantan. Ova ograničenja uzrokuju visok stupanj nelinearnost između varijabli zglobovskog i operacijskog prostora.
S druge strane, diferencijalna kinematička jednadžba predstavlja linearno preslikavanje između zglobovskog i operacijskog prostora brzina, premda ona ovisi o trenutnoj konfiguraciji. Ovo sugerira mogućnost korištenja diferencijalne kinematičke jednadžbe u rješavanju inverznog kinematičkog problema. Naime, radni zadatak robotu može se opisati u terminima brzina vrha manipulatora $\boldsymbol{v}$ i zadanim početnim uvjetima za položaj i orijentaciju. Cilj je tada odrediti odgovarajuću zglobovsku trajektoriju $(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t))$ koja reproducira zadanu trajektoriju.
Ako je $n=r$, tada se jednostavno inverzijom Jacobiana u jednadžbi diferencijalne kinematike dobiva:

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v}. \tag{3.92}$$

Ako je poznat početni vektor $\boldsymbol{q}(0)$, tada je:

$$\boldsymbol{q}=\int_0^t\dot{\boldsymbol{q}}(\varsigma)d\varsigma+\boldsymbol{q}(0). \tag{3.93}$$

Neovisno o rješivosti inverznog kinematičkog problema, ako je $\boldsymbol{J}$ kvadratna matrica punog ranga moguće je numeričkom integracijom dobiti trajektoriju $\boldsymbol{q}$ u diskretnim vremenskim trenucima, npr.:

$$\boldsymbol{q}(t_{k+1}) = \boldsymbol{q}(t_k) + \dot{\boldsymbol{q}}(t_k)\Delta t \,. \tag{3.94}$$

Ovaj postupak invertiranja kinematike je neovisan o rješivosti kinematičke strukture. Ono što je važno jeste da je matrica Jacobiana kvadratna i punog ranga, što je dalje povezano s redudantnim manipulatorima i pojavom kinematičkih singulariteta.
U numeričkoj implementaciji jednadžbe (3.94), računanje brzina zglobova obavlja se invertiranjem matrice Jacobiana sa zglobovskim varijablama iz prethodnog vremenskog trenutka na slijedeći način:

$$\boldsymbol{q}(t_{k+1}) = \boldsymbol{q}(t_k) + \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q}(t_k))\boldsymbol{v}(t_k)\Delta t \,. \tag{3.95}$$

Rekonstrukcija zglobovskih varijabli $\boldsymbol{q}$ pomoću numeričke integracije uključuje *drift* u rješenju, odnosno, lokacija vrha manipulatora koja odgovara izračunatim zglobovskim varijablama razlikuje se od željene lokacije. Ovo odstupanje može se izraziti kao greška:

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x} \,. \tag{3.96}$$

Deriviranjem izraza (3.96) dobiva se:

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{x}}_d - \dot{\boldsymbol{x}} \,, \tag{3.97}$$

odnosno, u skladu sa jednadžbom diferencijalne kinematike (3.51):

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{x}}_d - \boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \,. \tag{3.98}$$

Ova jednadžba daje vezu između vektora brzina zglobova $\dot{\boldsymbol{q}}$ i greške slijeđenja u operacijskom prostoru $\boldsymbol{e}$. Ona također pokazuje kako se greška mijenja tokom vremena.
Međutim, najvažnije je pronaći vezu između $\dot{\boldsymbol{q}}$ i $\boldsymbol{e}$, koja će osigurati da greška konvergira ka nuli. Ova relacija se može pronaći na dva načina, ovisno o tome da li se obavlja linearizacija jednadžbe (3.98), ili ne. U prvom slučaju je za potrebu ove relacije neophodno računanje inverznog Jacobiana, a za drugi slučaj transponiranog Jacobiana. Bitno je uočiti da se na ovaj način ustvari može riješiti problem inverzne kinematike korištenjem matrice Jacobiana, odnosno relacije diferencijalne kinematike.

3.9.1 Rješavanje problema inverzne kinematike transponiranjem Jacobiana

Budući da se za pronalaženje izraza koji će osigurati konvergenciju greške ka nuli ne zahtijeva linearizacija (3.98), greška dinamika greške će biti opisana nelinearnom diferencijalnom jednadžbom. Direktna Lyapunova metoda se može iskoristiti za računanje $\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{e})$ koji će osigurati asimptotsku stabilnost greške sistema. Dobar izbor za Lyapunovu funkciju je funkcija pozitivno definitna i kvadratnog oblika:

$$V(\boldsymbol{e}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{e} \,, \tag{3.99}$$

gdje je $\boldsymbol{K}$ simetrična, pozitivno definitna matrica. Ova funkcija ima svojstva:

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{e}) &> 0, \ \forall \boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0} \\ V(\boldsymbol{0}) &= 0 \end{aligned} \quad . \tag{3.100}$$

Deriviranjem izraza (3.99) dobiva se:

$$\dot{V}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{x}}_d - \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{x}} , \tag{3.101}$$

odnosno,

$$\dot{V}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{x}}_d - \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} . \tag{3.102}$$

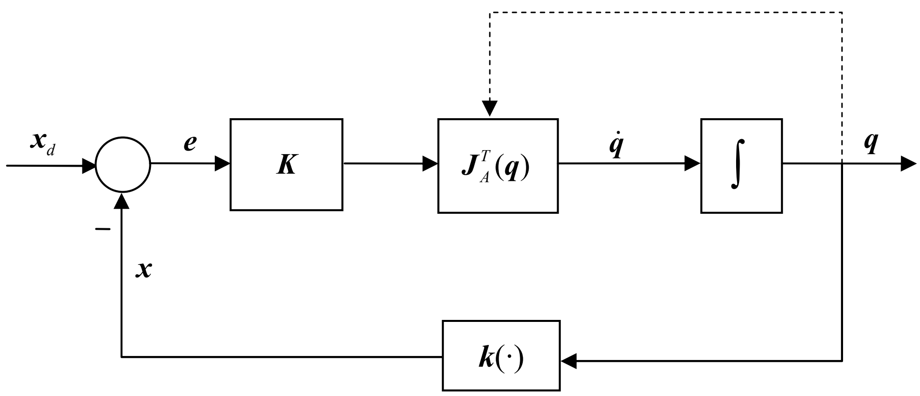
Izborom izraza za zglobovske brzine oblika

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_A^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{K}\boldsymbol{e} , \tag{3.103}$$

slijedi

$$\dot{V}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{x}}_d - \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q})\boldsymbol{J}_A^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{K}\boldsymbol{e} . \tag{3.104}$$

Rezultirajuća blok shema je prikazana na Sl. 3.10. i prikazuje algoritam koji zahtijeva računanje samo direktne kinematičke funkcije $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{J}_A^T(\boldsymbol{q})$. Također se prepoznaje da jednadžba (3.103) odgovara gradijentnoj metodi za rješenje sistema nelinearnih jednadžbi.



Slika 3.10. Blok shema inverznog kinematičkog algoritma sa transponiranom matricom Jacobiana.

U slučaju slijeđenja konstantne referentne trajektorije ($\dot{\boldsymbol{x}}_d = 0$) funkcija (3.104) postaje negativno definitna, uz pretpostavku da matrica Jacobiana $\boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q})$ ima puni rang. Budući da je V>0 i $\dot{V} < 0$, slijedi da će trajektorije sistema uniformno konvergirati ka $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$, to jest sistem je asimptotski stabilan.
Kada je $\boldsymbol{x}_d$ vremenski promjenjiva funkcija ($\dot{\boldsymbol{x}}_d \neq 0$), da bi se postiglo $\dot{V} < 0$, dovoljno je izabrati da $\dot{\boldsymbol{q}}$ ovisi o (pseudo-)inverziji matrice Jacobiana, što rezultira asimptotskom stabilnošću sistema. Za inverznu shemu temeljenu na transponiranju, prvi izraz jednadžbe (3.104) ne može se poništiti i ništa se ne može reći o njegovom predznaku.

3.9.2 Rješavanje problema inverzne kinematike invertiranjem Jacobiana

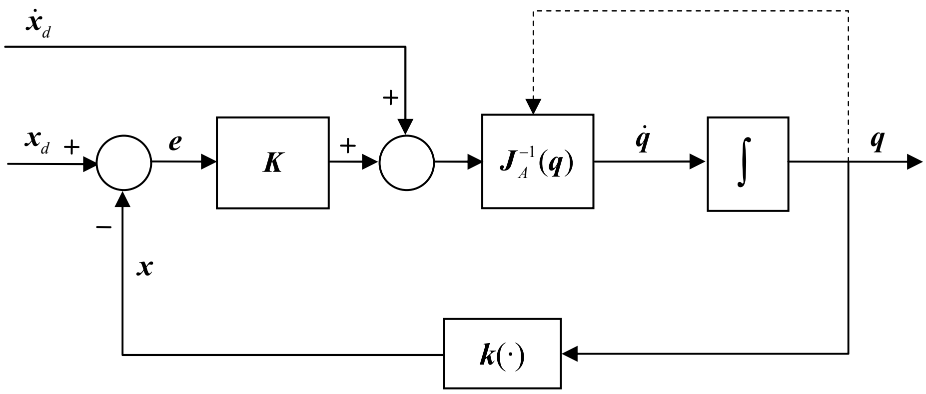
Uz pretpostavku da je matrica $\boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q})$ kvadratna i nesingularna, izbor

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_A^T(\boldsymbol{q})(\dot{\boldsymbol{x}}_d + \boldsymbol{K}\boldsymbol{e}), \tag{3.105}$$

daje ekvivalentan linearan sistem

$$\dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}. \tag{3.106}$$

Ako je $\boldsymbol{K}$ pozitivno definitna (obično dijagonalna) matrica, sistem (3.106) je asimptotski stabilan. Greška teži ka nuli duž trajektorije sa brzinom konvergencije koja ovisi o svojstvenim vrijednostima matrice $\boldsymbol{K}$. Veći iznosi svojstvenih vrijednosti uzrokuju bržu konvergenciju. Budući da se sistem opisan jednadžbom (3.106) praktički implementira kao vremenski diskretan sistem, razumno je predvidjeti gornju granicu za postojanje svojstvenih vrijednosti, ovisno o vrmenu uzorkovanja. Drugim riječima, postojat će ograničenje za maksimum svojstvenih vrijednosti od $\boldsymbol{K}$ unutar kojeg će asimptotska stabilnost sistema greške (3.106) biti zagarantirana.
Blok shema koja odgovara inverznom kinematičkom algoritmu dobivenom pomoću inverzne matrice Jacobiana prikazana je na Sl. 3.11, pri čemu $\boldsymbol{k}(\cdot)$ predstavlja funkciju direktne kinematike.



Slika 3.11. Blok shema inverznog kinematičkog algoritma sa inverznom matricom Jacobiana.

Ova shema predstavlja klasični sistem upravljanja sa povratnom vezom. Nelinearni blok $\boldsymbol{k}(\cdot)$ je potrebna za računanje $\boldsymbol{x}$-a, odnosno greške slijeđenja $\boldsymbol{e}$, dok se blok $\boldsymbol{J}_A^{-1}(\boldsymbol{q})$ uvodi s ciljem kompenziranja $\boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q})$ i na taj način čini sistem linearnim. Blok shema također pokazuje postojanje niza integratora u direktnoj grani i za konstantnu trajektoriju ($\dot{\boldsymbol{x}}_d = 0$) garantira iznos greške jednak nuli u stacionarnom stanju. Nadalje, djelovanje u direktnoj grani ostvareno sa $\dot{\boldsymbol{x}}_d$ za vremenski promjenjivu trajektoriju osigurava da greška zadržava vrijednost jednaku nu.li (i u slučaju $\boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{0}$) duž cijele trajektorije, neovisno o tipu željene trajektorije $\boldsymbol{x}_d(t)$.
U slučaju redudantnih manipulatora dobiva se intereseantan rezultat korištenjem pseudoinverzije matrice Jacobiana. U nastavku se daje analiza redudantnog manipulatora i izbora $\dot{\boldsymbol{q}}$.

3.9.3 Redudantni manipulatori

U slučaju redudantnog manipulatora ($r<n$), matrica Jacobiana ima mnogo više stupaca nego redaka i diferencijalna kinematička jednadžba:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}, \tag{3.107}$$

ima beskonačno mnogo rješenja. U tom slučaju manipulator posjeduje (n- r) stupnjeva pokretljivosti.

Kada se za zadanu konfiguraciju $\boldsymbol{q}$ izračuna $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{J}$, tada se nastoji pronaći rješenje $\dot{\boldsymbol{q}}$ koje zadovoljava jednadžbu (3.107) i minimizirati kvadratnu funkciju zglobovskih brzina:

$$\sigma(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{q}}\,, \tag{3.108}$$

gdje je $\boldsymbol{W}$ simetrična pozitivno definitna težinska matrica dimenzija ($n\times n$).
Ovaj problem se može riješiti korištenjem metode Lagrangianovih multiplikatora. Promatrajmo modificirani funkcional (3.108):

$$\sigma(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}})\,, \tag{3.109}$$

gdje je $\boldsymbol{\lambda}$ ($r\times 1$) vektor nepoznatih multiplikatora koji omogućuju umetanje izraza (3.107) u jednadžbu (3.109). Zahtijevano rješenje mora zadovljavati potrebne uvjete:

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)^T = \boldsymbol{0}, \qquad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T = \boldsymbol{0}\ . \tag{3.110}$$

Iz prvog uvjeta se dobiva da je $\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}$, odnosno

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{\lambda}\,, \tag{3.111}$$

pri čemu postoji inverzna matrica od $\boldsymbol{W}$. Rješenje predstavljeno sa (3.111) predstavlja minimum, budući da je $\partial^2\sigma / \partial\dot{\boldsymbol{q}}^2 = \boldsymbol{W}$ pozitivno definitna matrica. Iz drugog uvjeta slijedi da je

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}\ . \tag{3.112}$$

Kombinirajući navedena dva uvjeta dobiva se:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{\lambda}\,, \tag{3.113}$$

Uz pretpostavku da matrica $\boldsymbol{J}$ ima puni rang, $\boldsymbol{J}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{J}^T$ je ($r\times r$) kvadratna matrica ranga r koja se može invertirati. Iz (3.113) slijedi izraz za $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{J}^T)^{-1}\boldsymbol{v}\ . \tag{3.114}$$

Uvrštavanjem ovog izraza u jednadžbu (3.101) dobiva se optimalno rješenje:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{J}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{J}^T)^{-1}\boldsymbol{v}\ . \tag{3.115}$$

Specijalan slučaj se dobiva kada je težinska matrica $\boldsymbol{W}$ jedinična matrica. Tada se rješenje pojednostavljuje i postaje:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{\upsilon}\boldsymbol{v}\,, \tag{3.116}$$

gdje matrica

$$\boldsymbol{J}^{\upsilon} = \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^T)^{-1}, \tag{3.117}$$

predstavlja *pseudoinverziju* matrice $\boldsymbol{J}$. Dobiveno rješenje lokalno minimizira normu zglobovskih brzina.
Ako je $\dot{\boldsymbol{q}}^*$ rješenje jednadžbe (3.107) tada je $\dot{\boldsymbol{q}}^* + \boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{q}}_a$ također rješenje, gdje je $\dot{\boldsymbol{q}}_a$ vektor odgovarajućih zglobovskih brzina i $\boldsymbol{P}$ je projektor u null prostoru $\boldsymbol{J}$-a. Osim toga, zbog postojanja redudantnih stupnjeva slobode, rješenje (3.116) može se modificirati uvođenjem drugog izraza $\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{q}}_a$.
U tom slučaju potrebno je razmatrati novu funkciju kakvoće

$$\sigma'(\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{q}}_a)^T(\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{q}}_a). \tag{3.118}$$

Cilj ovog izbora je minimiziranje norme vektora $(\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{q}}_a)$. Drugim riječima, rješenja koja zadovoljavaju uvjet (3.116) i koja su što je moguće bliža $\dot{\boldsymbol{q}}_a$. Na ovaj način, uvođenjem $\dot{\boldsymbol{q}}_a$ dobiva se dodatni cilj kojeg je potrebno zadovoljiti uz već postojeći primarni cilj dan izrazom (3.107). Na temelju ovoga dobiva se:

$$\sigma'(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{q}}_a)^T(\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{q}}_a) + \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{3.119}$$

pri čemu je rješenje dano sa

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{\lambda} + \dot{\boldsymbol{q}}_a. \tag{3.120}$$

Uvrštenjem ovog izraza u jednadžbu (3.107) dobiva se

$$\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^T)^{-1}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}_a). \tag{3.121}$$

I na kraju smjenom $\boldsymbol{\lambda}$ u izraz (3.120) dobiva se

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^V\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}^V\boldsymbol{J})\dot{\boldsymbol{q}}_a. \tag{3.122}$$

Dobiveno rješenje se sastoji od dva izraza. Prvi se odnosi na minimum norme zglobovskih brzina. Drugi izraz, nazvan *homogeno rješenje*, nastoji zadovoljiti dodatno ograničenje specificirano pomoću $\dot{\boldsymbol{q}}_a$, gdje je matrica $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}^V\boldsymbol{J})$ jedna od matrica $\boldsymbol{P}$, koja omogućuje projekciju vektora $\dot{\boldsymbol{q}}_a$ u null prostor matrice Jacobiana $\boldsymbol{J}$, tako da se ne naruši ograničenje (3.107). Direktna posljedica je da je, u slučaju $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, moguće je generirati unutarnja kretanja opisana sa $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}^V\boldsymbol{J})\dot{\boldsymbol{q}}_a$, koja rekonfiguriraju strukturu manipulatora ne mijenjajući poziciju i orijentaciju vrha manipulatora.
U slučaju redudantnog manipulatora jednadžba (3.105) može se napisati u obliku:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_A^{\upsilon}(\dot{\boldsymbol{x}}_d + \boldsymbol{K}\boldsymbol{e}) + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}_A^{\upsilon}\boldsymbol{J}_A)\dot{\boldsymbol{q}}_a, \tag{3.123}$$

što predstavlja algoritamsku verziju rješenja (3.122)

3.10 STATIKA

Cilj *statike* je odrediti vezu između generaliziranih sila narinutih na vrh manipulatora i generaliziranih sila u zglobovima manipulatora (*sila* za prizmatične zglobove i *momenata* za obrtne zglobove), kada je manipulator u stanju ravnoteže.

Neka je $\boldsymbol{\tau}$ n-dimenzionalni vektor zglobovskih momenata i $\boldsymbol{\gamma}$ r-dimenzionalni vektor sila u vrhu manipulatora, gdje je r dimenzija razmatranog operacijskog prostora.
Za izvođenje relacija statike, koristi se *princip virtualnog rada*, koji se može primijeniti u ovom slučaju, jer se radi o sistemu sa vremenski neovisnim holonomnim ograničenjima. Dakle virtualni pomaci su jednaki elementarnim pomacima.
Promatrajmo elementarne radove obavljene djelovanjem sila dva sistema. Elementarni rad proizveden zglobovskim momentima jednak je

$$dW_\tau = \boldsymbol{\tau}^T d\boldsymbol{q}\ . \tag{3.127}$$

Djelovanje generaliziranih sila vrha manipulatora $\boldsymbol{\gamma}$, može se razdvojiti na doprinos uslijed djelovanja sila $\boldsymbol{f}$ i doprinos uslijed djelovanja momenata $\boldsymbol{\mu}$, na slijedeći način:

$$dW_\gamma = \boldsymbol{f}^T d\boldsymbol{p} + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\omega} dt\ , \tag{3.128}$$

gdje $d\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{\omega}dt$ predstavljaju linearne i ugaone pomake.
Uzimajući u obzir jednadžbe diferencijalne kinematike (3.19) i (3.20), jednadžba (3.128) postaje:

$$dW_\gamma = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q} + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{J}_O(\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q}\ , \tag{3.129}$$

gdje je $\boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{f}^T \quad \boldsymbol{\mu}^T\ ]^T$.
Budući da virtualni i elementarni pomaci se podudaraju, virtualni radovi pridruženi silama navedenih dvaju sistema su:

$$\delta W_\tau = \boldsymbol{\tau}^T \delta\boldsymbol{q}\ , \tag{3.130}$$

$$\delta W_\gamma = \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\delta\boldsymbol{q}\ , \tag{3.131}$$

gdje se oznaka δ odnosi na virtualni rad.
U skladu sa principom virtualnog rada, manipulator je u statičkoj ravnoteži ako i samo ako je

$$\delta W_\tau - \delta W_\gamma = 0, \quad \forall \delta\boldsymbol{q}\ , \tag{3.132}$$

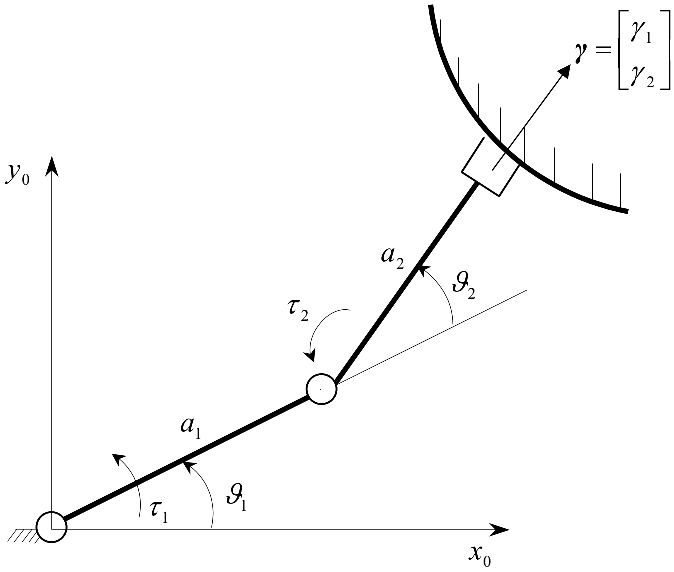
to jest, razlika između virtualnog rada zglobovskih momenata i virtualnog rada sila vrha manipulatora bit će nula za sve pomake zglobova.
Iz jednadžbe (3.131) slijedi da je virtualni rad sila vrha manipulatora je nula za bilo koji pomak u nul prostoru od $\boldsymbol{J}$-a. Ovo implicira da zglobovski momenti pridruženi takvim pomacima mora biti nula u statičkoj ravnoteži. U tom slučaju, smjenom (3.130) i (3.131) u (3.132) dobiva se slijedeći rezultat:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\gamma}\ . \tag{3.133}$$

Iz jednadžbe (3.133) slijedi da je veza između sila vrha manipulatora i momenata zglobova dana pomoću transponiranog geiometrijskog Jacobiana manipulatora.

Primjer 3.8

Na Sl. 3.15 prikazana je dvosegmentna planarna ruka. Vrh manipulatora je u dodiru s vanjskom površinom proizvodeći silu $\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix}\gamma_x & \gamma_y\end{bmatrix}^T$. Pronaći ekvivalentne momente zglobova $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix}\tau_x & \tau_y\end{bmatrix}^T$ koji su korespodentni silama vrha manipulatora $\boldsymbol{\gamma}$, zanemarujući trenja u mehanizmu zglobova.



Slika 3.15. Sile u vrhu manipulatora i ekvivalentni momenti zglobova.

Geometrijski Jacobian navedene strukture ima oblik:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 \mathrm{c}_{12} \end{bmatrix}. \tag{3.134}$$

Na osnovu transponirane matrice Jacobiana

$$\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ -a_2 s_{12} & a_2 \mathrm{c}_{12} \end{bmatrix},$$

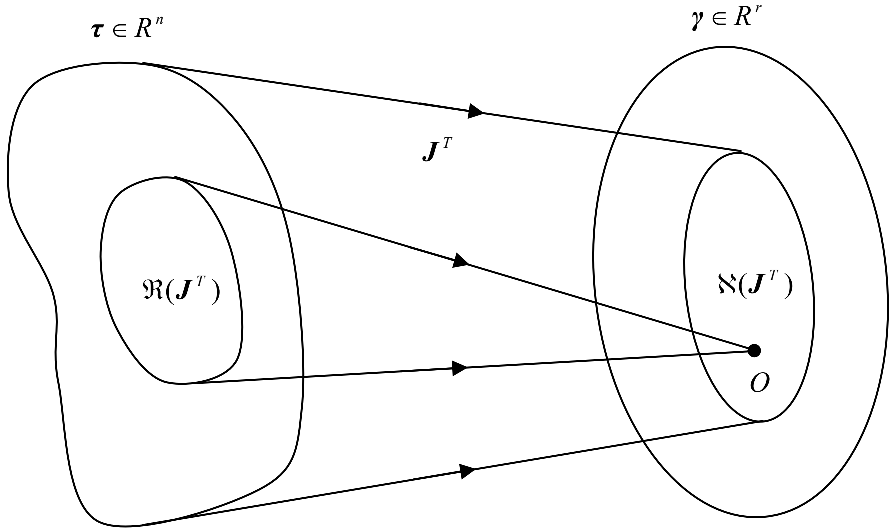
dobivaju se ekvivalentni momenti zglobova dani izrazima:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ -a_2 s_{12} & a_2 \mathrm{c}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -(a_1 s_1 + a_2 s_{12})\gamma_1 + (a_1 c_1 + a_2 c_{12})\gamma_2 \\ \tau_2 &= -a_2 s_{12}\gamma_1 + a_2 \mathrm{c}_{12}\gamma_2 \end{aligned}. \tag{3.135}$$

Kombiniranjem jednadžbe statike (3.133) i jednadžbe diferencijalne kinematike (3.107) dobiva se tzv. svojstvo *kineo-statičke dualnosti*. U analogiji sa preslikavanjem prikazanim na Sl. 3.9 za diferencijalnu kinematiku, može se slična stvar uraditi sa preslikavanjem između prostora momenata zglobova i prostora sila vrha manipulatora. Ovo je ilustartivno prikazano na Sl. 3.16.



Sl. 3.16. Preslikavanje između prostora sila vrha manipulatora i momenata zglobova.

Jednadžba statike se također mogu karakterizirati izrazima *područje* i *nul* prostori preslikavanja, pri čemu su oni:

- *Područje* od $\boldsymbol{J}^T$ je potprostor $\Re(\boldsymbol{J}^T)$ u R^r prostoru momenata zglobova koji mogu uravnotežiti sile vrha manipulatora za danu konfiguraciju manipulatora.
- *Nul* prostor od $\boldsymbol{J}^T$ je potprostor $\aleph(\boldsymbol{J}^T)$ u R^n prostoru sila vrha manipulatora koje ne zahtijevaju uravnoteženje momenata zglobova za danu konfiguraciju manipulatora.

Veze između navedenih potprostora su uspstavljene na slijedeći način:

$$\aleph(\boldsymbol{J}) \equiv \Re^{\perp}(\boldsymbol{J}^T) \qquad \text{i} \qquad \Re(\boldsymbol{J}) \equiv \aleph^{\perp}(\boldsymbol{J}^T), \tag{3.136}$$

i ako je Matrica Jacobiana manipulatora poznata, moguće je upotpunosti karakterizirati diferencijalnu kinematiku i statiku u izrazima *područja* i *nul* prostora matrice Jacobiana i njene transponirane matrice.