

2.3 INVERZNA KINEMATIKA

Inverzni kinematički problem sastoji se iz postupka određivanja varijabli zglobova koje odgovaraju zadanom položaju i orijentaciji vrha manipulatora. Rješenje ovog problema je od fundamentalne važnosti za transformaciju kretanja vrha manipulatora iz operacijskog prostora u odgovarajući zglobovski prostor, kada se želi postići unaprijed definirano kretanje. Naime, izvršavanje zadanog kretanja se obavlja u zglobovskom prostoru, jer aktuatori (pogoni) pokreću upravo zglobove.

Jednadžba direktne kinematike u operacijskom prostoru ima oblik:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = [p_x \ p_y \ p_z \ \mathcal{G} \ \varphi \ \psi]^T, \quad (2.21)$$

gdje je položaj robota određen sa (p_x, p_y, p_z) i njegova orijentacija sa Eulerovim uglovima $(\mathcal{G}, \varphi, \psi)$.

Vektor \mathbf{r} se naziva vektor vanjskih koordinata. Iz ovog vektora je vidljivo dobro poznato pravilo da robot mora imati najmanje šest stupnjeva slobode kretanja, od kojih su posljednja tri rotacije, da bi zauzeo proizvoljni položaj i orijentaciju u prostoru.

Osim vektora vanjskih koordinata definira se i vektor unutrašnjih ili upravljanih koordinata koji predstavljaju rotacije i translacije u pojedinim stupnjevima slobode kretanja. Zbog toga će njihov broj biti jednak broju stupnjeva slobode kretanja kojih, kao što je već naznačeno, treba biti šest. Vektor unutrašnjih koordinata je ustvari vektor konfiguracije manipulatora \mathbf{q} :

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T. \quad (2.22)$$

Vrlo je često dimenzija vektora \mathbf{q} manja od šest, što fizikalno znači da se robot ne može proizvoljno orijentirati u prostoru, već je orijentacija djelomično ili potpuno uvjetovana njegovim položajem.

Kinematički model robota pretpostavlja poznavanje veza između vektora unutrašnjih i vektora vanjskih koordinata.

Ako su dimenzije vektora \mathbf{r} i \mathbf{q} jednake, riječ je o neredudantnom robotu i postoji konačan skup rješenja inverznog kinematičkog problema. Ako se na upravljane koordinate nametnu ograničenja, koja slijede iz same konstrukcije robota, tada je rješenje inverznog kinematičkog problema za neredudantne robote jednoznačno.

Ako je dimenzija vektora \mathbf{r} veća od dimenzije vektora \mathbf{q} riječ je o kinematički redudantnom robotu i rješenje inverznog kinematičkog problema nije jednoznačno. Naime, rješenja ima bekonačno mnogo, a između njih se odabire jedno, koje je po zadanom kriteriju najpovoljnije. Zbog teškoća s odabirom najpovoljnijeg rješenja većina robota je neredudantna.

Problem višestrukih rješenja ovisi ne samo od broja stupnjeva pokretljivosti, nego i od broja nenulatih Denavit-Hartenbergovih parametara; što je veći broj ovakvih parametara, veći je i broj prihvatljivih rješenja. Npr., za manipulator sa 6 stupnjeva pokretljivosti bez ograničenja, u općem slučaju postoji 16 prihvatljivih rješenja. U tom slučaju su potrebni neki dodatni kriteriji za odabir iz tog skupa. Postojanje mehaničkih ograničenja na zglobovima može smanjiti broj prihvatljivih rješenja za realnu strukturu.

Dobivanje rješenja u zatvorenoj formi zahtijeva ili algebarsku intuiciju, kako bi se uočile one bitne jednadžbe koje sadrže nepoznate, ili geometrijsku intuiciju, kako bi se uočile one bitne tačke na strukturi u odnosu na koje je pogodno posmatrati položaj i orijentaciju kao funkcije manjeg broja nepoznatih.

Tamo gdje se ne može pronaći rješenje u zatvorenoj formi, primjenjuje se tehnike numeričkog rješavanja, iako one ne daju sva prihvatljiva rješenja u općem slučaju. Nedostatak numeričkog rješavanja inverznog kinematičkog problema je relativno veliko vrijeme izračunavanja, uz mogućnost divergencije postupka (ako početno rješenje nije dovoljno tačno određeno). Numeričko rješavanje ne

omogućuje prepoznavanje singularnih stanja robota i preusmjeravanje postupka računanja u odgovarajućem smjeru. To su veliki nedostaci, pa zbog toga za rješenje inverznog kinematičkog problema mnogo češće služi analitički problem izračunavanja.

Analitičko rješenje inverznog kinematičkog problema daje eksplicitne jednadžbe, koje povezuju unutrašnje i vanjske koordinate. Međutim, ono je veoma složen problem koji do danas nije riješen u općem obliku za proizvoljnu konfiguraciju robota. Analitičko rješenje u odnosu prema numeričkome ima velikih prednosti. Jedna od njih je to što izračunavanje traje mnogo kraće (zbog manjeg broja potrebnih matematičkih operacija) i do njega se uvijek sigurno dolazi. Singularna rješenja je moguće unaprijed predvidjeti i uzeti u obzir, a rješenja su (uz poštovanje ograničenja upravljanih koordinata) jednoznačna.

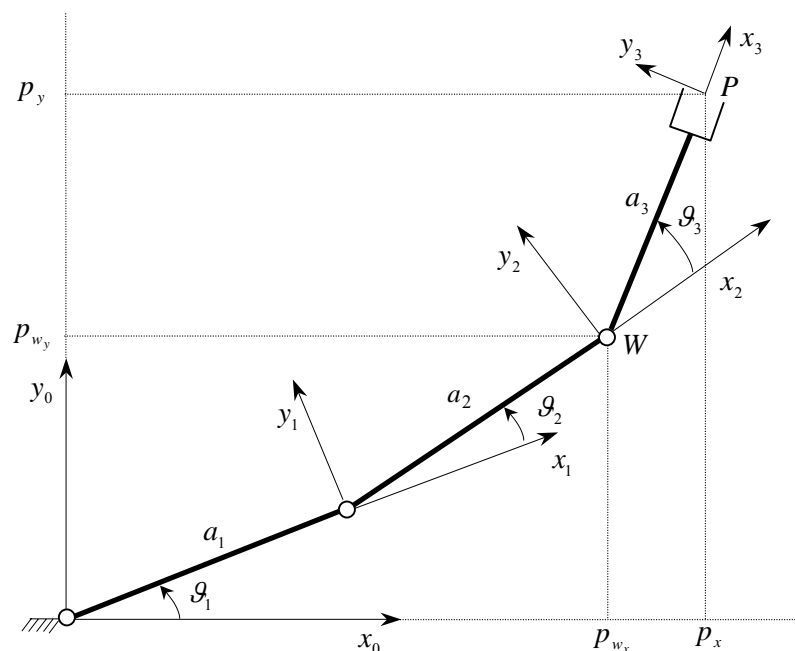
Na osnovu navedenog dolazi se do zaključka da je problem inverzne kinematike složeniji od problema direktne kinematike zbog slijedećih razloga:

- Jednadžbe su općenito nelinearne, te zbog toga nije uvijek moguće naći rješenje u zatvorenoj formi.
- Mogućnost postojanja više rješenja.
- U slučaju kinematički redundantnih manipulatora može biti beskonačno mnogo rješenja
- Moguće je da nema prihvatljivih rješenja za danu kinematičku strukturu manipulatora.

U nastavku se rješavaju primjeri inverzne kinematike za neke tipične strukture robotskih manipulatora koji se susreću u industrijskoj proizvodnji.

Primjer 1. Trosegmentna planarna ruka

Prikaz strukture manipulatora dan je na Sl. 2.13, a odgovarajuća jednadžba direktne kinematike je (2.7). Potrebno je naći varijable zglobova ϑ_1, ϑ_2 i ϑ_3 koje odgovaraju zadanom položaju i orijentaciji vrha manipulatora. Ukoliko je moguće, poželjno je specificirati položaj i orijentaciju u obliku minimalnog broja parametara: dvije koordinate p_x, p_y i ϕ sa koordinatnom osom x_0 , u ovom slučaju.



Slika 2.13. Trosegmentna planarna ruka.

Ovaj problem se može riješiti algebarskim i geometrijskim putem.

a) Algebarsko rješenje

Orijentacija vrha manipulatora je opisana slijedećom relacijom:

$$\phi = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_3, \quad (2.23)$$

koja predstavlja jednu jednadžbu sistema kojeg treba riješiti. Ukoliko ϕ nije opisan, tada je ruka redundantna i postoji beskonačno mnogo rješenja inverznog kinematičkog problema. Iz jednadžbe (2.7) dobivaju se jednadžbe :

$$\begin{aligned} p_{W_x} &= p_x - a_3 c_\phi = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ p_{W_y} &= p_y - a_3 s_\phi = a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{aligned} \quad (2.24)$$

koje opisuju položaj tačke W , tj. ishodište koordinatnog sistema 2. Položaj ovisi samo od uglova \mathcal{G}_1 i \mathcal{G}_2 . Kvadriranje i sumiranje gornjih jednadžbi daje:

$$p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2,$$

odnosno

$$c_2 = \frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}.$$

Prihvatljiva rješenja se nalaze u intervalu $-1 \leq c_2 \leq 1$. U slučaju rješenja koje ne pripada tom intervalu, zadana tačka bi se nalazila izvan dostupnog radnog prostora. Nadalje je :

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2},$$

gdje se pozitivan predznak uzima za donji položaj lakta, a negativan predznak za gornji položaj lakta (konfiguraciju) (Sl. 2.14).

Na osnovu prethodna dva izraza, ugao \mathcal{G}_2 jednak je:

$$\mathcal{G}_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2). \quad (2.25)$$

Na ovom mjestu je važno naglasiti da se iznos rotacijske upravljane koordinate uvijek traži preko funkcije arkus tangensa zbog toga što je tačnost izračunavanja arctan funkcije u cijelom području njene definicije jednaka, a pri upotrebi funkcije arcsin i arccos tačnost izračunavanja mogla bi postati problematična u okolini tačke $\pi/2$ odnosno 0. Sama funkcija arctan (odnosno Atan2) daje rješenje u intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$.

Supstitucijom \mathcal{G}_2 u jednadžbe (2.24) dobiva se sistem dvije jednadžbe sa nepoznicama s_1 i c_1 . Rješenja ovog sistema su:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{(a_1 c_1 + a_2 c_2) p_{W_y} - a_2 s_2 p_{W_x}}{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} \\ c_1 &= \frac{(a_1 c_1 + a_2 c_2) p_{W_x} + a_2 s_2 p_{W_y}}{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} \end{aligned}$$

Prema tome, ugao ϑ_1 je dan slijedećim izrazom:

$$\vartheta_1 = \text{Atan2}(s_1, c_1). \quad (2.26)$$

Konačno, ugao ϑ_3 može se izračunati iz (2-23) kao:

$$\vartheta_3 = \phi - \vartheta_1 - \vartheta_2. \quad (2.27)$$

b) Geometrijsko rješenje

Primjena kosinusnog teorema za trokut, kojeg čine segmenti a_1, a_2 i segmenta kojeg povezuju tačke W i O , daje:

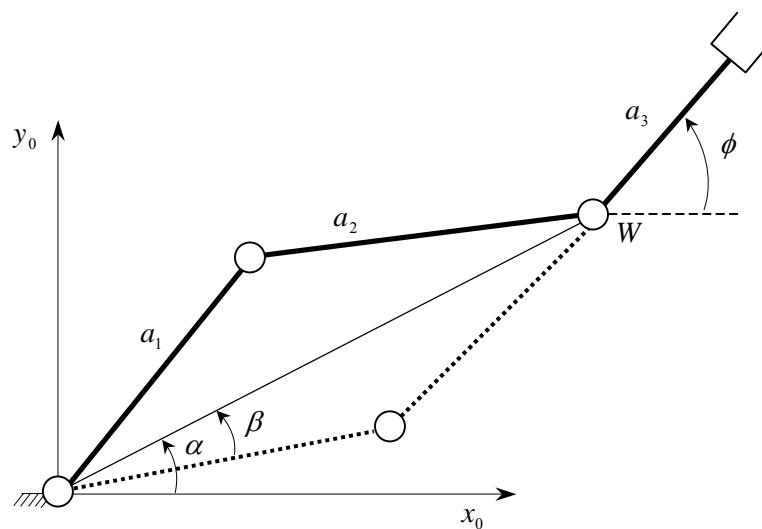
$$p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\pi - \vartheta_2),$$

odnosno dvije dopustive (prihvatljive) konfiguracije trokuta (Sl. 2.14).

Budući da je $\cos(\pi - \vartheta_2) = -\cos \vartheta_2$, slijedi :

$$c_2 = \frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2},$$

i mora vrijediti $\sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} \leq a_1 + a_2$. Uvjet nije zadovoljen kada je zadana tačka izvan dostupnog radnog prostora robotske ruke.



Slika 2.14. Prihvatljive konfiguracije dvosegmentne planarne ruke.

Na temelju postavke o prihvatljivim rješenjima dobiva se:

$$\mathcal{G}_2 = \cos^{-1}(c_2), \quad (2.28)$$

za gornji položaj lakta u intervalu $\mathcal{G}_2 \in (-\pi, 0)$, a za donji položaj u intervalu $\mathcal{G}_2 \in (0, \pi)$. Ugao α je određen komponentama p_{w_x} i p_{w_y} prema slijedećem izrazu:

$$\alpha = \text{Atan2}(p_{w_y}, p_{w_x}). \quad (2.29)$$

Primjenom kosinusnog teorema dobiva se jednadžba:

$$c_\beta \sqrt{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2} = a_1 + a_2 c_2,$$

iz koje se nakon uvrštavanja izraza za c_2 dobiva izraz za ugao β :

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1 \sqrt{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2}} \right), \quad (2.30)$$

gdje je $\beta \in (0, \pi)$, što osigurava postojanje trokuta. Na osnovu izraza (2.29) i (2.30) slijedi izraz za ugao \mathcal{G}_1 :

$$\mathcal{G}_1 = \alpha \pm \beta, \quad (2.31)$$

pri čemu se pozitivan predznak uzima za $\mathcal{G}_2 < 0$ i negativan za $\mathcal{G}_2 > 0$. Ugao \mathcal{G}_3 se dobiva iz (2.23).

Primjer 2. Sferna ruka

Potrebno je pronaći varijable zglobova $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ i d_3 za zadani položaj vrha manipulatora \mathbf{p}_w . Da bi se razdvojili varijable od kojih ovisi \mathbf{p}_w logično je izraziti položaj \mathbf{p}_w s obzirom na koordinatni sistem 1, a zatim promatrati matričnu jednadžbu:

$$(\mathbf{A}_1^0)^{-1} \mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2, \quad (2.32)$$

gdje je funkcija direktne kinematike dana u obliku:

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{T}_w^0 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{w_x} & s_{w_x} & a_{w_x} & p_{w_x} \\ n_{w_y} & s_{w_y} & a_{w_y} & p_{w_y} \\ n_{w_z} & s_{w_z} & a_{w_z} & p_{w_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

i vektor položaja vrha manipulatora u odnosu na koordinatni sistem baze:

$$\mathbf{p}_W^0 = \begin{bmatrix} p_{Wx} \\ p_{Wy} \\ p_{Wz} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Uvrštavanjem vrijednosti elemenata matrica \mathbf{A}_1^0 i \mathbf{T}_W^0 u (2.32), lijeva strana iste matrične jednadžbe postaje:

$$(\mathbf{A}_1^0)^{-1} \mathbf{T}_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_{Wx} & s_{Wx} & a_{Wx} & p_{Wx} \\ n_{Wy} & s_{Wy} & a_{Wy} & p_{Wy} \\ n_{Wz} & s_{Wz} & a_{Wz} & p_{Wz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prva tri retka četvrtog stupca produkta gornjih matrica daju vektor pozicije vrha manipulatora u odnosu na koordinatni sistem 1:

$$\mathbf{p}_W^1 = \begin{bmatrix} p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1 \\ -p_{Wz} \\ -p_{Wx}s_1 + p_{Wy}c_1 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Analognim postupkom, za desnu stranu matrične jednadžbe (2.32) dobiva se:

$$\mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

i

$$\mathbf{p}_W^1 = \begin{bmatrix} d_3 s_2 \\ -d_3 c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Izjednačavanjem izraza za vektor \mathbf{p}_W^1 u oba slučaja, imamo:

$$\mathbf{p}_W^1 = \begin{bmatrix} p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1 \\ -p_{Wz} \\ -p_{Wx}s_1 + p_{Wy}c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 s_2 \\ -d_3 c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Prema tome, vektor pozicije p_w^1 ovisi samo o varijablama \mathcal{G}_2 i d_3 . Da bi se riješila jednačba (2.36), uvodi se smjena:

$$t = \tan \frac{\mathcal{G}_1}{2},$$

odnosno

$$c_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad s_1 = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Uvođenjem gornjih smjena u treći redak lijeve strane jednačbe (2.36), dobiva se slijedeća kvadratna jednačba:

$$(d_2 + p_{wy})t^2 + 2p_{wx}t + d_2 - p_{wy} = 0$$

čije je rješenje

$$t = \frac{-p_{wx} \pm \sqrt{p_{wx}^2 + p_{wy}^2 - d_2^2}}{d_2 + p_{wy}}.$$

Dva rješenja odgovaraju dvjema različitim konfiguracijama. Ako je diskriminanta negativna, rješenje jednačbe nije prihvatljivo (dopustivo). Slijedi da je:

$$\mathcal{G}_1 = 2\text{Atan2}(-p_{wx} \pm \sqrt{p_{wx}^2 + p_{wy}^2 - d_2^2}, d_2 + p_{wy}). \quad (2.37)$$

Dijeljem prve i druge komponente na obje strane matrične jednačbe (2.36) dobiva se:

$$\frac{p_{wx}c_1 + p_{wy}s_1}{-p_{wz}} = \frac{d_3s_2}{-d_3c_2},$$

a na osnovu toga i izraz za varijablu drugog zgloba \mathcal{G}_2 :

$$\mathcal{G}_2 = \text{Atan2}(p_{wx}c_1 + p_{wy}s_1, p_{wz}). \quad (2.38)$$

Kvadriranje i sumiranje prve dvije komponente objiju strana (2.36) daje:

$$(p_{wx}c_1 + p_{wy}s_1)^2 + p_{wz}^2 = (d_3s_2)^2 + (-d_3c_2)^2,$$

odnosno

$$d_3 = \sqrt{(p_{wx}c_1 + p_{wy}s_1)^2 + p_{wz}^2}, \quad (2.39)$$

gdje je prihvatljivo samo rješenje $d_3 > 0$.

Primjer 3. Antropomorfna ruka

Antropomorfna struktura manipulatora (antropomorfna ruka) prikazana je na Sl. 2.7. Potrebno je pronaći varijable zglobova $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ i \mathcal{G}_3 za zadani položaj vrha manipulatora \mathbf{p}_W . Analogno prethodnom primjeru rješava se slijedeća jednačba :

$$(\mathbf{A}_1^0)^{-1} \mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2, \quad (2.40)$$

Lijeva strana gornje jednačbe postaje:

$$(\mathbf{A}_1^0)^{-1} \mathbf{T}_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_{Wx} & s_{Wx} & a_{Wx} & p_{Wx} \\ n_{Wy} & s_{Wy} & a_{Wy} & p_{Wy} \\ n_{Wz} & s_{Wz} & a_{Wz} & p_{Wz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vektor položaja vrha manipulatora u odnosu na koordinatni sistem 1 je:

$$\mathbf{p}_W^1 = \begin{bmatrix} p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1 \\ p_{Wz} \\ p_{Wx}s_1 - p_{Wy}c_1 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Analognim postupkom, za desnu stranu matrične jednačbe (2.36) dobiva se:

$$\mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

i

$$\mathbf{p}_W^1 = \begin{bmatrix} a_3c_{23} + a_2c_2 \\ a_3s_{23} + a_2s_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Izjednačavanje izraza (2.41) i (2.42) daje:

$$\mathbf{p}_W^1 = \begin{bmatrix} p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1 \\ p_{Wz} \\ p_{Wx}s_1 - p_{Wy}c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3c_{23} + a_2c_2 \\ a_3s_{23} + a_2s_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Na osnovu jednadžbe (2.43) dobiva se izraz za ugao \mathcal{G}_1 :

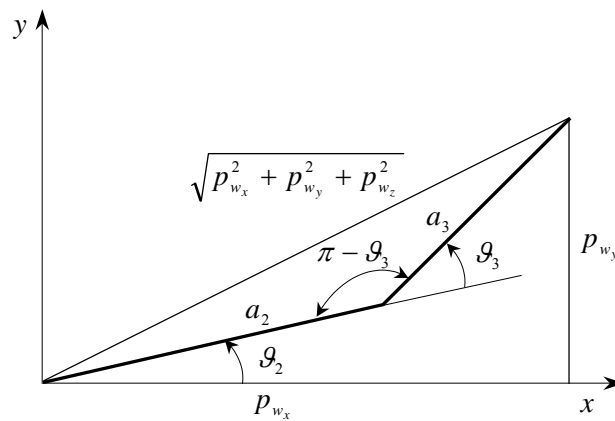
$$\mathcal{G}_1 = \text{Atan2}(p_{w_y}, p_{w_x}). \quad (2.44)$$

Drugo prihvatljivo rješenje je:

$$\mathcal{G}_1 = \pi + \text{Atan2}(p_{w_y}, p_{w_x}), \quad (2.45)$$

uz uvjet da se \mathcal{G}_2 može promijeniti $\pi - \mathcal{G}_2$.

Struktura manipulatora koja sadrži zglobove 2 i 3 jest dvosegmentna, s tim da referentni zglob rotira oko z_0 osi. Za dobivanje ugla \mathcal{G}_3 primjenjuje se kosinusni teorem, kako je to prikazano na Sl. 2.15.



Slika 2.15. Primjena kosinusnog teorema kod dvosegmentne planarne ruke.

Rezultat primjene kosinusnog teorema je:

$$p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 + p_{w_z}^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3 \cos(\pi - \mathcal{G}_3) = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3c_3,$$

iz kojeg se direktno računa izraz za ugao \mathcal{G}_3 :

$$c_3 = \frac{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 + p_{w_z}^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}, \quad s_3 = \pm\sqrt{1 - c_3^2},$$

$$\mathcal{G}_3 = \text{Atan2}(s_3, c_3) \quad (2.46)$$

Komponenta vektora položaja vrha maipulatora duž z osi ima oblik:

$$p_{w_z} = a_3s_{23} + a_2s_2.$$

Ovaj izraz može se nadalje napisati kao:

$$\begin{aligned} p_{w_z} &= (a_2 + a_3 c_3) s_2 + a_3 c_2 s_3 \\ p_{w_z} - (a_2 + a_3 c_3) s_2 &= a_3 c_2 s_3 \end{aligned}$$

kvadriranjem lijeve i desne strane gornje jednadžbe, te daljnjim sređivanjem izraza dobiva se kvadratna jednadžba po s_2 :

$$s_2^2 - \frac{2p_{w_z}(a_2 + a_3 c_3)}{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 + p_{w_z}^2} s_2 + \frac{(p_{w_z}^2 - a_3^2 s_3^2)}{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 + p_{w_z}^2} = 0.$$

Rješenje gornje kvadratne jednadžbe je:

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{(a_2 + a_3 c_3) p_{w_z} - a_3 s_3 \sqrt{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2}}{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 + p_{w_z}^2} \\ c_2 &= \frac{(a_2 + a_3 c_3) \sqrt{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2} + a_3 s_3 p_{w_z}}{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 + p_{w_z}^2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2) \quad (2.47)$$

Može se prepoznati da postoje četiri rješenja s obzirom na vrijednosti varijabli \mathcal{G}_1 , \mathcal{G}_2 i \mathcal{G}_3 . Ova rješenja odgovaraju slijedećim konfiguracijama manipulatora:

1. položaj ramena desno, lakat gore
2. položaj ramena desno, lakat dole
3. položaj ramena lijevo, lakat gore
4. položaj ramena lijevo, lakat dole.

Važno je napomenuti da je moguće pronaći rješenje ako i samo ako vrijedi:

$$p_{w_x} \neq 0 \quad p_{w_y} \neq 0.$$

U slučaju da je $p_{w_x} = p_{w_y} = 0$, beskonačno mnogo rješenja postoji, jer je moguće varijable zglobova \mathcal{G}_2 i \mathcal{G}_3 neovisno o vrijednosti varijable \mathcal{G}_1 . U narednom poglavlju vidjet će se da je takva konfiguracija kinematički singularna.

Primjer 4. Četvosegmentni manipulator sferne strukture

Jednadžba direktne kinematike ovog robota dana je izrazom:

$$\mathbf{T}_4^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 \mathbf{A}_4^3. \quad (2.48)$$

Množenjem te jednadžbe sa $(\mathbf{A}_1^0)^{-1}$ dobiva se:

$$(\mathbf{A}_1^0)^{-1} \mathbf{T}_4^0 = \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 \mathbf{A}_4^3. \quad (2.49)$$

Lijeva strana jednadžbe (2.45) iznosi:

$$(\mathbf{A}_1^0)^{-1} \mathbf{T}_4^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

gdje je vektor položaja vrha manipulatora u odnosu na koordinatni sistem 1 manipulatora jednak:

$$\mathbf{p}_W^1 = \begin{bmatrix} p_x c_1 + p_y s_1 \\ -p_x s_1 + p_y c_1 \\ p_z \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Desna strana jednadžbe (2.49) iznosi:

$$\mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 \mathbf{A}_4^3 = \begin{bmatrix} c_{24} & 0 & s_{24} & s_2(l_3 + d_3) + s_{24}l_4 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ -s_{24} & 0 & c_{24} & l_1 + c_2(l_3 + d_3) + c_{24}l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Izjednačavanjem elementa [2,4] matrice (2.52) i elementa [2,1] vektora (2.51) dobije se:

$$-p_x s_1 + p_y c_1 = l_2, \quad (2.53)$$

što je algebarska jednadžba s jednom nepoznanicom. Za njezino rješavanje uvodi se slijedeća supstitucija:

$$\begin{aligned} p_x &= d \cos(\alpha) \\ p_y &= d \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (2.54)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} d &= +\sqrt{p_x^2 + p_y^2} \\ \alpha &= \text{atan2}(p_y, p_x) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Supstitucijom jednadžbi (2.54) u jednadžbu (2.53) dobiva se:

$$\sin(\alpha)c_1 - \cos(\alpha)s_1 = l_2/d$$

odnosno,

$$\sin(\alpha - \vartheta_1) = l_2/d.$$

Kosinus argumenta $(\alpha - \vartheta_1)$ tada je:

$$\cos(\alpha - \vartheta_1) = \pm\sqrt{1 - (l_2/d)^2}$$

tako da se može pisati:

$$\tan(\alpha - \vartheta_1) = \frac{l_2}{\pm\sqrt{d^2 - l_2^2}} = \frac{l_2}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - l_2^2}}, \quad (2.56)$$

gdje predznak - ispred korijena označava tzv. lijevoramenu konfiguraciju, a znak + tzv. desnoramenu konfiguraciju sfernog robota. Budući da je zadani robot desnorameni (Sl. 2.12), u nastavku će se podrazumijevati predznak + ispred korijena jednadžbe (2.56). Rješavanjem jednadžbe (2.56) i uvrštavanjem (2.55) slijedi konačno rješenje za prvu upravljaju koordinatu u obliku:

$$\vartheta_1 = A \tan 2(p_y, p_x) - A \tan 2\left(l_2, \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - l_2^2}\right). \quad (2.57)$$

Rješenje za ϑ_1 može se dobiti i na druge načine. Izjednačavanjem elementa [2,3] jednadžbe (2.49) dobiva se:

$$\vartheta_1 = A \tan 2(a_y, a_x) \quad (2.58)$$

a izjednačavanjem elementa [2,1] jednadžbe (2.45) dobije se:

$$\vartheta_1 = A \tan 2(n_y, n_x) \quad (2.59)$$

Sve tri dobivene jednadžbe za izračunavanje upravljane koordinate ϑ_1 moraju dati isto rješenje. Zbog praktičnog razloga preglednosti obično se odabiru jednadžbe (ako je moguće) koje ovise o vektoru vanjskih koordinata \mathbf{r} .

Izjednačavanjem elementa [1,1], a zatim elementa [3,1] jednadžbe (2.49) dobiju se dvije jednadžbe:

$$c_{24} = c_1 n_x + s_1 n_y$$

$$s_{24} = -n_z$$

odakle slijedi:

$$\vartheta_{24} = A \tan 2(-n_z, c_1 n_x + s_1 n_y) \quad (2.60)$$

Međutim, ugao ϑ_{24} , izražen vektorom vanjskih koordinata glasi:

$$\vartheta_{24} = \varphi \quad (2.61)$$

što je jednostavnija i praktičnija jednadžba. Izjednačavanjem elementa [1,4], a zatim elementa [3,4] jednadžbe (2.49) slijedi:

$$\begin{aligned}c_1 p_x + s_1 p_y &= s_2(l_3 + d_3) + s_{24} l_4 \\ p_z &= l_1 + c_2(l_3 + d_3) + c_{24} l_4\end{aligned}$$

Ako se iz prve jednadžbe izrazi s_2 , a iz druge c_2 , dobiva se:

$$\begin{aligned}s_2 &= \frac{c_1 p_x + s_1 p_y - s_{24} l_4}{l_3 + d_3} \\ c_2 &= \frac{p_z - l_1 - c_{24} l_4}{l_3 + d_3}\end{aligned}$$

odakle slijedi:

$$\mathcal{G}_2 = A \tan 2(c_1 p_x + s_1 p_y - s_{24} l_4, p_z - l_1 - c_{24} l_4) \quad (2-62)$$

Koordinata \mathcal{G}_2 jednoznačno je definirana ako se prihvati podatak da se nalazi na intervalu $[0, \pi]$, što određuje konstrukcija robota. Četvrta upravljana koordinata može se odrediti prema jednadžbama (2.61) i (2.62) na slijedeći način:

$$\mathcal{G}_4 = \mathcal{G}_{24} - \mathcal{G}_2 = \varphi - \mathcal{G}_2 \quad (2.63)$$

Upravljana kordinata \mathcal{G}_3 mogla bi se izračunati izjednačavanjem elemenata [1,4] ili [3,4] jednadžbe (2.49). Međutim, u oba bi slučaja bilo potrebno obaviti dijeljenje trigonometrijskom funkcijom $\sin(\mathcal{G}_2)$ ili $\cos(\mathcal{G}_2)$. Da se to izbjegne matrica (2.49) množi se matricom $(A_2^1)^{-1}$ s lijeve strane. Dobije se da je:

$$(A_2^1)^{-1} (A_1^0)^{-1} A_4^0 = A_3^2 A_4^3 \quad (2.64)$$

gdje su matrice $(A_2^1)^{-1}$ i $A_3^2 A_4^3$ jednake:

$$(A_2^1)^{-1} = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & l_1 s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & -l_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 A_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & s_4 l_4 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ -s_4 & 0 & c_4 & l_3 + d_3 + c_4 l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Izjednačavanjem elemenata [3,4] jednadžbe (2.64) slijedi:

$$s_2(c_1 p_x + s_1 p_y) + c_2 p_z - c_2 l_1 = c_4 l_4 + d_3 + l_3$$

odakle se može izračunati upravljana koordinata d_3 kao:

$$d_3 = s_2(c_1 p_x + s_1 p_y) + c_2(p_z - l_1) - c_4 l_4 - l_3 \quad (2.65)$$

čime je inverzni kinematički problem riješen.

Primjer 5. Stanford manipulator

Jednadžba direktne kinematike Stanford manipulatora dana je sa:

$$\mathbf{T}_6^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(\mathcal{G}_1)\mathbf{A}_2^1(\mathcal{G}_2)\mathbf{A}_3^2(d_3)\mathbf{A}_4^3(\mathcal{G}_4)\mathbf{A}_5^4(\mathcal{G}_5)\mathbf{A}_6^5(\mathcal{G}_6). \quad (2.66)$$

Za ovakvu strukturu manipulatora postoji rješenje u zatvorenoj formi za odgovarajući položaj vrha manipulatora. Jednadžba (2.66) može se napisati u mnogo različitih formi (oblika).

Ukoliko sa W označimo ishodište koordinatnog sistema vrha sferne ruke, tada vrijedi:

$$\mathbf{T}_w^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2. \quad (2.7)$$

Množenjem obje strane gornje jednadžbe slijeva matricom $(\mathbf{A}_1^0)^{-1}$ dobiva se drugi oblik iste:

$$(\mathbf{A}_1^0)^{-1} \mathbf{T}_w^0 = \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 \quad (2.68)$$

Vektor položaja vrha sferne ruke u odnosu na koordinatni sistem 1 manipulatora, nakon uvrštavanja matrica homogenih transformacija u (2.68), uzimajući u obzir lijevu stranu jednadžbe je:

$$\mathbf{p}_w^1 = \begin{bmatrix} p_{wx}c_1 + p_{wy}s_1 \\ -p_{wz} \\ -p_{wx}s_1 + p_{wy}c_1 \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

a za desnu stranu iste jednadžbe:

$$\mathbf{p}_w^1 = \begin{bmatrix} d_3 s_2 \\ -d_3 c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} p_{wx} &= p_x - d_6 a_x \\ p_{wy} &= p_y - d_6 a_y \\ p_{wz} &= p_z - d_6 a_z \end{aligned}$$

i p_x , p_y i p_z su komponente vektora položaja vrha manipulatora u odnosu na koordinatni sistem baze.

Izjednačavanjem izraza (2.69) i (2.70) dobiva se sistem tri jednačbe sa tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} d_3 s_2 &= p_{wx} c_1 + p_{wy} s_1 \\ -d_3 c_2 &= -p_{wz} \\ d_2 &= -p_{wx} s_1 + p_{wy} c_1 \end{aligned} \quad (2.71)$$

Da bi se riješile ove jednačbe uvodi se smjena:

$$t = \tan \frac{\mathcal{G}_1}{2},$$

odnosno

$$c_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad s_1 = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Uvođenjem gornjih smjena u treću jednačbu (2.71), nastaje kvadratna jednačba:

$$(d_2 + p_{wy})t^2 + 2p_{wx}t + d_2 - p_{wy} = 0$$

čije je rješenje

$$t = \frac{-p_{wx} \pm \sqrt{p_{wx}^2 + p_{wy}^2 - d_2^2}}{d_2 + p_{wy}}.$$

Slijedi da je:

$$\mathcal{G}_1 = 2\text{Atan2}(-p_{wx} \pm \sqrt{p_{wx}^2 + p_{wy}^2 - d_2^2}, d_2 + p_{wy}). \quad (2.72)$$

Za postojanje (egzistenciju) rješenja izraz ispod korjena mora biti pozitivan. U slučaju negativnog predznaka rješenje ne postoji, odnosno, vrha manipulatora je izvan dostupnog radnog prostora.

Dijeljenjem obje strane prve i druge jednačbe (2.71) dobiva se:

$$\mathcal{G}_2 = \text{Atan2}(p_{wx}c_1 + p_{wy}s_1, p_{wz}). \quad (2.73)$$

Varijabla d_3 može se dobiti iz sume kvadrata prve i druge jednačbe (2.71):

$$d_3 = \pm \sqrt{(p_{wx}c_1 + p_{wy}s_1)^2 + p_{wz}^2},$$

pri čemu su prihvatljiva samo pozitivna rješenja $d_3 > 0$.

Polazna jednačba direktne kinematike (2.66) može se transformirati u slijedeći oblik :

$$[A_1^0 A_2^1 A_3^2]^{-1} T = A_4^3 A_5^4 A_6^5, \quad (2.74)$$

pri čemu obje strane jednačbe određuju položaj i orijentaciju vrha manipulatora u odnosu na treći koordinatni sistem. Lijeva strana (2.74) je poznata budući da su varijable \mathcal{G}_1 , \mathcal{G}_2 i d_3 prethodno određene.

Ako lijevu stranu iste jednadžbe označimo sa

$$\mathbf{T}' = [\mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2]^{-1} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_{x'} & s_{x'} & a_{x'} & p_{x'} \\ n_{y'} & s_{y'} & a_{y'} & p_{y'} \\ n_{z'} & s_{z'} & a_{z'} & p_{z'} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

i pomnožimo slijeva matricom $(\mathbf{A}_4^3)^{-1}$, dobiva se:

$$(\mathbf{A}_4^3)^{-1} \mathbf{T}' = \begin{bmatrix} n_{x'}c_4 + n_{y'}s_4 & s_{x'}c_4 + s_{y'}s_4 & a_{x'}c_4 + a_{y'}s_4 & p_{x'}c_4 + p_{y'}s_4 \\ -n_{z'} & -s_{z'} & -a_{z'} & -p_{z'} \\ -n_{x'}s_4 + n_{y'}c_4 & -s_{x'}s_4 + s_{y'}c_4 & -a_{x'}s_4 + a_{y'}c_4 & -p_{x'}s_4 + p_{y'}c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

Produkt $\mathbf{A}_5^4 \mathbf{A}_6^5$ ima slijedeći oblik:

$$\mathbf{A}_5^4 \mathbf{A}_6^5 = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & s_5 & d_6s_5 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & -c_5 & -d_6c_5 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.77)$$

Matrice (2.76) i (2.77) moraju imati elemente s istim vrijednostima na odgovarajućim mjestima. Usporedba elemenata [3,3] gornjih matrica daje direktno vrijednost ugla \mathcal{G}_4 :

$$\begin{aligned} -a_{x'}s_4 + a_{y'}c_4 &= 0 \\ \mathcal{G}_4 &= \text{Atan2}(a_{y'}, a_{x'}) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Iz elemenata [1,3] i [2,3] dobiva se \mathcal{G}_5 :

$$\begin{aligned} a_{x'}c_4 + a_{y'}s_4 &= s_5 \\ -a_{z'} &= c_5 \\ \mathcal{G}_5 &= \text{Atan2}(a_{x'}c_4 + a_{y'}s_4, a_{z'}) \end{aligned} \quad (2.79)$$

gdje su c_4 i s_4 prethodno izračunati u (2.78).

Na potpuno identičan način se dobiva \mathcal{G}_6 iz elemenata [3,1] i [3,2]:

$$\begin{aligned} -n_{x'}s_4 + n_{y'}c_4 &= s_6 \\ -s_{x'}s_4 + s_{y'}c_4 &= c_6 \\ \mathcal{G}_6 &= \text{Atan2}(-n_{x'}s_4 + n_{y'}c_4, -s_{x'}s_4 + s_{y'}c_4) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Ovim je postupak dobivanja varijabli zglobova završen.