Lekcija 3: *Adaptivno upravljanje s referentnim modelom (MRAC)*

Prof.dr.sc. Jasmin Velagić
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

Kolegij: Adaptivno i robusno upravljanje

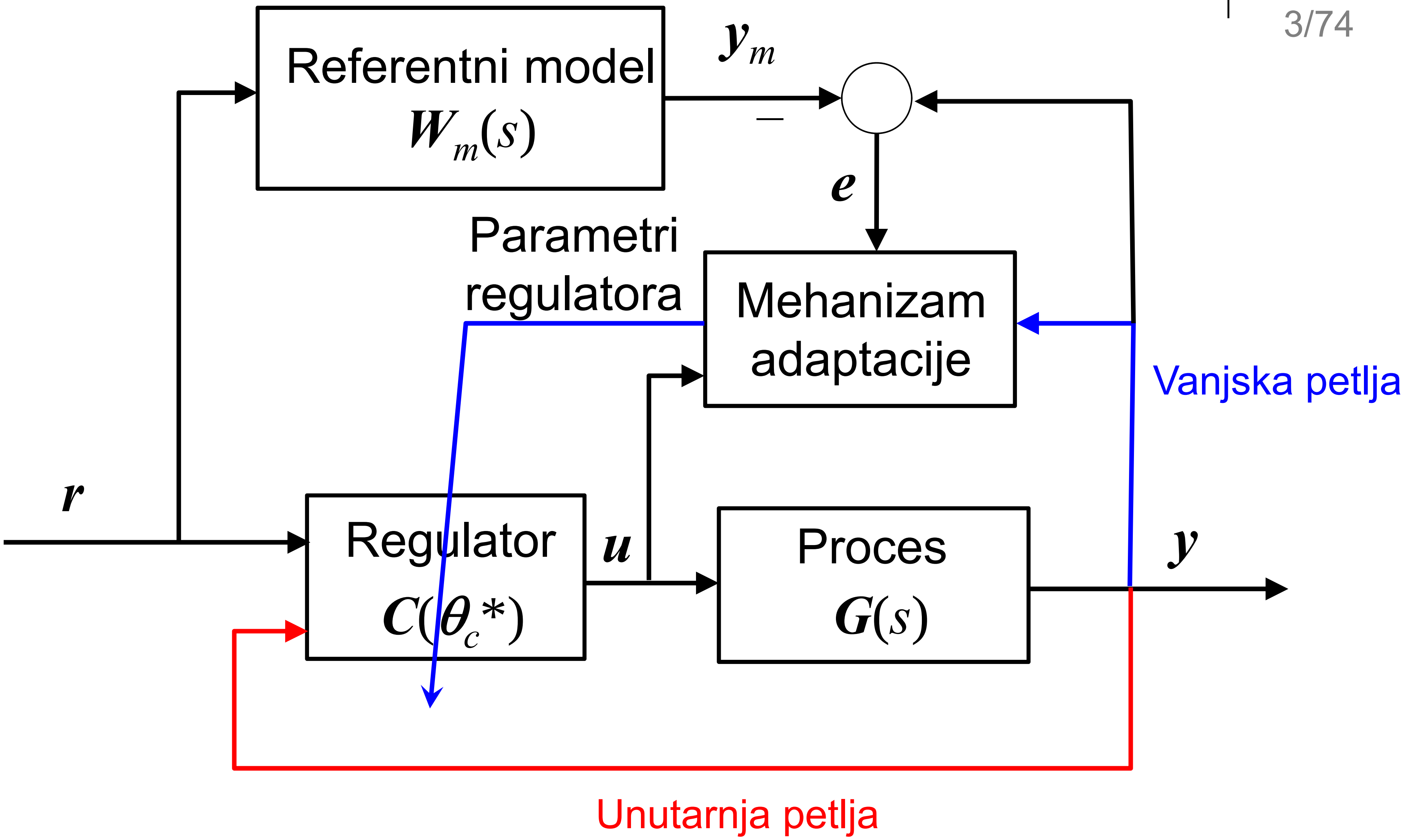
2012/2013

Uvod

- **MRAC (Model Reference Adaptive Control)** –koristi se za rješavanje problema u kojem su **specificirane performanse dane u obliku referentnog modela**.
- Referentni model iskazuje kako izlaz procesa treba idealno da se odaziva na upravljački signal.
- Adaptivni regulator posjeduje dvije petlje:
  1) **Unutarnja petlja** sadrži regulator i proces.
  2) **Vanjska petlja** podešava parametre regulatora tako da pogreška, razlika izlaza procesa y i izlaza modela y_m, bude malog iznosa.
- Originalno uveden za potrebe upravljanja avionom, gdje referentni model opisuje željeni odziv letjelice na kretanja palice (joystick).
- Originalno izveden za determinističke vremenski kontinuirane sisteme.

Uvod

- **MRAC arhitektura**



Uvod

- MRAC se može iskoristiti i za upravljanje vremenski diskretnih i sistema sa stohastičkim poremećajima.
- Mehanizam podešavanja (namještanja) parametara u MRAC-u može se postići na dva načina:
  - **Upotrebom gradijentne metode.**
  - **Primjenom teorije stabilnosti.**

MIT pravilo

- Promatra se zatvoreni sistem upravljanja kod kojeg regulator ima jedan podesivi parametar θ.
- Neka e označava pogrešku između željenog y_m i stvarnog y odziva sistema.
- Jedan od načina podešavanja parametara – **minimiziranje kriterijske funkcije** (J je funkcional):

$$\boxed{J(\theta) = \frac{1}{2}e^2}$$

- Da bi se ovo postiglo potrebno je mijenjati parametre u smjeru negativnog gradijenta od J:

$$\boxed{\frac{\partial\theta}{dt} = -\gamma\frac{\partial J}{\partial\theta} = -\gamma e\frac{\partial e}{\partial\theta}} \qquad (1)$$

MIT pravilo

- Prethodni izraz predstavlja **MIT pravilo**.
- Pretpostavlja se da se parametri mijenjaju mnogo sporije od promjenjivih sistema tako da se J promatra kao funkcija, tada se $\partial e/\partial t$ može evaluirati pod pretpostavkom da je θ konstantno.
- Parcijalna derivacija $\partial e/\partial t$ naziva se **derivacijom osjetljivosti** – određuje se preko **funkcija osjetljivosti**.
- Postoji mnogo alternativa za kriterijsku funkciju J.
- Prvi MRAS koristio je sljedeću funkciju:

$$\boxed{J(\theta) = |e|}$$

MIT pravilo

- Korištenjem gradijentne metode dobiva se:

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial e}{\partial \theta} \operatorname{sign}(e)}$$

- Postoje mnoge druge mogućnosti, kao naprimjer:

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{dt} = -\gamma \operatorname{sign}\left(\frac{\partial e}{\partial \theta}\right) \operatorname{sign}(e)}$$

- Ovaj algoritam je poznat pod imenom **sign-sign** algoritam (koristi se dosta u telekomunikacijama).
- Jednadžba (1) može se koristiti za podešavanje većeg broja parametara – tada imamo vektor Θ.

MIT pravilo

- **Primjer 1**. Promatrajmo sistem prvog reda:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = -ay + bu}$$

gdje je u upravljačka varijabla i y je mjereni izlaz.

- Pretpostavimo da želimo dobiti zatvoreni sistem (referentni model) dan sa:

$$\boxed{\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m u_c}$$

- Neka se koristi regulator:

$$\boxed{u(t) = \theta_1 u_c(t) - \theta_2 y(t)}$$

MIT pravilo

- Parametri regulatora mogu biti izabrani u skladu sa zahtjevom perfektnog slijeđenja:

$$\theta_1 = \theta_1^0 = \frac{b_m}{b} \qquad (2)$$

$$\theta_2 = \theta_2^0 = \frac{a_m - a}{b}$$

- Da bi se primijenilo MIT pravilo definira se pogreška:

$$\boxed{e = y - y_m}$$

gdje je y izlaz zatvorenog sistema.

- Kombiniranjem prethodnih izraza dobiva se:

$$\boxed{y = \frac{b\theta_1}{s + a + b\theta_2}}$$

$s = d/dt$ – diferencijalni operator

MIT pravilo

- **Derivacije osjetljivosti** dobivaju se pomoću parcijalnih derivacija s obzirom na parametre regulatora θ_1 i θ_2:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial \theta_1} &= \frac{b}{s+a+b\theta_2} u_c \\ \frac{\partial e}{\partial \theta_2} &= -\frac{b^2\theta_1}{(s+a+b\theta_2)^2} u_c = -\frac{b}{s+a+b\theta_2} y \end{aligned}} \qquad (3)$$

- Izrazi (3) ne mogu se direktno primijeniti jer su parametri a i b nepoznati – potrebna je aproksimacija.
- Jedna od mogućih aproksimacija zasniva se na observaciji da je:

$$s+a+b\theta_2^0 = s+a_m$$

MIT pravilo

- U ovom slučaju parametri osiguravaju perfektno praćenje.
- Zbog toga ćemo koristiti aproksimaciju:

$$\boxed{s + a + b\theta_2 \approx s + a_m}$$

koja je opravdana kada su parametri blizu svojim korektnim vrijednostima.

- Sa ovom aproksimacijom imamo:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -\gamma\left(\frac{a_m}{s + a_m} u_c\right)e$$

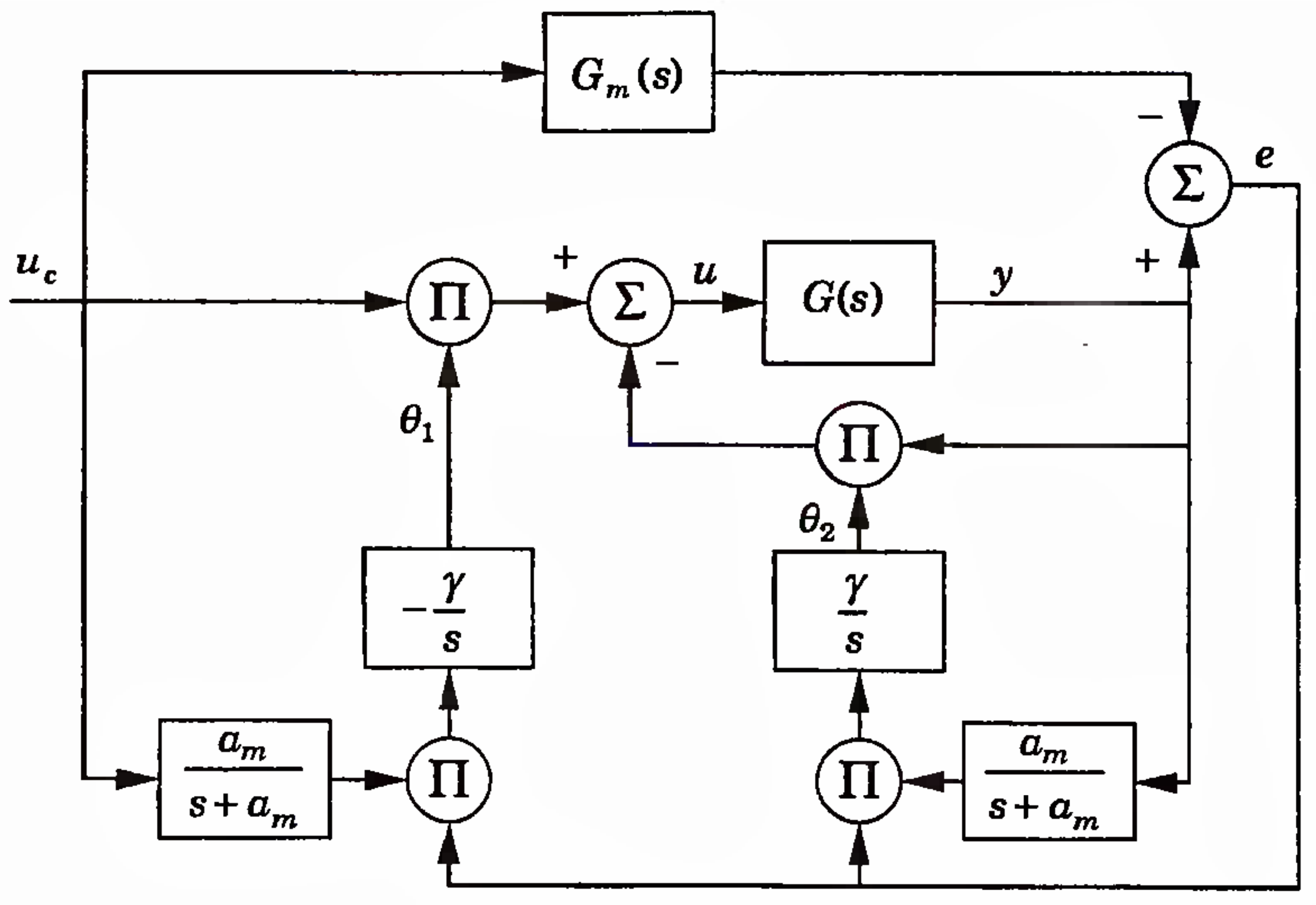
$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \gamma\left(\frac{a_m}{s + a_m} y\right)e \qquad (4)$$

MIT pravilo

- U jednadžbama (4) kombinirani su parametri b i a_m sa adaptacijskim pojačanjem γ', budući da se oni pojavljuju kao produkt $\gamma' b/a_m$ ($\gamma = \gamma' b/a_m$).
- Predznak parametra b mora biti poznat da bi se imao ispravan predznak od γ.
- Adaptivni regulator je dinamički sistem sa pet varijabli stanja: izlaz modela, parametri i derivacije osjetljivosti.
- Blok dijagram regulatora u adaptivnom sistemu s referentnim modelom prikazan je na sljedećem slajdu.
- Ponašanje prikazanog sistema testirat će se simulacijom.

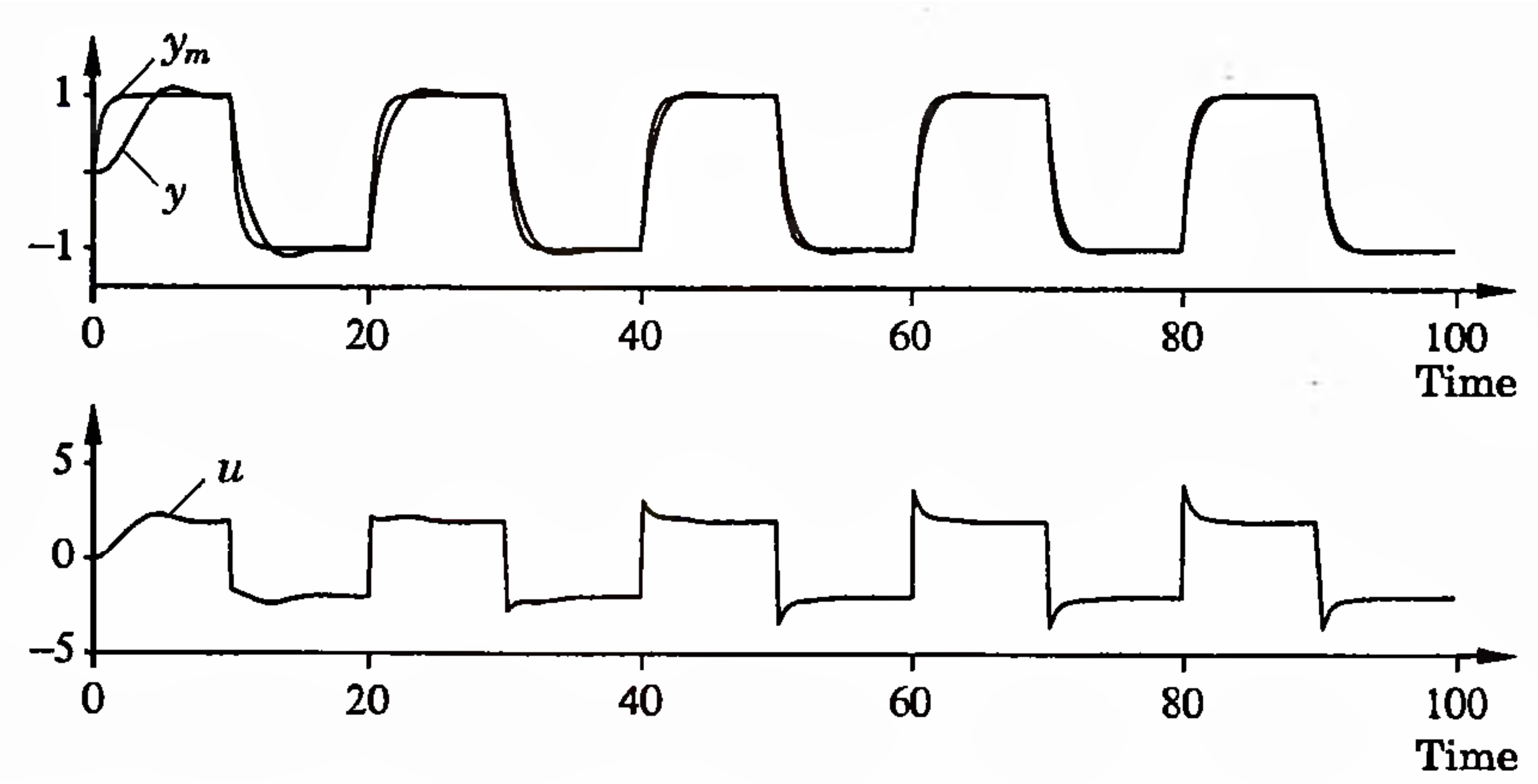
MIT pravilo

- Promatra se sistem sa vrijednostima parametara: $a = 1$, $b = 0.5$ i $a_m = b_m = 2$, $\gamma = 1$.



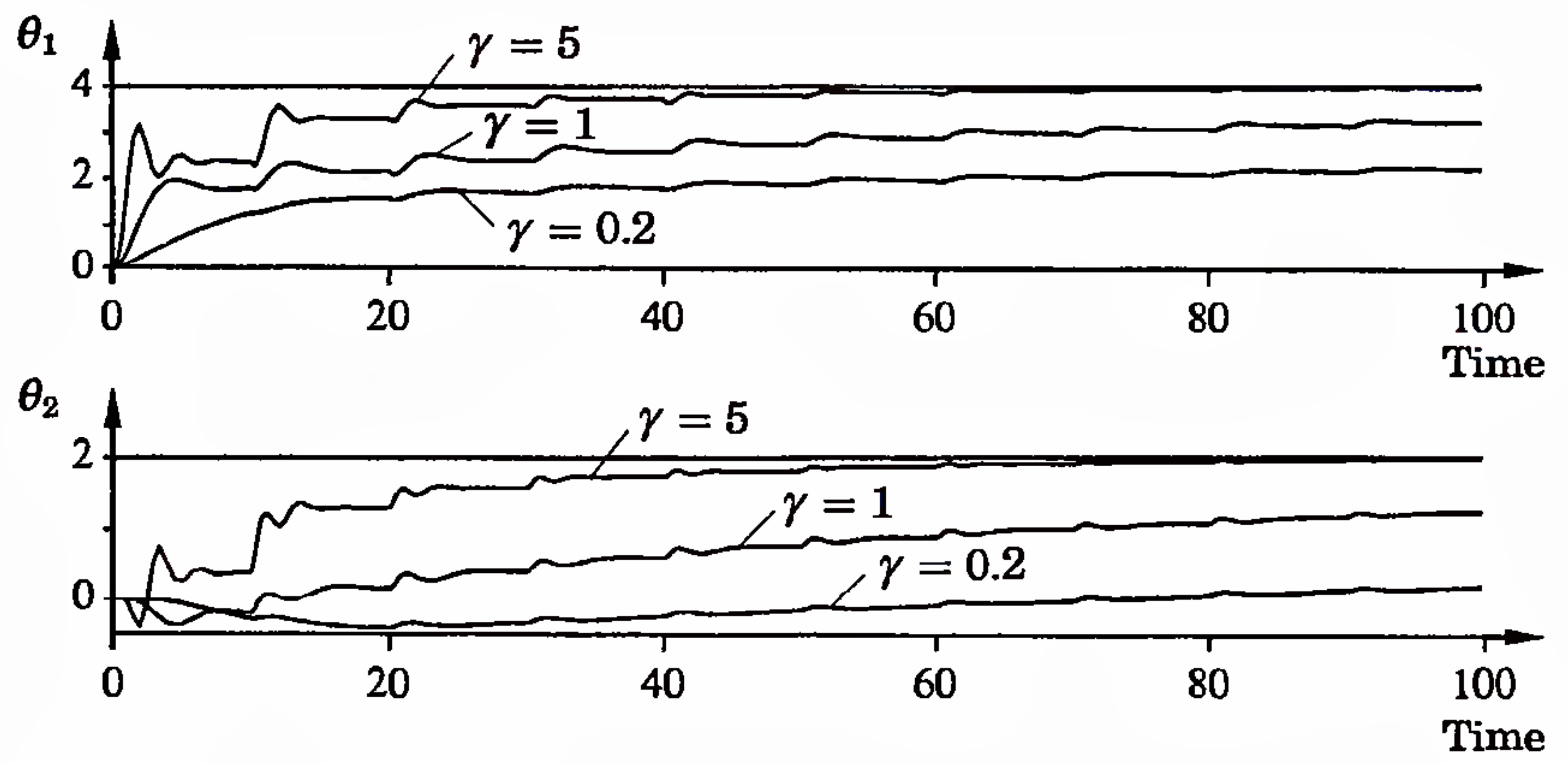
MIT pravilo

- Odzivi izlaza referentnog modela y_m i izlaza procesa y, te ulaza u proces u (na ulazni signal pulsnog oblika amplitude 1), prikazani su na slikama.



MIT pravilo

- Estimirani parametri θ_1 i θ_2 za različite vrijednosti adaptacijskog pojačanja γ.
- Najveća promjena parametara kada se upravljački signal mijenja i tada ovi parametri konvergiraju veoma sporo ka ispravnim vrijednostima $\theta_1^0 = 4$ i $\theta_2^0 = 2$.

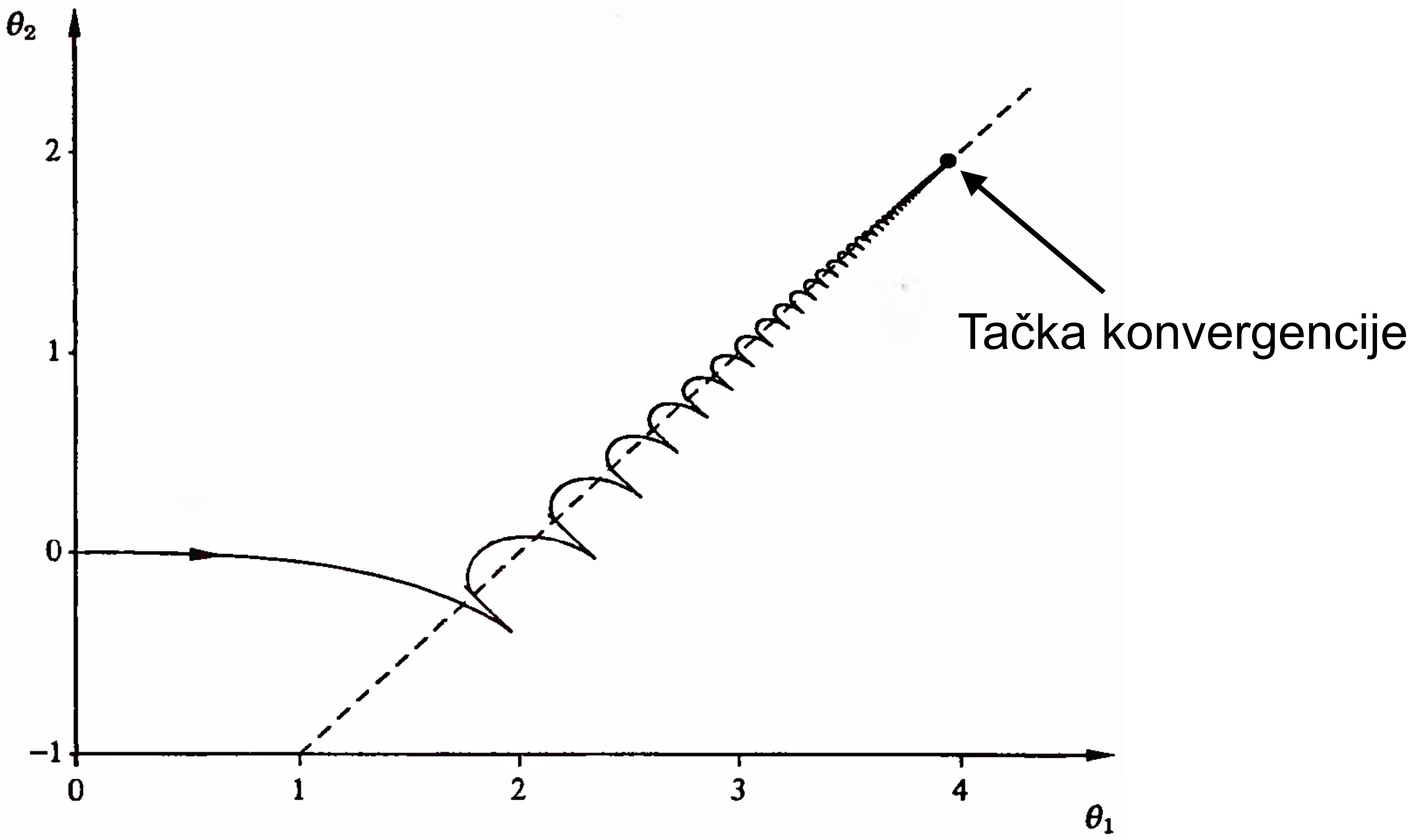


MIT pravilo

- Vrijednosti estimiranih parametara u $t = 100$ [s] iznose $\theta_1 = 3.2$ i $\theta_2 = 1.2$.
- Estimirani parametri brže konvergiraju ka svojim tačnim vrijednostima s porastom adaptacijskog pojačanja γ.
- Upravljanje je prilično dobro čak i za $t = 10$ [s], što je posljedica činjenice da su estimirani parametri θ_1 i θ_2 povezani međusobno na specifičan način, iako se značajno razlikuju od njihovih tačnih vrijednosti.
- Povezanost parametara regulatora θ_1 i θ_2 kada je sistem simuliran u trajanju od $t = 500$ [s] prikazana je na sljedećoj slici.
- Estimirani parametri brzo pristupaju isprekidanoj liniji $\theta_1 = 3.2$ i $\theta_2 = \theta_1 - a/b$.

MIT pravilo

- Ova linija predstavlja vrijednosti parametara koji osiguravaju da zatvoreni sistem ima korektno pojačanje u stacionarnom stanju.



MIT pravilo

- Sumarno o MIT pravilu:

1. **Zahtijeva se izračunavanje funkcija osjetljivosti.**
2. **Radi dobro za male vrijednosti pojačanja i za stabilne početne uvjete.**
3. **Konvergencija ovisi o amplitudi ulaznog signala i vrijednosti adaptacijskog pojačanja.**

- **Poboljšanje**: Izbjeći utjecaj ulaznog signala na promjenu parametara.

Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

- **Kriterij stabilnosti Lyapunova**
- Lyapunov je ispitivao nelinearnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad f(0) = 0} \tag{5}$$

- Da bi se garantirala postojanost i jednoznačnost rješenja jednadžbe uvode se pretpostavke na funkciju $f(x)$.
- Dovoljna pretpostavka je da je $f(x)$ lokalna Lipschitz-ova funkcija, to jest

$$\boxed{\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad L > 0}$$

u okolici ishodišta.

Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

- **Definicija 1. Stabilnost po Lyapunovu**:
- Rješenje $x(t) = 0$ diferencijalne jednadžbe (5) je stabilno ako za zadani $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ takav da sva rješenja sa inicijalnim uvjetima:

$$\boxed{\|x(0)\| < \delta}$$

imaju svojstvo:

$$\boxed{\|x(t)\| \leq \varepsilon \ \text{ za } \ 0 \leq t < \infty}$$

- Rješenje je nestabilno ako nije stabilno.
- Rješenje je asimptotski stabilno ako je stabilno i ako se može naći δ takav da sva rješenja sa $\|x(0)\| < \delta$ imaju svojstvo da $\|x(0)\| \rightarrow 0$ kada t $\rightarrow \infty$.

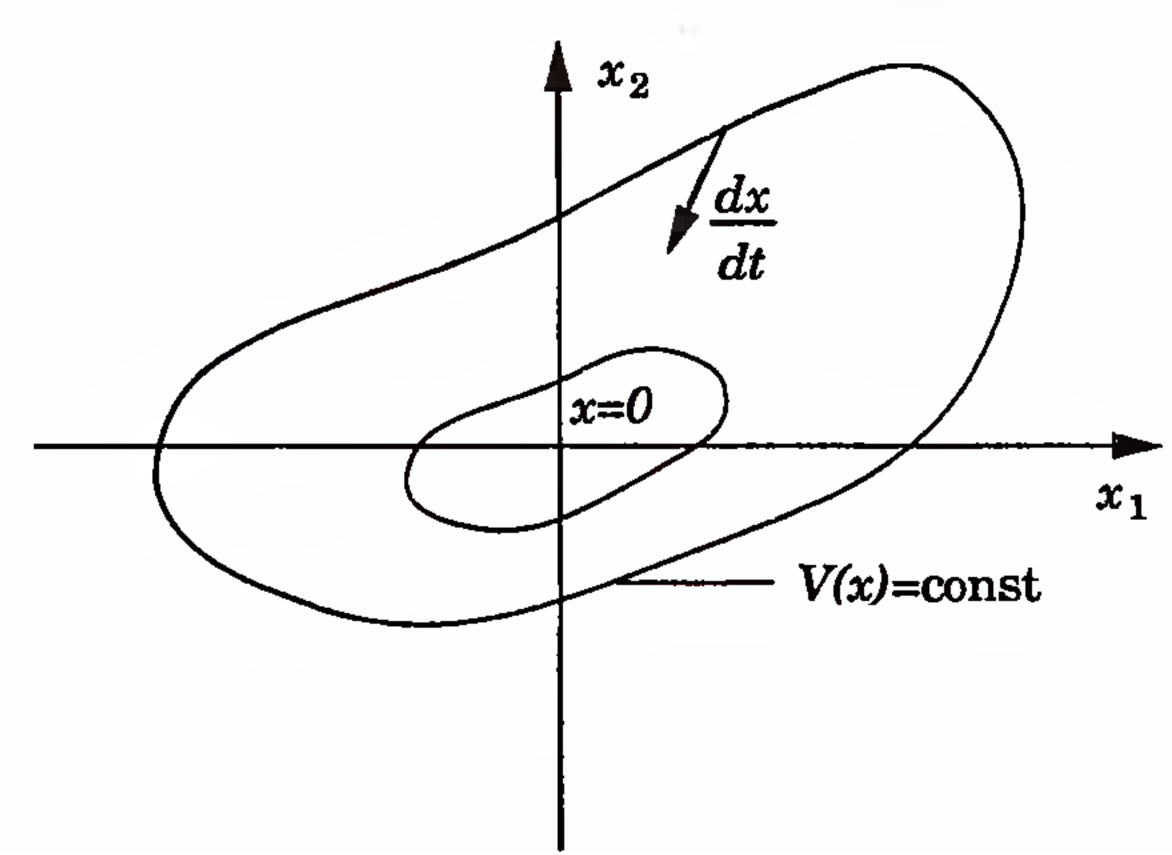
Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

- Lyapunov je uveo metodu za ispitivanje stabilnosti zasnovanu na pronalaženju funkcije sa specijalnim svojstvima.
- **Definicija 2. Pozitivno definitne i semidefinitne funkcije**
- Kontinuirana derivabilna funkcija $V : R^n \to R$ je pozitivno definitna u regionu $U \subset R^n$, koji sadrži ishodište, ako je:
  1. $V(0) = 0$
  2. $V(x) > 0,\ x \in U$ i $x \neq 0$
- Funkcija je pozitivno semidefinitna ako se uvjet 2. zamijeni sa:

$$V(x) \geq 0$$

Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

- Ilustracija metode Lyapunova za ispitivanje stabilnosti.



Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

- **Teorem 1. Kriterij stabilnosti po Lyapunovu za vremenski invarijantne sisteme**
- Ako postoji funkcija $V : R^n \rightarrow R$ koja je pozitivno definitna tako da su njene derivacije duž rješenja jednadžbe (5):

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V^T}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x) = -W(x)}$$

  negativno semidefintne, tada je rješenje $x(t)=0$ jednadžbe (5) stabilno.

- Ako je dV/dt negativno definitno, tada je rješenje također asimptotski stabilno.
- Funkcija V zasniva se **Lypunovljevoj funkciji** za sistem (5).

Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

- Osim toga, ako je:

$$\frac{dV}{dt} < 0 \text{ i } V(x) \to \infty \quad \text{kada} \quad \|x\| \to \infty$$

tada je rješenje globalno asimptotski stabilno.

- U nastavku se pokazuje kako se **teorija stabilnosti po kriteriju Lyapunova može koristiti za konstrukciju algoritma za podešavanje parametara u adaptivnim sistemima**.
- Osnovna ideja sastoji se u tome da se pronađe funkcija Lyapunova i mehanizam adaptacije koji će osigurati da pogreška slijeđenja $e = y - y_m$ teži ka 0.

Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

- **Primjer 2.** MRAS prvog reda zasnovan na teoriji stabilnosti. Promatrajmo sistem iz primjera 1. Željeni (referentni) odziv je dan sa:

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m u_c$$

gdje je $a_m > 0$ i referentni signal ograničen.

- Proces je opisan sa:

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bu$$

- Regulator je:

$$u = \theta_1 u_c - \theta_2 y$$

Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

- Pogreška:

$$\boxed{e = y - y_m}$$

- Budući da želimo pogrešku učiniti malom, prirodno je derivirati diferencijalnu jednadžbu za pogrešku.
- U tom slučaju imamo:

$$\boxed{\frac{de}{dt} = -a_m e - (b\theta_2 + a - a_m)y + (b\theta_1 - b_m)u_c}$$

- Pogreška teži nuli kada su parametri jednaki parametrima izraza (2).
- Potrebno je kreirati mehanizam adaptacije parametara koji će parametre θ_1 i θ_2 približiti njihovim željenim vrijednostima.

Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

- Za navedenu svrhu pretpostavimo da je $\gamma > 0$ i uvedimo sljedeću kvadratnu funkciju:

$$V(e,\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{2}\left(e^2 + \frac{1}{b\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)^2 + \frac{1}{b\gamma}(b\theta_1 - b_m)^2 \right)$$

- Funkcija poprimu nultu vrijednost kada je $e = 0$ i kada su parametri regulatora jednaki njihovim korektnim vrijednostima.
- **Da bi se funkcija okarakterizirala kao funkcija Lyapunova, derivacija *dV/dt* mora biti negativna**.

Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

- Derivacija navedene funkcije je:

$$\frac{dV}{dt} = e\frac{de}{dt} + \frac{1}{\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{1}{\gamma}(b\theta_1 - b_m)\frac{d\theta_1}{dt}$$

$$= -a_m e^2 + \frac{1}{\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)\left(\frac{d\theta_2}{dt} - \gamma y e\right)$$

$$+ \frac{1}{\gamma}(b\theta_1 - b_m)\left(\frac{d\theta_1}{dt} + \gamma u_c e\right)$$

- Ako se parametri osvježavaju na sljedeći način:

$$\boxed{\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma u_c e, \qquad \frac{d\theta_2}{dt} = \gamma y e} \qquad (6)$$

Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

dobiva se:

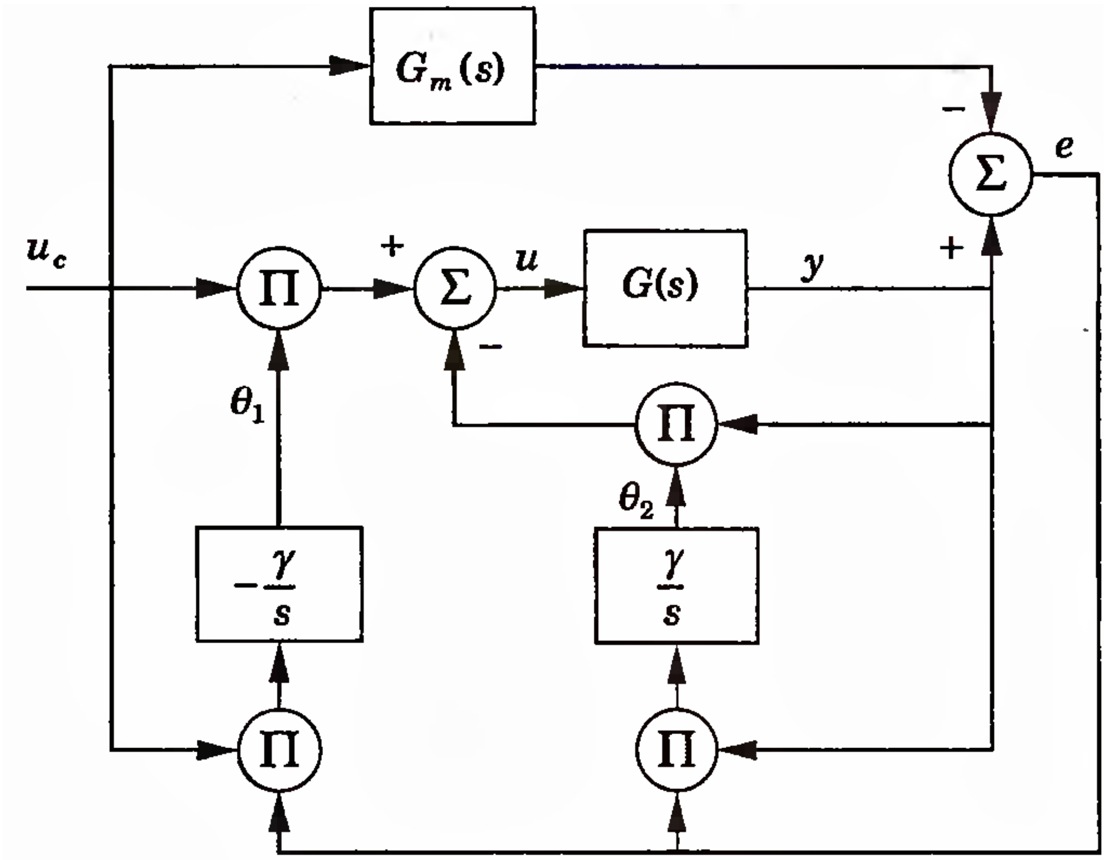
$$\boxed{\frac{dV}{dt} = -a_m e^2}$$

- Derivacija V s obzirom na vrijeme t je negativno semidefinitna, ali nije negativno definitna.
- Ovo implicira da je $V(t) \leq V(0)$ i da e_1, θ_1 i θ_2 moraju biti ograničeni.
- Također $y = e + y_m$ mora biti ograničeno.
- Korištenjem Teorema 2. (pogledati slajd br. 38.) dobiva se:

$$\boxed{\frac{d^2V}{dt^2} = -2a_m e \frac{de}{dt} = -2a_m e(-a_m e - (b\theta_2 + a - a_m)y + (b\theta_1 - b_m)u_c)}$$

Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

- Budući da su u_c, e i y_m ograničeni, slijedi da je $\ddot{V}$ ograničena (dV/dt je uniformno neprekinuta).
- Iz Teorema 1. slijedi da će e težiti ka nuli.



Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

- Međutim, **nije potrebno da parametri teže ka svojim korektnim vrijednostima, bitno je samo da su oni ograničeni**.
- Za konvergenciju parametara potrebno je nametnuti uvjete na pobuđenost sistema.
- Pravilo adaptacije (6) je slično MIT pravilu (4), ali su derivacije osjetljivosti zamijenjene drugim signalima.
- Razlika sistema (prethodni slajd) sa pravilom adaptacije zasnovanim na Lyapunovljevoj teoriji stabilnosti i sistema sa MIT pravilom je u tome da u slučaju **Lyapunova nema filtriranja signala u_c i y**.
- U oba slučaja zakon podešavanja parametara je:

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{\Theta}}{dt} = \gamma\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{e}}$$

Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

- U prethodnom izrazu Θ je vektor parametara i

$$\boldsymbol{\varphi} = [-u_c \quad y]^T$$

za Lyapunovljevo pravilo i

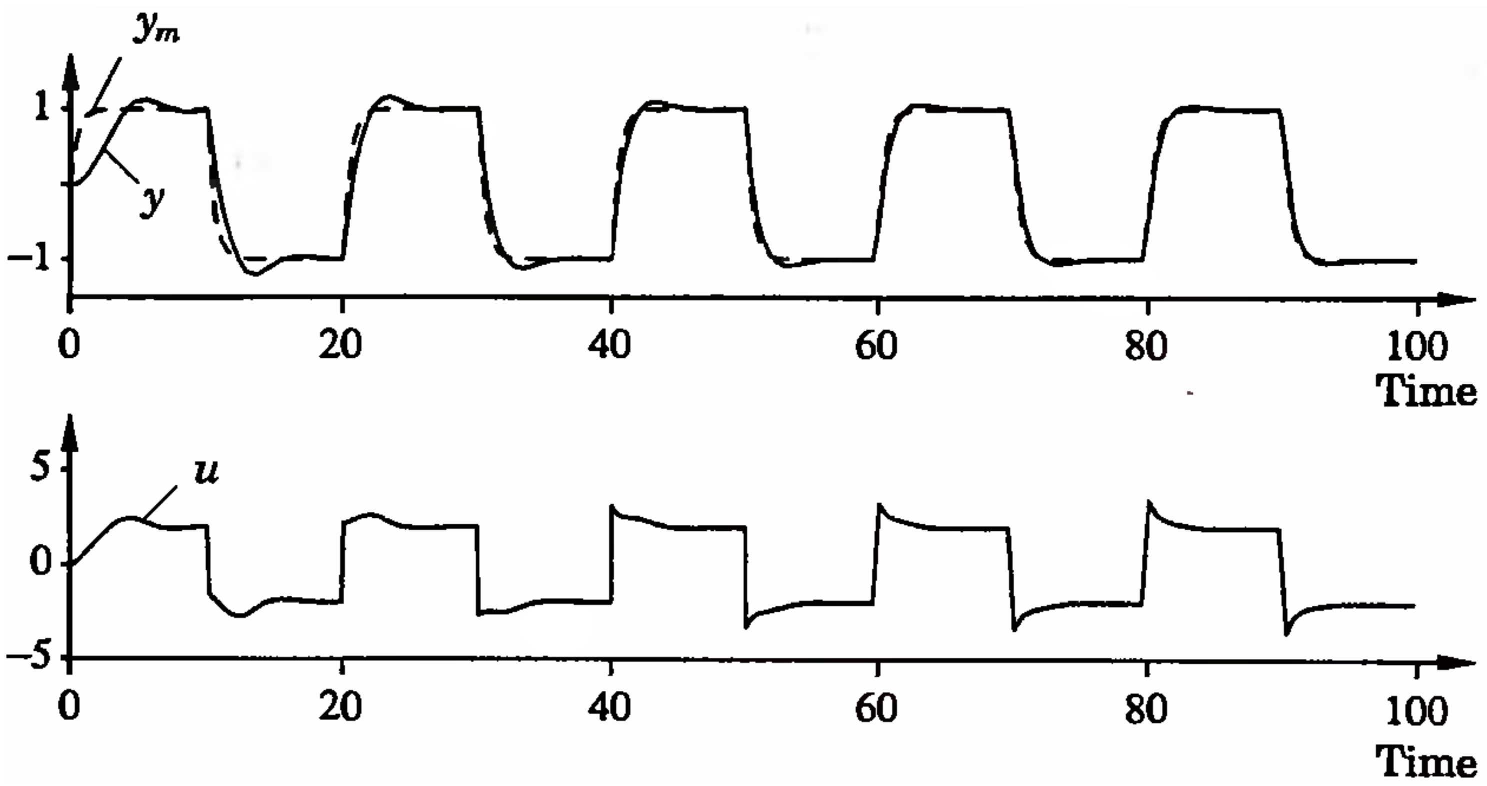
$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{a_m}{s + a_m}[-u_c \quad y]^T$$

za MIT pravilo.

- **Pravilo podešavanja dobiveno Lyapunovljevom teorijom je jednostavnije, budući da ne zahtijeva filtriranje signala**.
- Na sljedećoj slici prikazani su rezultati simulacija za sistem $G(s)=0.5/(s+1)$ i referentni model $G_m=2/(s+2)$.

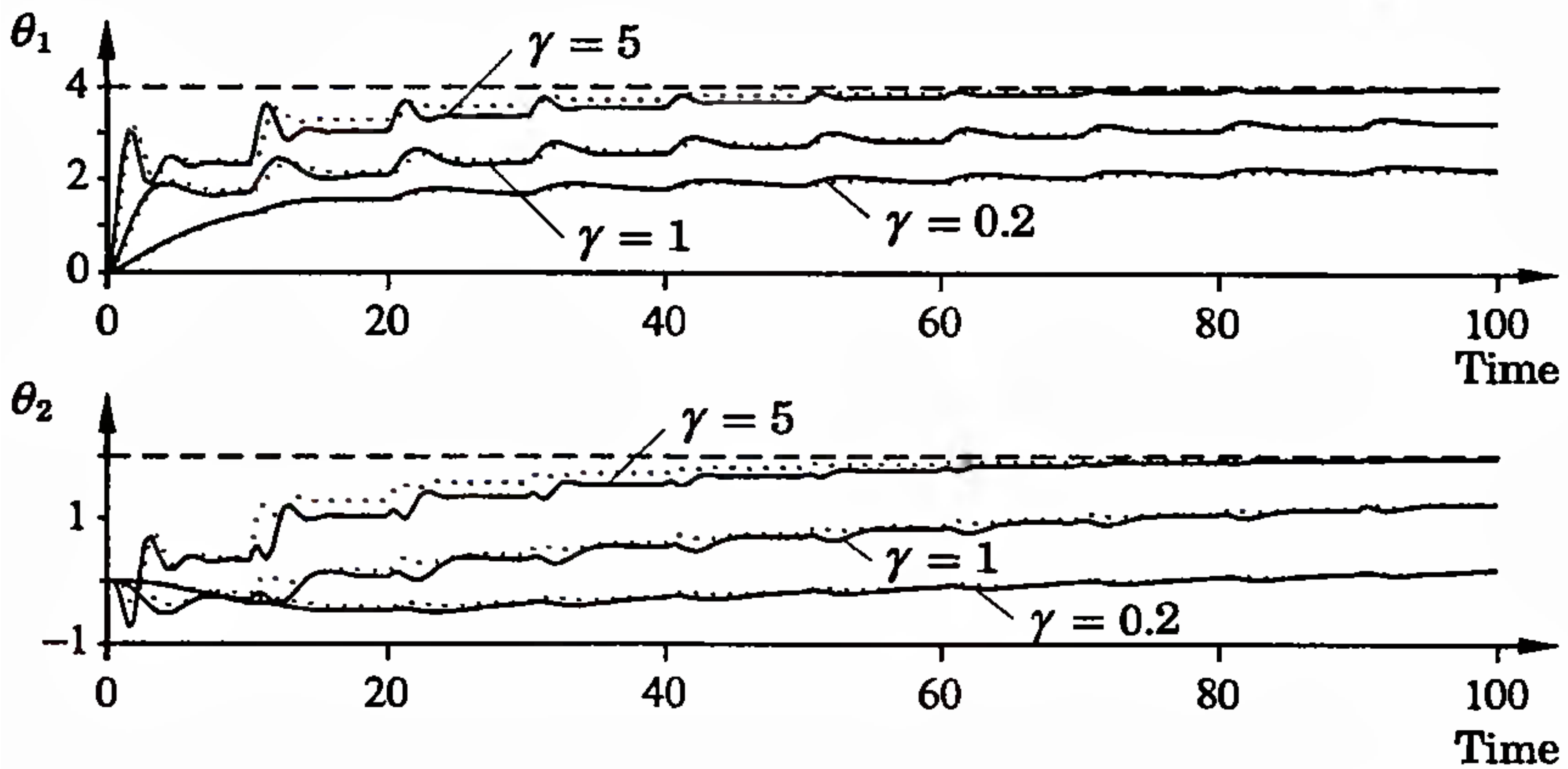
Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

- Rezultati simulacije za vrijednosti parametara $a = 1$, $b = 0.5$, $a_m = b_m = 2$ i $\gamma = 1$.
- Na prvoj slici su odzivi procesa i modela, a na drugoj upravljačkog signala na ulazni signal pulsnog oblika amplitude 1.



Parametarska adaptacija–kriterij Lyapunova

- Dobiveni rezultati su slični rezultatima dobivenim sa MIT pravilom.
- Kod Lyapunovljevog pravila prilično velike vrijednosti adaptacijskog pojačanja γ mogu se koristiti.



Vremenski promjenjivi sistemi - Lyapunov

- Promatraju se vremenski promjenjive diferencijalne jednadžbe tipa:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(x,t)} \qquad (7)$$

- Ishodište je ravnotežna tačka za jednadžbu (7) ako je $f(0, t) = 0, \forall t \geq 0$.
- Pretpostavlja se da je f funkcija čija rješenja postoje za sve $\forall t \geq t_0$. Da bi se ovo garantiralo, pretpostavlja se da je f po dijelovima kontinuirana po t-u i lokalno Lipschitzova po x-u u okolini $x(t) = 0$.
- U nastavku će se ispitivati stabilnost rješenja $x(t) = 0$.

Vremenski promjenjivi sistemi - Lyapunov

- U vremenski promjenjivom sistemu rješenje će ovisiti o t jednako kao i o početnom vremenu t_0.
- Ovo implicira da će granica δ u definiciji 1. ovisiti o ε i t_0.
- Definicija stabilnosti se može redefinirati da posjeduje svojstva uniformne stabilnosti s obzirom na inicijalno vrijeme.
- **Definicija 3**. **Uniformna Lyapunovljeva stabilnost**. Rješenje $x(t) = 0$ jednadžbe (7) je **uniformno stabilno** ako za $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$, neovisno o t_0, takvo da je:

$$\boxed{\left\| x(t_0) \right\| < \delta \Rightarrow \left\| x(t) \right\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \geq 0}$$

Vremenski promjenjivi sistemi - Lyapunov

- Rješenje je **uniformno asimptotski stabilno** ako je uniformno stabilno i ako postoji $c > 0$, neovisno o t_0, takvo da $x(t) \to 0$ kako $t \to \infty$, uniformno po t_0, za sve $\|x(t_0)\| < c$.
- Za definiranje teorema stabilnosti potrebno je prvo uvesti **klasu K funkcija**.
- **Definicija 4**. **Klasa *K* funkcija**. Za kontinuiranu funkciju $\alpha : [0, \alpha) \to [0, \infty)$ kaže se da pripada klasi K funkcija ako je ona striktno rastuća i $\alpha(0) = 0$. Za ovu funkciju se kaže da pripada klasi K_∞ ako je $\alpha = \infty$ i $\alpha(r) \to \infty$ kako $r \to \infty$.

Vremenski promjenjivi sistemi - Lyapunov

- Za vremenski promjenjive sisteme vrijedi sljedeći teorem stabilnosti.
- **Teorem 2. Lyapunovljev teorem stabilnosti: vremenski promjenjivi sistem**.
- Neka je $x = 0$ ravnotežna tačka za jednadžbu (7) i $D = \{x \in \Re^2 \mid \|x\| < r\}$. Neka je V kontinuirano derivabilna funkcija takva da je:

$$\boxed{\alpha_1(\|x\|) \le V(x,t) \le \alpha_2(\|x\|)}$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x,t) \le -\alpha_3(\|x\|)}$$

Vremenski promjenjivi sistemi - Lyapunov

za $\forall t \geq 0$, $\forall t \in D$, gdje su α_1, α_2 i α_3 funkcije klase K, tada je $x = 0$ uniformno asimptotski stabilno rješenje.

- Kada se koristi Lyapunovljeva teorija na adaptivno upravljanje, često se nalazi da je dV/dt samo negativno semidefinitna funkcija.
- Ovo implicira da se dodatni uvjeti moraju nametnuti na sistem.
- Sljedeća lema daje koristan rezultat – **Barbalatova lema**.

Vremenski promjenjivi sistemi - Lyapunov

- **Lema 1. Barbalatova lema**. Ako je g realna funkcija realne varijable t, definirana i uniformno kontinuirana za $t \geq 0$, i ako granica integrala:

$$\int_0^t g(s)ds$$

kada $t \to \infty$ postoji i predstavlja konačan broj, tada:

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} g(t) = 0}$$

- Vremenska derivacija Lyapunovljeve funkcije V ovisi o upravljačkom signalu i ostalim signalima u sistemu.
- Ako su ovi signali ograničeni tada se Lema 1. može koristiti na dV/dt za dokaz stabilnosti.

Vremenski promjenjivi sistemi - Lyapunov

- **Teorem 3. Ograničenost i konvergencija skupa**
- Neka je $D = \{x \in \Re^2 \mid \|x\| < r\}$ i pretpostavimo da je $f(x, t)$ lokalno Lipschitzova funkcija na $D \times [0, \infty)$. Neka je V kontinuirano diferencijabilna funkcija takva da je:

$$\boxed{\alpha_1(\|x\|) \le V(x,t) \le \alpha_2(\|x\|)}$$

i

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x,t) \le -W(x) \le 0}$$

$\forall t \ge 0$, $\forall t \in D$, gdje su α_1 i α_2 klase K funkcija definiranih na $[0, r]$ i neka je $W(x)$ kontinuirana na D.

Vremenski promjenjivi sistemi - Lyapunov

- Nadalje se pretpostavlja da je dV/dt uniformno kontinuirana po t.
- Tada sva rješenja jednadžbe (7) sa $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_2(r))$ su ograničena i zadovoljavaju:

$$\boxed{W(x(t)) \to 0 \text{ kada } t \to \infty}$$

- Osim toga, ako sve pretpostavke vrijede globalno i α_1 pripada klasi K_∞, tada je prethodni izraz istinit za sve $x(t_0) \in \Re^n$.
- U ovom teoremu je pretpostavljeno da je dV/dt uniformno kontinuirana, to jest kontinuiranost je neovisna o t.
- Dovoljan uvjet za ovo je da je $\dot{V}$ ograničen.

Sistem u prostoru stanja-kriterij Lyapunova

- Korištenjem Lyapunovljeve teorije odrediti stabilni MRAS za općenit linearan sistem.
- Ciljevi:
  1. **Pronaći strukturu regulatora.**
  2. **Izvesti jednadžbu pogreške.**
  3. **Naći Lyapunovljevu funkciju i koristiti je za dobivanje zakona podešavanja parametara tako da pogreška teži ka nuli.**
- Promatra se linearan sistema u prostoru stanja:

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}} \qquad (8)$$

Sistem u prostoru stanja-kriterij Lyapunova

- Pretpostavimo da se želi pronaći zakon upravljanja takav da je odziv na upravljačke signale dan kao:

$$\frac{d\boldsymbol{x}_m}{dt} = \boldsymbol{A}_m \boldsymbol{x}_m + \boldsymbol{B}_m \boldsymbol{u}_c \tag{9}$$

- Opći linearni upravljački zakon za sistem opisan jednadžbom (8) je:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}$$

- Na temelju navedenih jednadžbi, zatvoreni sistem upravljanja postaje:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{L})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{A}_c(\boldsymbol{\Theta})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_c(\boldsymbol{\Theta})\boldsymbol{u}_c \tag{10}$$

Sistem u prostoru stanja-kriterij Lyapunova

- Zakon upravljanja može se parametrirati na razne načine.
- Svi elementi matrica $\boldsymbol{L}$ i $\boldsymbol{M}$ mogu biti slobodno odabrani.
- Također, mogu postojati ograničenja između parametara.
- Opći slučaj se može uspostaviti pretpostavljajući da je zatvoreni sistem opisan jednadžbom (9), gdje matrice $\boldsymbol{A}_c$ i $\boldsymbol{B}_c$ ovise o vektoru parametara $\boldsymbol{\Theta}$.

Sistem u prostoru stanja-kriterij Lyapunova

Uvjeti kompatibilnosti

- Nije uvijek mogući pronaći Θ za koji je sistem (10) ekvivalentan sistemu (9).
- Dovoljan uvjet je da postoji vrijednost parametra Θ^0 takva da je:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A}_c(\boldsymbol{\Theta}^0) &= \boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{B}_c(\boldsymbol{\Theta}^0) &= \boldsymbol{B}_m \end{aligned}}$$

- Ovaj uvjet za perfektno slijeđenje modela je strog.
- Kada su svi parametri u zakonu upravljanja slobodno odabrani imamo:

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_m = \boldsymbol{BL}$$

$$\boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{BM}$$

Sistem u prostoru stanja-kriterij Lyapunova

- Prethodni izraz znači da su stupci matrica $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{A}_m$ i $\boldsymbol{B}_m$ linearna kombinacija stupaca matrice $\boldsymbol{B}$.
- Ako su ovi uvjeti zadovoljeni i stupci matrica $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{B}_m$ linearno neovisni, tada su matrice $\boldsymbol{L}$ i $\boldsymbol{M}$ dane sa:

$$\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_m) = (\boldsymbol{B}_m^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}_m^T(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_m)$$

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}_m = (\boldsymbol{B}_m^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}_m^T\boldsymbol{B}_m$$

Jednadžba pogreške

- Pogreška slijeđenja: $\boxed{\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_m}$
- Derivacija pogreške:

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{x}_m}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{B}_m\boldsymbol{u}_c$$

Sistem u prostoru stanja-kriterij Lyapunova

- Uvrštavanjem $\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}$ u prethodni izraz dobiva se:

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} = \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_m - \boldsymbol{BL})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{BM} - \boldsymbol{B}_m)\boldsymbol{u}_c$$

$$= \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{A}_c(\boldsymbol{\Theta}) - \boldsymbol{A}_c(\boldsymbol{\Theta}_0))\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{B}_c(\boldsymbol{\Theta}) - \boldsymbol{B}_c(\boldsymbol{\Theta}_0))\boldsymbol{u}_c$$

$$= \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{e} + \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta} - \boldsymbol{\Theta}^0)$$

- Da bi se dobila ova jednakost, pretpostavljeno je da su zadovoljeni uvjeti perfektnog slijeđenja, pri čemu se za ovo zahtijeva postojanje $\boldsymbol{\Theta}$.

- Za izvođenje zakona kojim se podešavaju parametri, uvodi se Lyapunovljeva funkcija:

$$\boxed{V(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\Theta}) = \frac{1}{2}\left(\gamma\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{\Theta} - \boldsymbol{\Theta}^0)^T(\boldsymbol{\Theta} - \boldsymbol{\Theta}^0)\right)} \qquad (11)$$

Sistem u prostoru stanja-kriterij Lyapunova

- U izrazu (11) $\boldsymbol{P}$ je pozitivno definitna matrica i V je pozitivno definitna funkcija.
- Da bi se ispitalo da li V može biti funkcija Lyapunova, računa se njena derivacija po vremenu:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e} + \gamma(\boldsymbol{\Theta}-\boldsymbol{\Theta}^0)\boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{\Theta}-\boldsymbol{\Theta}^0)^T\frac{d\boldsymbol{\Theta}}{dt}$$

$$= -\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{\Theta}-\boldsymbol{\Theta}^0)^T\left(\frac{d\boldsymbol{\Theta}}{dt} + \gamma\boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}\right)$$

gdje je $\boldsymbol{Q}$ pozitivno definitna matrica takva da je:

$$\boxed{\boldsymbol{A}_m^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_m = -\boldsymbol{Q}}$$

Sistem u prostoru stanja-kriterij Lyapunova

- Prethodni izraz proizlazi iz sljedećeg teorema.
- **Teorem 4. Lyapunovljeve funkcije za linearne sisteme**. Pretpostavimo da je linearni sistem

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} \qquad (12)$$

asimptotski stabilan. Tada za svaku simetričnu pozitivno definitnu matricu $\boldsymbol{Q}$ postoji jedinstvena pozitivno definitna matrica $\boldsymbol{P}$ takva da je:

$$\boxed{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q}}$$

Osim toga, funkcija $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ je Lyapunovljeva funkcija za jednadžbu (12).

Sistem u prostoru stanja-kriterij Lyapunova

- Ako je izabran zakon podešavanja parametara:

$$\frac{d\boldsymbol{\Theta}}{dt} = -\gamma \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{e}$$

dobiva se:

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = -\frac{\gamma}{2} \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{e}}$$

- Vremenska derivacija Lyapunovljeve funkcije je negativno semidefinitna.
- Korištenjem **Barbalatove leme** dokazuje se da pogreška teži ka nuli. Pretpostavljeno je da su sva stanja $\boldsymbol{x}$ mjerljiva.

Signalna adaptacija s referentnim modelom

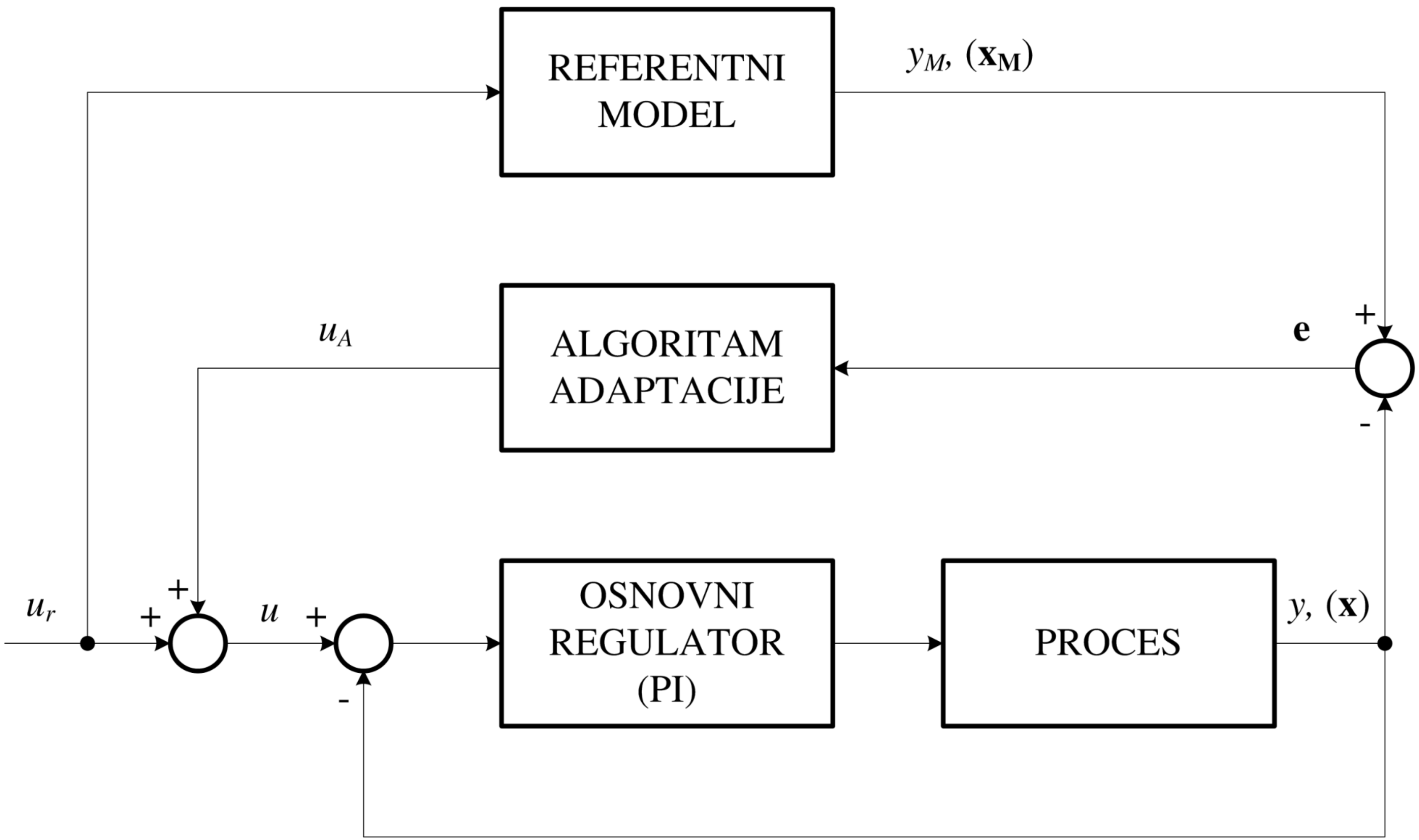
- Kompenzacija promjene parametara sistema ili nelinearnosti mogu se ostvariti pomoću: **regulatora s promjenjivim pojačanjem** (GS), **samopodesivim regulatorom** (STR) ili **adaptivnim upravljanjem s referentnim modelom** (MRAC).
- **Parametarska adaptacija s referentnim modelom sadrži integralne članove, odnosno zahtijeva više iteracija za podešavanje optimalnih parametara regulatora i novo podešenje za promjenjene parametre procesa**.
- **Prednost signalne adaptacije je da nema integralnih članova i zbog toga djeluje trenutno (u prvoj iteraciji) na svaku promjenu u ponašanju sistema**.

Signalna adaptacija s referentnim modelom

- Algoritam signalne adaptacije generira **dodatni upravljački signal** u_A koji minimizira razliku između izlaza referentnog modela y_m i podesivog sistema y.
- Signal adaptacije djeluje na ulaz sistema tako da **mehanizam adaptacije formira vanjsku upravljačku petlju, dok podesivi sistem s osnovnim regulatorom formira unutarnju upravljačku petlju**.
- Druga mogućnost je da signal adaptacije djeluje iza osnovnog regulatora, tako da **mehanizam adaptacije formira unutarnju upravljačku petlju, a osnovni regulator djeluje u vanjskoj petlji**.

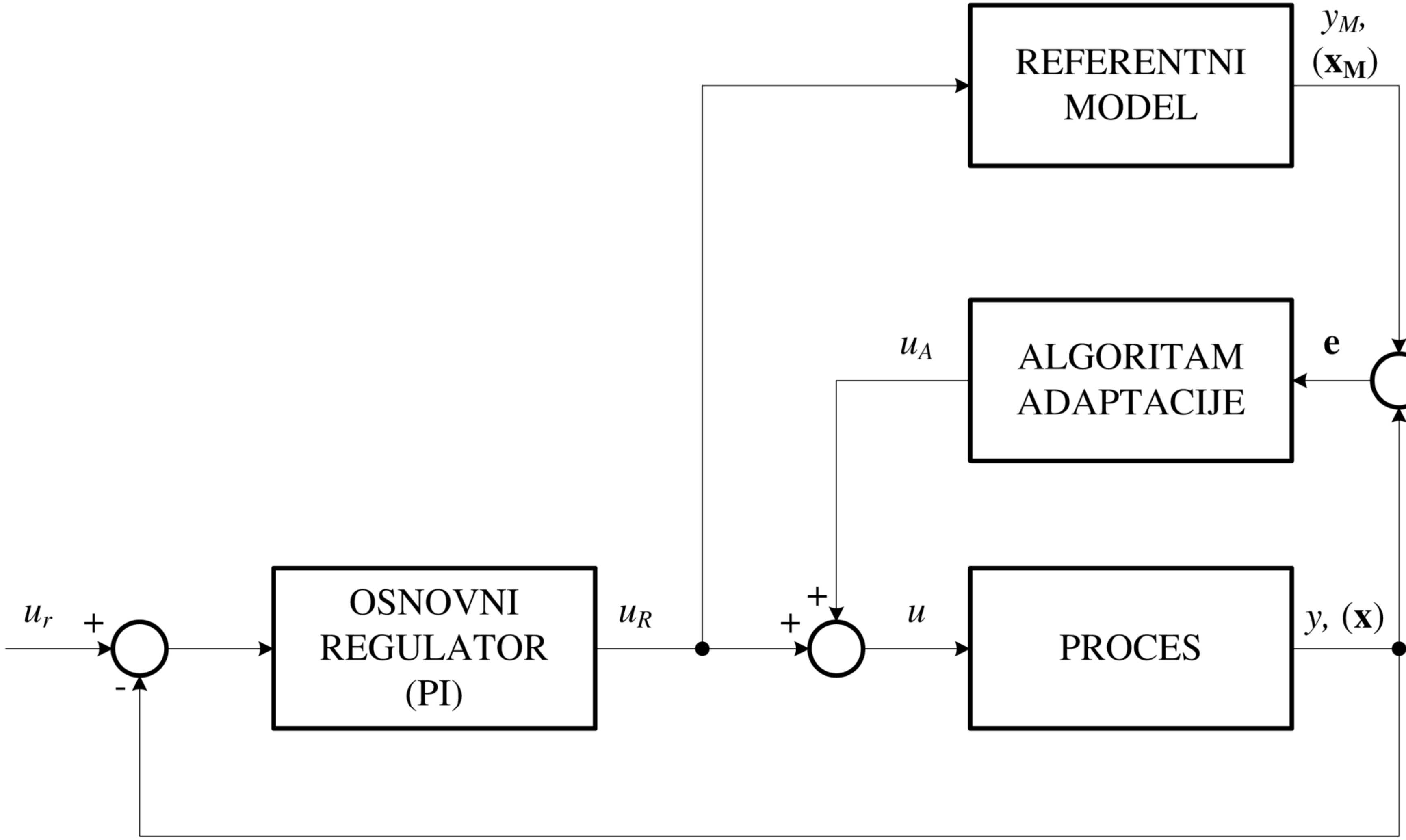
Signalna adaptacija s referentnim modelom

- **Adaptivni sistem s referentnim modelom i algoritmom signalne adaptacije u vanjskoj petlji.**



Signalna adaptacija s referentnim modelom

- **Adaptivni sustav s referentnim modelom i algoritmom signalne adaptacije u unutarnjoj petlji.**



Signalna adaptacija s referentnim modelom

- Linearni vremenski nepromjenjivi SISO sistem u prostoru stanja:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t)} \qquad (13)$$

gdje su:

- $\boldsymbol{A}$ – matrica sistema $(n \times n)$,
- $\boldsymbol{b}$ – ulazni vektor sistema $(n \times 1)$,
- $\boldsymbol{x}$ – vektor varijabli stanja sistema $(n \times 1)$,
- u – upravljački signal sistema (1×1).

Signalna adaptacija s referentnim modelom

- Referentni model:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_m(t) = \boldsymbol{A}_m \boldsymbol{x}_m(t) + \boldsymbol{b}_m u_x(t) \tag{14}$$

gdje su:

- $\boldsymbol{A}_m$ – matrica referentnog modela $(n \times n)$,
- $\boldsymbol{b}_m$ – ulazni referentnog modela $(n \times 1)$,
- $\boldsymbol{x}_m$ – vektor varijabli stanja referentnog modela $(n \times 1)$,
- u_x – referentni signal u_r ili u_R (1×1), ovisno o strukturi adaptacije.

Signalna adaptacija s referentnim modelom

- Vektor pogreške slijeđenja:

$$\boxed{\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}_m(t) - \boldsymbol{x}(t)}$$

- Iz opisa sistema i referentnog modela slijedi izraz za derivaciju pogreške:

$$\dot{\boldsymbol{e}}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}_m(t) - \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_m \boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{b} u_A(t)$$

  pri čemu je vektor $\boldsymbol{\sigma}$ određen varijacijama parametara sistema (procesa) od referentnog modela.

- Stabilnost adaptivnog regulatora može se ispitati pomoću kriterija stabilnosti Lyapunova.

Signalna adaptacija s referentnim modelom

- Prikladna Lyapunovljeva pozitivno definitna funkcije je kvadratnog oblika:

$$\boxed{V = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}}$$

gdje je $\boldsymbol{P}$ pozitivno definitna matrica dana sa:

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q}$$

$\boldsymbol{Q}$ je proizvoljno definitna matrica.

- Derivacija funkcije Lyapunova je:

$$\boxed{\dot{V} = \dot{\boldsymbol{e}}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{e}}}$$

Signalna adaptacija s referentnim modelom

- Kombiniranjem prethodnih izraza dobiva se:

$$\dot{V} = \dot{\boldsymbol{e}}^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e} + 2\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{\sigma} - 2\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{b}u_A \qquad (15)$$

gdje je u_A **signal adaptacije**.

- Derivacija funkcije Lyapunova (15) bit će negativno definitna za sljedeći oblik signala adaptacije:

$$\begin{aligned} u_A &= h \cdot sign(\nu(t)) \\ \nu(t) &= \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{e}(t), \quad \boldsymbol{d}^T = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{P} \end{aligned} \qquad (16)$$

gdje su: ν - poopćena pogreška,

h – koeficijent adaptacije,

$\boldsymbol{d}^T$ – težinski vektor koeficijenata pogreške.

Signalna adaptacija s referentnim modelom

- Algoritam adaptacije s funkcijom predznaka (16) generira trajne oscilacije u signalu adaptacije u_A, što nije pogodno u sistemima automatskog upravljanja.
- Umjesto funkcije predznaka uvodi se funkcija zasićenja (*sat*):

$$u_A(t) = \mathrm{sat}(v(t), h) = \begin{cases} h, \ \mathrm{za} \ \ v(t) > v_s \\ K_v v(t), \ \mathrm{za} \ |v(t)| \leq v_s \\ -h, \ \mathrm{za} \ \ v(t) < -v_s \end{cases} \qquad (17)$$

gdje su: h – iznos zasićenja algoritma,

K_v – koeficijent pojačanja poopćene pogreške,

v_s – područje linearnosti funkcije zasićenja.

Signalna adaptacija s referentnim modelom

- Koeficijenti matrice $\boldsymbol{P}$, a time i $\boldsymbol{d}^T$ mogu se odrediti iz jednadžbe:

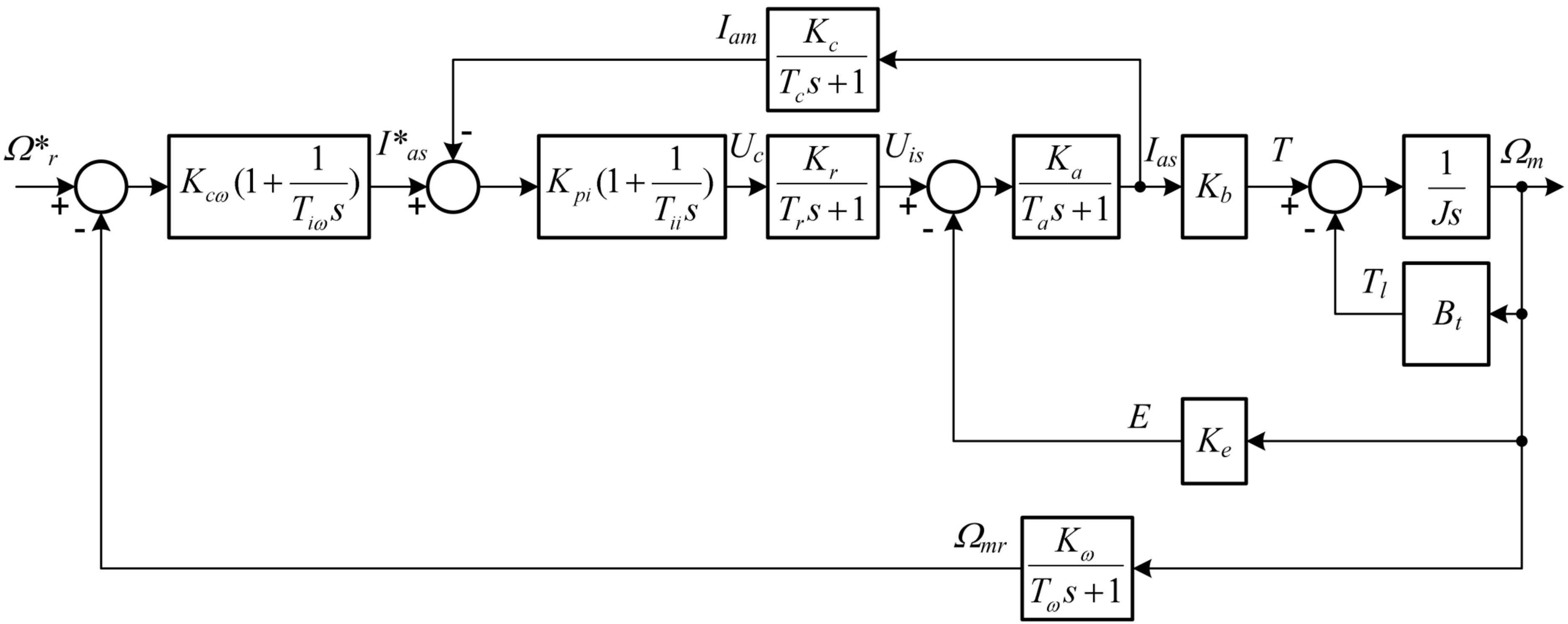
$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q}$$

  uz dane koeficijente matrice $\boldsymbol{Q}$ (obično se uzima $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{I}$ je jedinična matrica).

- Međutim, tako određeni težinski koeficijenti ne daju najbolju adaptaciju, tj. najmanju vrijednost pogreške u prijelaznoj pojavi pa stoga ti težinski koeficijenti nisu optimalni.
- Zbog toga se oni određuju optimiranjem uz pomoć programskih paketa (Matlab Optimization Toolbox).

Signalna adaptacija s referentnim modelom

- **Primjer 3**. Beskontaktni elektronički komutirani motor (BLDC) s permanentnim magnetima na rotoru.
- Blokovska shema kaskadnog sistema regulacije brzine vrtnje BLDC pogona.



Signalna adaptacija s referentnim modelom

- Adaptivni regulator izveden je u strukturi prema slici sa slajda br. 54., odnosno u vanjskoj petlji.
- Kao varijable stanja odabrane su mjerena brzina vrtnje, te njena prva i druga derivacija.
- Derivacije se računaju aproksimativno prema izrazima:

$$G_1(z) = \frac{\dot{\Omega}_{mr}(z)}{\Omega_{mr}(z)} = \frac{z-1}{T_d z}$$

$$G_2(z) = \frac{\ddot{\Omega}_{mr}(z)}{\Omega_{mr}(z)} = \frac{z^2-2z+1}{T_d^2 z^2}$$

gdje je $T_d = 50\ \mu\text{s}$ vrijeme diskretizacije algoritma.

Signalna adaptacija s referentnim modelom

- Referentni model je odabran da dobro opisuje ponašanje pogona s nominalnim parametrima:

$$G_m(s) = \frac{\Omega_{mmr}(z)}{U_r(z)} = \frac{1}{(1+T_f s)(1+2\zeta T_n s + T_n^2 s^2)}$$

gdje je Ω_{mmr} izlaz referentnog modela, a parametri $\zeta = 0.318$ i $T_n = 1.197$ ms su dobiveni optimiranjem.

- Težinski koeficijenti pogreške određeni su optimiranjem prema ISE integralnom kriteriju:

$$I = \int e^2(t)dt$$

Signalna adaptacija s referentnim modelom

- U prethodnom izrazu je:

$$e(t)=\omega_{mmr}(t)-\omega_{mr}(t)$$

- Optimiranje je provedeno uz djelovanje referentne veličine $u_r(t) = 0.1\ S(t)$, iznos zasićenja $h = 0.1$ i koeficijent pojačanja $K_v = 1$.
- Rezultat optimiranja je:

$$\boldsymbol{d}^T=[18.018\ \ 4.429\cdot 10^{-3}\ \ 1.438\cdot 10^{-6}]$$

Signalna adaptacija s referentnim modelom

- PI regulator unutarnje petlje po struji armature projektiran je po tehničkom optimumu (kompenzacija najveće vremenske konstante u petlji), za nadvišenje signala povratne veze struje armature $\sigma_{\mathrm{mi}} = 5\%$ te njegovi parametri iznose:

$$K_{pi} = 1.267, \quad T_{ii} = 1.743\,\mathrm{ms}$$

- PI regulator brzine vrtnje u vanjskoj petlji projektiran je prema krivuljama pokazatelja kvalitete upravljanja, čime se postiže brža i bolja kompenzacija poremećajne veličine u odnosu na projektiranje regulatora primjenom tehničkog optimuma. Tako dobiveni parametri iznose:

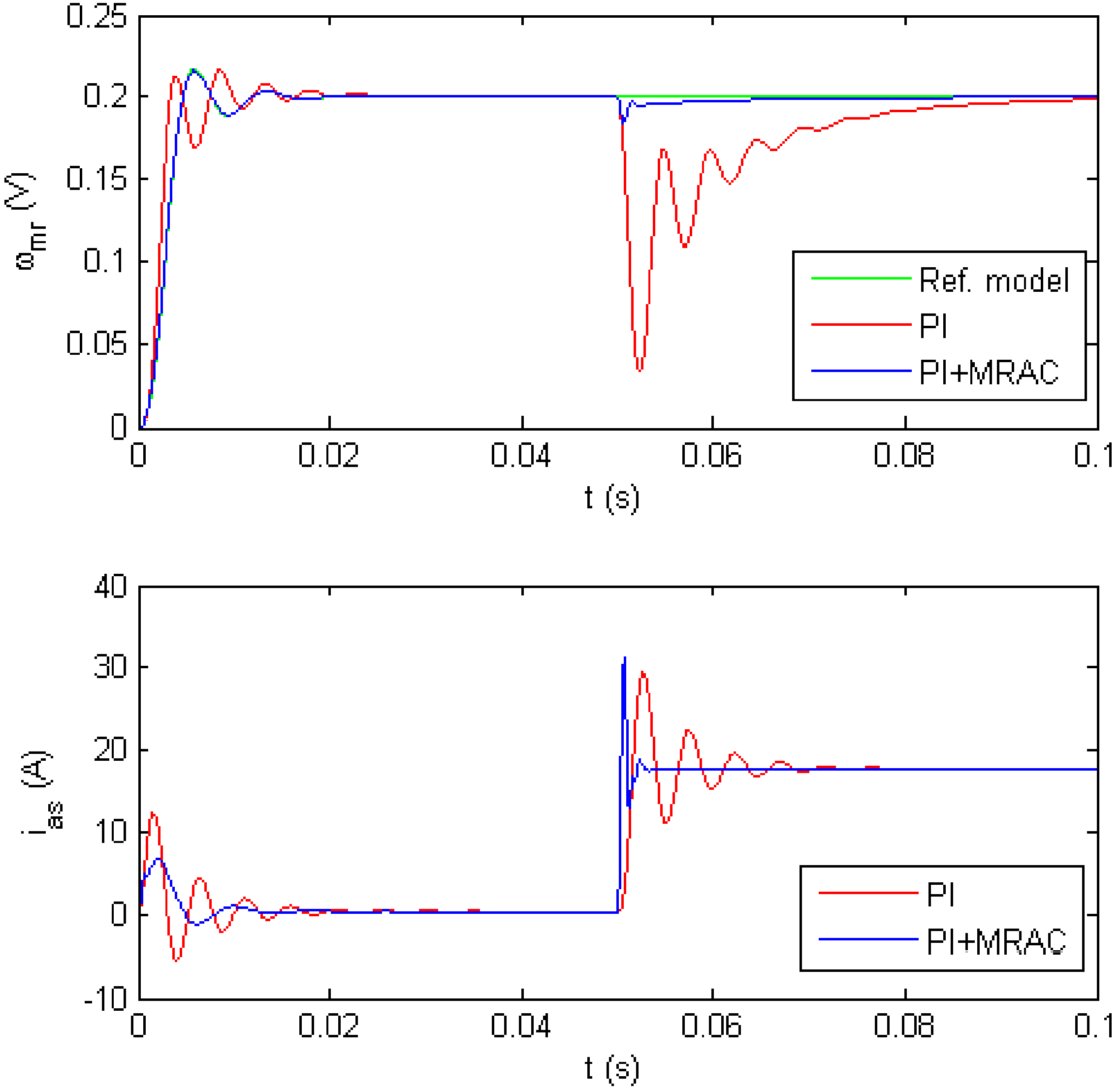
$$K_{c\omega} = 44.9, \quad T_{i\omega} = 11.76\,\mathrm{ms}$$

Signalna adaptacija s referentnim modelom

- Za postizanje nadvišenja signala povratne veze brzine vrtnje od $\sigma_{m\omega} = 10\%$, u granu referentne vrijednosti dodaje se filter prvog reda s jediničnim pojačanjem i vremenskom konstantom $T_f = 1.96$ ms.
- Odzivi referentnog modela te mjerene brzine vrtnje i struje armature elektromotornog pogona bez i sa adaptacijom dani su na sljedeće dvije slike.

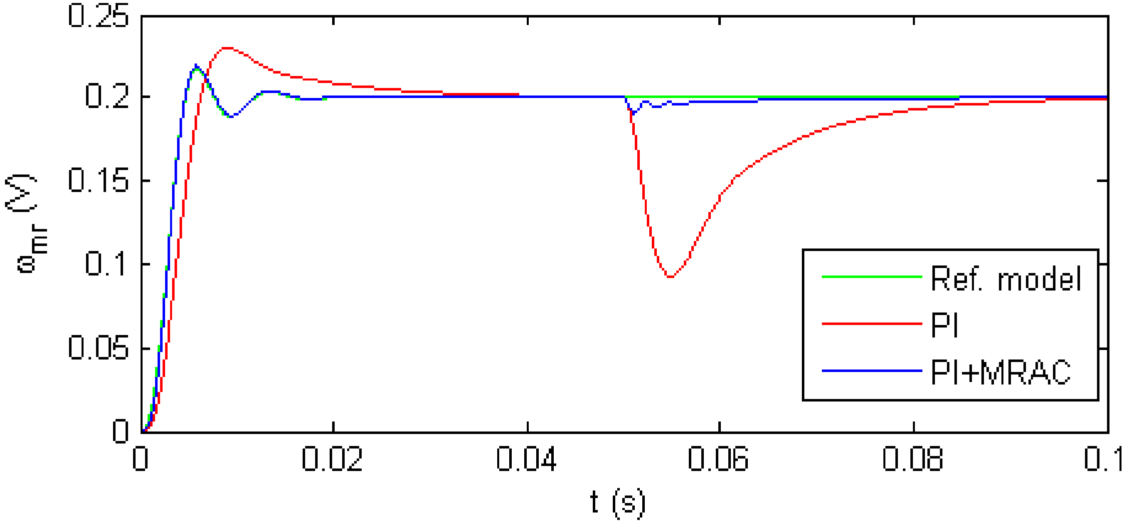
Signalna adaptacija s referentnim modelom

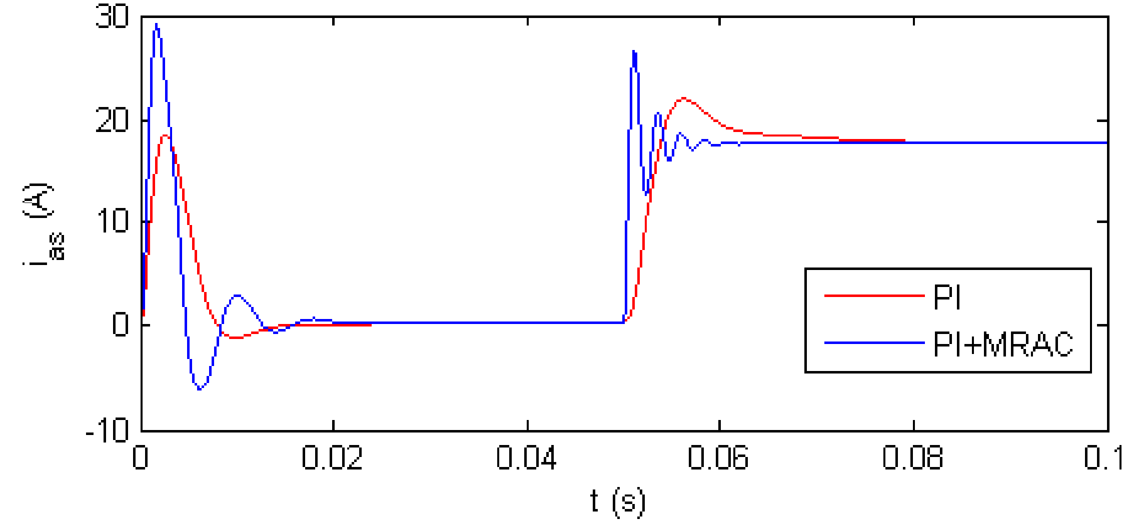
- Odzivi za moment inercije $J = 0.5\,J_n$.



Signalna adaptacija s referentnim modelom

- Odzivi za moment inercije $J = 2\,J_n$.





Signalna adaptacija s referentnim modelom

- Iz odziva je očigledna superiornost adaptivnog regulatora s referentnim modelom i signalnom adaptacijom naspram PI regulacije pri promjeni momenta inercije pogona.
- Maksimalno odstupanje odziva mjerene brzine vrtnje od referentnog modela ne prelazi 3% s algoritmom signalne adaptacije, dok je isto odstupanje s PI regulatorom oko 30% za obje promjene momenta inercije.
- Propadi brzine vrtnje pri djelovanju poremećajne veličine su za red veličine smanjeni korištenjem adaptivnog regulatora, uz neznatno povećanje maksimalne vrijednosti struje armature.

MRAS zasnovan na teoriji hiperstabilnosti

- **Sistem sa zatvorenom povratnom vezom kod koga se u direktnoj grani nalazi linearni stacionarni sistem, a u povratnoj nelinerani nestacionarni sistem koji zadovoljava nejednadžbu Popova je globalno asimptotski stabilan ako je:**

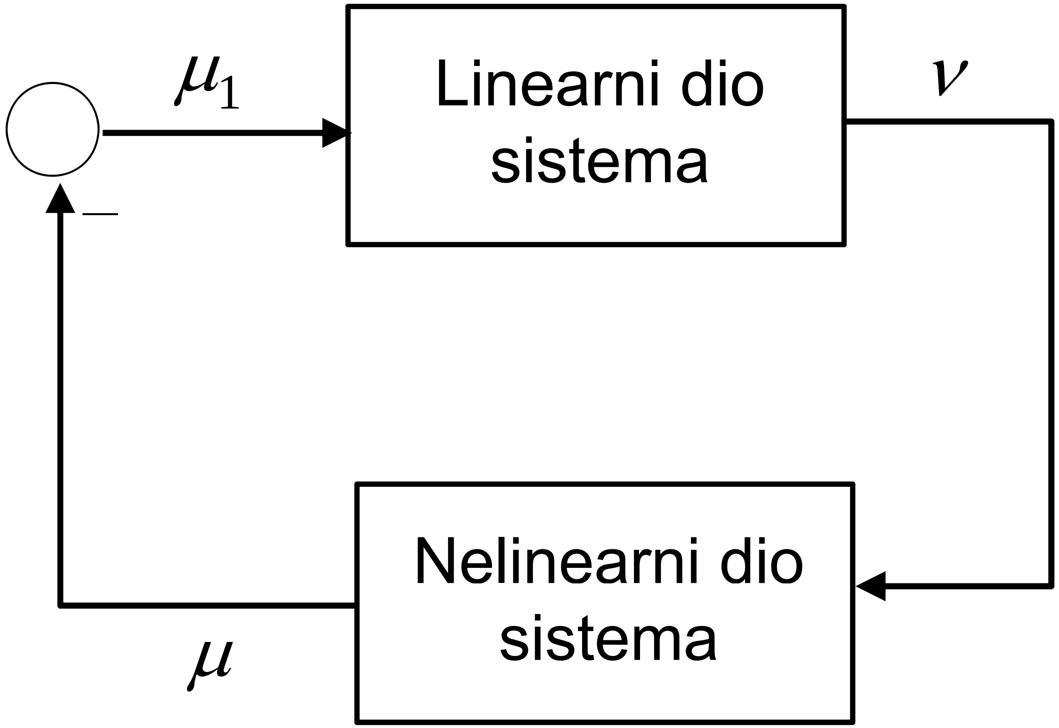
$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{Re}(G(j\omega)) > 0 \\ &\int_0^t \nu^T(\tau)\mu(\tau)d\tau \geq -\delta, \quad \forall t > 0 \end{aligned}}$$

Kriterij hiperstabilnosti Popova

gdje su: δ - pozitivna konstanta, μ - izlazna varijabla nelinearnog dijela sistema, ν - izlazna varijabla linearnog dijela sistema.

MRAS zasnovan na teoriji hiperstabilnosti

- Struktura sistema



- Opis sistema:

$$\boldsymbol{\dot{e}} = \boldsymbol{A}_M \boldsymbol{e} + \boldsymbol{\mu}_1$$
$$\nu = \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{e}$$

MRAS zasnovan na teoriji hiperstabilnosti

- Linearni dio sistema:

$$v(s) = \boldsymbol{G}^T(s)\boldsymbol{\mu}_1(s) = \boldsymbol{d}^T(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_M)^{-1}\boldsymbol{\mu}_1(s)$$

- Nelinearni dio sistema:

$$\boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\mu}_1 = (\boldsymbol{k}_p^T(t,v) - (\boldsymbol{A}_M - \boldsymbol{A}))\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{b}k_d(t,v) - \boldsymbol{b}_m)u_r(s)$$

- Linearni dio sistema obuhvaća vektor težina koeficijenata pogreške (postavljanje nula funkcije prijenosa linearnog dijelasistema) i potpuni vektor stanja.
- Nelinearni dio obuhvaća algoritam adaptacije.