Lekcija 6: *Adaptivno stohastičko i prediktivno upravljanje*

Prof.dr.sc. Jasmin Velagić
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

Kolegij: Adaptivno i robusno upravljanje

2012/2013

Uvod

- **Dizajnirati regulator koji reducira poremećaje što je moguće bolje**.
- Stohastički modeli su korisni za opis poremećaja.
- Samopodesivi regulatori za stohastičke sisteme:
  - **Adaptivni regulator zasnovan na minimumu varijance** (MV regulator).
  - **MA regulator** (Moving Average).
- Nedostatak MV regulatora jest da njegova svojstva kritično ovise o periodu uzorkovanja (velik iznos frekvencije diskretizacije – velika varijanca $u(k)$).
- MV regulator se koristi za stohastičke sisteme i sisteme zahvaćene poremećajima bijelog šuma.
- MA regulator predstavlja generalizaciju MV regulatora.

Regulator zasnovan na minimumu varijance

- Zasniva se na minimizaciji varijance izlaznog signala:

$$J_{MV} = E\{y^2(k)\}$$

- **Algoritam regulatora temelji se na**:
  - **Optimalnom d-koračnom prediktoru** (u koraku k daje predikciju izlaza procesa za trenutak $k + d$) – ideja je poništavanje d koračne predikcije izlaznog signala procesa u trenutku k (d – kašnjenje procesa).
  - **Minimalnoj pogrešci predikcije** (minimizacija varijance pogreške predikcije).
- Pogreška predikcije:

$$\tilde{y}(k+d \mid k) = y(k+d) - \hat{y}(k+d \mid k) \qquad (1)$$

Regulator zasnovan na minimumu varijance

- U izrazu (1) oznake imaju sljedeća značenja:
  - $y(k+d)$ - izlazni signal procesa u trenutku $k+d$.
  - $\hat{y}(k+d\,|\,k)$ - estimirani izlazni signal procesa u trenutku k za trenutak $k+d$ na temelju poznatih signala do k-tog trenutka.
  - $\tilde{y}(k+d\,|\,k)$ - pogreška predikcije za trenutak $k+d$ na temelju poznatih signala do k-tog trenutka.
- Algoritmom se traži:

$$\boxed{E\{\tilde{y}^2(k+d\,|\,k)\} = \min} \qquad (2)$$

gdje je E matematičko očekivanje.

Regulator zasnovan na minimumu varijance

- Matematički opis modela procesa:

$$\boxed{A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k)} \qquad (3)$$

gdje je:

$e(k)$ bijeli šum sa $E\{e(k)\} = 0$ i $E\{e^2(k)\} = \sigma_e^2$

- Matematički model procesa (3) može se napisati kao:

$$\boxed{y(k+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k+d)} \qquad (4)$$

- Drugi dio na desnoj strani modela (4) predstavlja **MA** (Moving Average) dio odziva.

Regulator zasnovan na minimumu varijance

- Za ulazni signal $u(k) = 0$ (ARMA model) izlazni signal ima oblik:

$$y_{MA}(k+d) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k+d) = \Gamma(q^{-1}) e(k+d) \quad (5)$$

gdje je:

$$\Gamma(q^{-1}) = 1 + \gamma_1 q^{-1} + \gamma_2 q^{-2} + \ldots$$

polinom beskonačnog reda nastao dijeljenjem polinoma C i A (konvergira uz C koji je Hurwitzov polinom).

Regulator zasnovan na minimumu varijance

- $e(k)$ se određuje iz prethodne realizacije izlaznog signala:

$$e(k)=\frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k)=[\Gamma(q^{-1})]^{-1}y(k) \qquad (6)$$

i ne može se predvidjeti signal na temelju prethodnog.

- Dijeljenjem jednadžbe na dio do trenutka k (poznati dio) i nepredvidivi dio u trenutku k dobiva se:

$$y_{MA}(k+d)=\underbrace{e(k+d)+\gamma_1 e(k+d-1)+\ldots+\gamma_{d-1}e(k+d)}_{\text{Nepredvidivi dio u trenutku } k}+$$
$$+\underbrace{\gamma_d e(k)+\gamma_{d+1}e(k-1)+\gamma_{d+2}e(k-2)+\ldots}_{\text{Poznato u trenutku } k}$$

Regulator zasnovan na minimumu varijance

- U trenutku k predikcija se može obaviti korištenjem poznatog dijela:

$$\hat{y}_{MA}(k+d\,|\,k) = \underbrace{\gamma_d e(k) + \gamma_{d+1} e(k-1) + \gamma_{d+2} e(k-2) + \ldots}_{\text{Poznato u trenutku } k} \tag{7}$$

- Pogreška predikcije MA procesa određena je nepredvidivim dijelom u trenutku k:

$$\tilde{y}_{MA}(k+d\,|\,k) = y(k+d) - \hat{y}_{MA}(k+d\,|\,k)$$

$$\hat{y}_{MA}(k+d\,|\,k) = \underbrace{e(k+d) + \gamma_1 e(k+d-1) + \ldots + \gamma_{d-1} e(k+1)}_{\text{Nepredvidivo u trenutku } k}$$

Regulator zasnovan na minimumu varijance

- Faktorizacijom polinoma dobiva se:

$$y_{MA}(k+d) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k+d) = \Gamma(q^{-1}) e(k+d)$$
$$= R'(q^{-1}) e(k+d) + \frac{S(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k) \quad (8)$$

gdje su:

$$R'(q^{-1}) = 1 + r_1^I q^{-1} + \ldots + r_{d-1}^I q^{-d+1}$$
$$S(q^{-1}) = s_0 + s_1 q^{-1} + \ldots + s_{n-1} q^{-n+1}$$

Regulator zasnovan na minimumu varijance

- Iz izraza (8):

$$y_{MA}(k+d) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k+d) = \Gamma(q^{-1})e(k+d)$$

$$= R'(q^{-1})e(k+d) + \frac{S(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k)$$

dobiva se Diophantova jednadžba:

$$\boxed{C(q^{-1}) = A(q^{-1})R'(q^{-1}) + q^{-d}S(q^{-1})}$$

odnosno:

$$\boxed{q^{-d}C(q) = A(q)R'(q) + S(q)} \qquad (9)$$

Regulator zasnovan na minimumu varijance

- U jednadžbi (9) R i S su kvocijent i ostatak dijeljenja $q^{d\text{-}1}C(q)$ s polinomom $A(q)$.
- **Optimalni prediktor** dobiva se minimizacijom varijance pogreške predikcije:

$$\boxed{E\{\tilde{y}_{MA}^{2}(k+d\,|\,k)\} = E\{[y_{MA}(k+d) - \hat{y}_{MA}(k+d\,|\,k)]^2\} = \min}$$

- Uvrštavanjem u ovaj izraz:

$$y_{MA}(k+d) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k+d) = R'(q^{-1})e(k+d) + \frac{S(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k)$$

i

$$y_{MA}(k) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k)$$

dobiva se izraz na sljedećem slajdu.

Optimalni prediktor

- Minimizacija varijance pogreške predikcije – optimalni prediktor:

$$E\{\tilde{y}_{MA}^2(k+d\,|\,k)\} =$$

$$= E\left\{\left[R'(q^{-1})e(k+d) + \frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_{MA}(k) - \hat{y}_{MA}(k+d\,|\,k)\right]^2\right\} = \min$$

ili

$$E\{\tilde{y}_{MA}^2(k+d\,|\,k)\} = E\left\{\left[R'(q^{-1})e(k+d)\right]^2\right\} +$$

$$+ E\left\{\left[\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_{MA}(k) - \hat{y}_{MA}(k+d\,|\,k)\right]^2\right\} +$$

$$+ 2E\left\{\left[R'(q^{-1})e(k+d)\right]\left[\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_{MA}(k) - \hat{y}_{MA}(k+d\,|\,k)\right]\right\}$$

Optimalni prediktor

- Optimalni prediktor dobiva se minimizacijom varijance pogreške predikcije:

$$
\begin{aligned}
E\{\tilde{y}_{MA}^{2}(k+d\,|\,k)\} = {} & E\left\{\left[R'(q^{-1})e(k+d)\right]^{2}\right\} + \\
& + E\left\{\left[\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_{MA}(k) - \hat{y}_{MA}(k+d\,|\,k)\right]^{2}\right\} + \\
& \underbrace{+\,2E\left\{\left[R'(q^{-1})e(k+d)\right]\left[\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_{MA}(k) - \hat{y}_{MA}(k+d\,|\,k)\right]\right\}}_{=\,\mathbf{0}}
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

- Sekvenca signala e nezavisna od varijable y (vremenski različiti trenuci, e je bijeli šum srednje vrijednosti 0).

Optimalni prediktor

- Treći član sume u izrazu (10) je 0 zbog različitih vremena uzoraka $e(k+d)$ u odnosu na $y(k)$ i $u(k)$.
- **Minimizacija – izjednačenje drugog člana sume s nulom**, to jest:

$$\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_{MA}(k) - \hat{y}_{MA}(k+d \mid k) = 0$$

- Iz prethodnog izraza slijedi:

$$\boxed{\hat{y}_{MA}(k+d \mid k) = \frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_{MA}(k)} \qquad (11)$$

- Uz prediktor oblika (11) varijanca pogreške je:

$$\boxed{E\{\tilde{y}_{MA}^2(k+d \mid k)\} = E\left\{[R'(q^{-1})e(k+d)]^2\right\} = (1 + r_1'^2 + \ldots + r_{d-1}'^2)\sigma_e^2}$$

Optimalni prediktor ARMAX modela

- Ako se uzme ARMAX model procesa:

$$
\begin{aligned}
y(k+d) &= \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k+d) \\
&= \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) + y_{MA}(k+d)
\end{aligned}
$$

tada predikcijska forma ARMAX modela procesa ima oblik:

$$
y(k+d) = R'(q^{-1})e(k+d) + \frac{S(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k) + \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k)
$$

Optimalni prediktor ARMAX modela

- Izražavajući $y(k)$ za ARMAX model u obliku:

$$y(k) = q^{-d}\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k)$$

pogreška $e(k)$ može se izraziti sa:

$$e(k) = \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) - q^{-d}\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k)$$

- Predikcijska froma ARMAX modela procesa ima oblik:

$$y(k+d) = R'(q^{-1})e(k+d) + \\ + \frac{S(q^{-1})}{A(q^{-1})}\left[\frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) - q^{-d}\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k)\right] + \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k)$$

Optimalni prediktor ARMAX modela

- Nakon sređivanja dobiva se sljedeća predikcijska forma ARMAX modela procesa:

$$
\begin{aligned}
y(k+d) &= R'e(k+d) + \frac{S}{C}y(k) + \frac{B(C - q^{-d}S)}{AC}u(k) \\
&= R'e(k+d) + \frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k)
\end{aligned} \tag{12}
$$

- Optimalni prediktor dobiva se iz minimuma varijance pogreške:

$$
E\{\tilde{y}^2(k+d \mid k)\} = E\left\{[y(k+d) - \hat{y}(k+d \mid k)]^2\right\} = \min
$$

Optimalni prediktor ARMAX modela

- Nadalje se dobiva:

$$E\{\tilde{y}^2(k+d\,|\,k)\} = E\left\{[R'e(k+d)]^2\right\} +$$
$$+E\left\{\left[\frac{S}{C}y(k)+\frac{BR'}{C}u(k)-\hat{y}(k+d\,|\,k)\right]^2\right\}+$$
$$+2E\left\{[R'e(k+d)]\left[\frac{S}{C}y(k)+\frac{BR'}{C}u(k)-\hat{y}(k+d\,|\,k)\right]\right\}$$

- Zbog nekolinearnosti signala treći član je nula, a minimum se postiže izjednačavanjem s nulom drugog člana.

Optimalni prediktor ARMAX modela

- Izjednačavanje drugog člana s nulom daje:

$$\hat{y}(k+d\,|\,k)=\frac{S}{C}y(k)+\frac{BR'}{C}u(k)$$

- Uz ovakav prediktor pogreška slijeđenja je:

$$\tilde{y}(k+d\,|\,k)=y(k+d)-\hat{y}(k+d\,|\,k)=R'e(k+d) \quad (13)$$

dok je njena varijanca:

$$E\{\tilde{y}^2_{MA}(k+d\,|\,k)\}=E\left\{[R'(q^{-1})e(k+d)]^2\right\}=(1+r_1'^2+\ldots+r_{d-1}'^2)\sigma_e^2$$

Optimalni prediktor ARMAX modela

- Optimalni prediktor se može prikazati kao deterministički sistem s dva ulaza $u(k)$ i $y(k)$ te pogreškom predikcije koja je MA proces.

$$\boxed{\hat{y}(k+d \mid k) = \frac{S}{C}\,y(k) + \frac{BR'}{C}\,u(k)} \qquad (14)$$

$$\boxed{y(k+d) = \tilde{y}(k+d \mid k) + \hat{y}(k+d \mid k)} \qquad (15)$$

- Izlaz procesa u prediktivnoj formi ima oblik:

$$\boxed{\tilde{y}(k+d \mid k) = y(k+d) - \hat{y}(k+d \mid k) = R'e(k+d)} \qquad (16)$$

- Komponente (14) i (15) su ortogonalne, budući da predikcija ovisi o slučajnim poremećajima do trenutka k, a pogreška o slučajnim poremećajima nakon trenutka k.

Optimalni prediktor ARMAX modela

- Kriterij optimalnosti se može rastaviti u dva dijela.
- Za optimalni prediktor vrijedi:

$$\boxed{\begin{aligned} &E\left\{\tilde{y}(k+d \mid k)\right\}=0 \\ &E\left\{\tilde{y}^{2}(k+d \mid k)\right\}=\min \end{aligned}} \qquad (17)$$

- **Optimalni prediktor je minimum varijancni estimator**.

Regulator po minimumu varijance

- Koristi se za upravljanje stohastičkim sistemima.
- Signal upravljanja poništava d-koračnu predikciju izlaznog signala procesa $y(k+d|k)$.
- Pretpostavka kauzalnog upravljanja: $u(k)$ ovisi o $y(k)$, $y(k\text{-}1),\ldots, u(k\text{-}1), u(k\text{-}2),\ldots$, tj. ne ovisi o budućim signalima y i u.
- Varijanca izlaznog signala prethođenog za d koraka:

$$y(k+d) = R'e(k+d) + \frac{S}{C}y(k) + \frac{B(C-q^{-d}S)}{AC}u(k)$$

$$= R'e(k+d) + \frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k)$$

ima oblik dan na sljedećem slajdu.

Regulator po minimumu varijance

- Varijanca izlaznog signala $y(k+d)$ dana je na sljedeći način:

$$E\{y^2(k+d)\} = E\left\{[R'e(k+d)]^2\right\} + E\left\{\left[\frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k)\right]^2\right\}$$

$$+2E\left\{[R'e(k+d)]\left[\frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k)\right]\right\}$$

- Zadnji sumand je nula zbog različitih vremena uzoraka $e(k+d)$ u odnosu na $y(k)$ i $u(k)$:
  - e je signal bijelog šuma koji se ne može predvidjeti iz prošlih koraka y i u.
  - Očekivanje je nula.

Regulator po minimumu varijance

- Upravljanje po minimumu varijance bit će ostvareno uz:

$$\boxed{\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k)+\frac{B(q^{-1})R'(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k)=0}$$

odnosno:

$$\boxed{B(q^{-1})R'(q^{-1})u(k)=-S(q^{-1})y(k)}$$

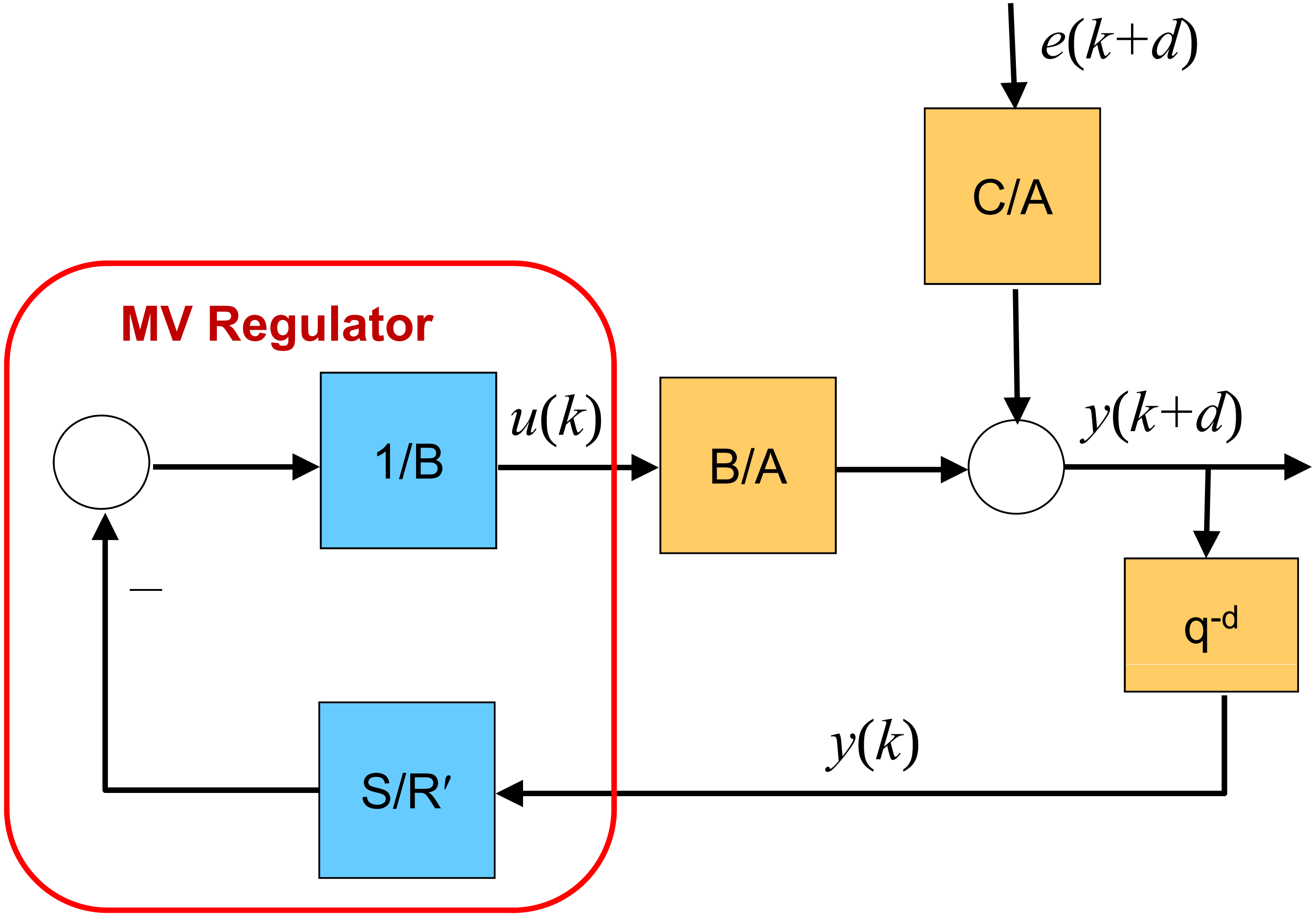
- Zakon upravljanja po minimumu varijance je oblika:

$$\boxed{u(k)=\frac{-S(q^{-1})}{B(q^{-1})R'(q^{-1})}y(k)=-\frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})}y(k)} \qquad (18)$$

gdje je: $R(q^{-1})=B(q^{-1})R'(q^{-1})$

Regulator po minimumu varijance

- Blokovski prikaz sistema sa regulatorom po minimumu varijance (18).



Regulator po minimumu varijance

- **Svojstva MV regulatora**:
  - Posjeduje jedan stupanj slobode.
  - Nema unaprijednog djelovanja.
  - Djeluje na polove sistema, nule procesa se ne mogu premještati.
  - Polinomi R' i S određuju se rješavanjem Diophantove jednadžbe:

$$\boxed{A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})S(q^{-1}) = B(q^{-1})C(q^{-1})}$$

odnosno:

$$\boxed{A(q)R(q) + B(q)S(q) = q^{d-1}B(q)C(q)}$$

Regulator po minimumu varijance

- Potreba postavljanja polova i nula procesa
- Uvrštavanjem upravljačkog signala (18) u ARMAX model procesa (3) može se odrediti utjecaj poremećaja $e(k)$ na odziv $y(k)$:

$$\left[A(q^{-1}) + q^{-d} \frac{B(q^{-1})S(q^{-1})}{B(q^{-1})R'(q^{-1})} \right] y(k) = C(q^{-1})e(k)$$

odnosno:

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})R'(q^{-1})C(q^{-1})}{B(q^{-1})[A(q^{-1})R'(q^{-1}) + q^{-d}S(q^{-1})]} e(k)$$

$$= \frac{R(q^{-1})C(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}S(q^{-1})B(q^{-1})} e(k)$$

Regulator po minimumu varijance

- Korištenjem Diophantove jednadžbe:

$$A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})S(q^{-1}) = B(q^{-1})C(q^{-1})$$

dobije se:

$$y(k) = \frac{BR'C}{BC}e(k)$$

za stabilan polinom C.

- Uz stabilan polinom B, tj. minimalno fazni proces B/A, pogreška regulacije jednaka je pogreški predikcije:

$$y(k) = R'(q^{-1})e(k)$$

Regulator po minimumu varijance

- Prema tome, upotrebom algoritma upravljanja (18) signal na izlazu procesa zadovoljava jednadžbu:

$$y(k) = \frac{BR'C}{BC} e(k)$$

- $y(k)$ će biti MA proces d-1 reda (polinom R je d-1 reda) s varijancom:

$$E\{\tilde{y}_{MA}^{2}(k+d \mid k)\} = E\left\{[R'(q^{-1})e(k+d)]^2\right\} = (1 + r_1'^2 + \ldots + r_{d-1}'^2)\sigma_e^2$$

- U izrazu za varijancu, ***d*** **predstavlja broj perioda diskretizacije potrebnih da se promjena s ulaza prenese na izlaz**.

Regulator po minimumu varijance

MV regulator s praćenjem referentnog signala

- Nadalje se izrazu (12) oduzme s lijeve i desne strane referentni signal $u_r(k+d)$:

$$y(k+d)-u_r(k+d)=R'e(k+d)+\frac{S}{C}y(k)+\frac{B(C-q^{-d}S)}{AC}u(k)-u_r(k+d)$$

- Nakon toga se odredi varijanca dobivenog izraza:

$$E\left\{[y(k+d)-u_r(k+d)]^2\right\}=E\left\{[R'e(k+d)]^2\right\}+$$
$$+E\left\{\left[\frac{S}{C}y(k)+\frac{BR'}{C}u(k)-u_r(k+d)\right]^2\right\}+$$
$$+2E\left\{[R'e(k+d)]\left[\frac{S}{C}y(k)+\frac{BR'}{C}u(k)-u_r(k+d)\right]\right\}$$

Regulator po minimumu varijance

- Regulator po minimumu varijance određen je sa:

$$B(q^{-1})R'(q^{-1})u(k) = C(q^{-1})u_r(k+d) - S(q^{-1})y(k)$$

odnosno:

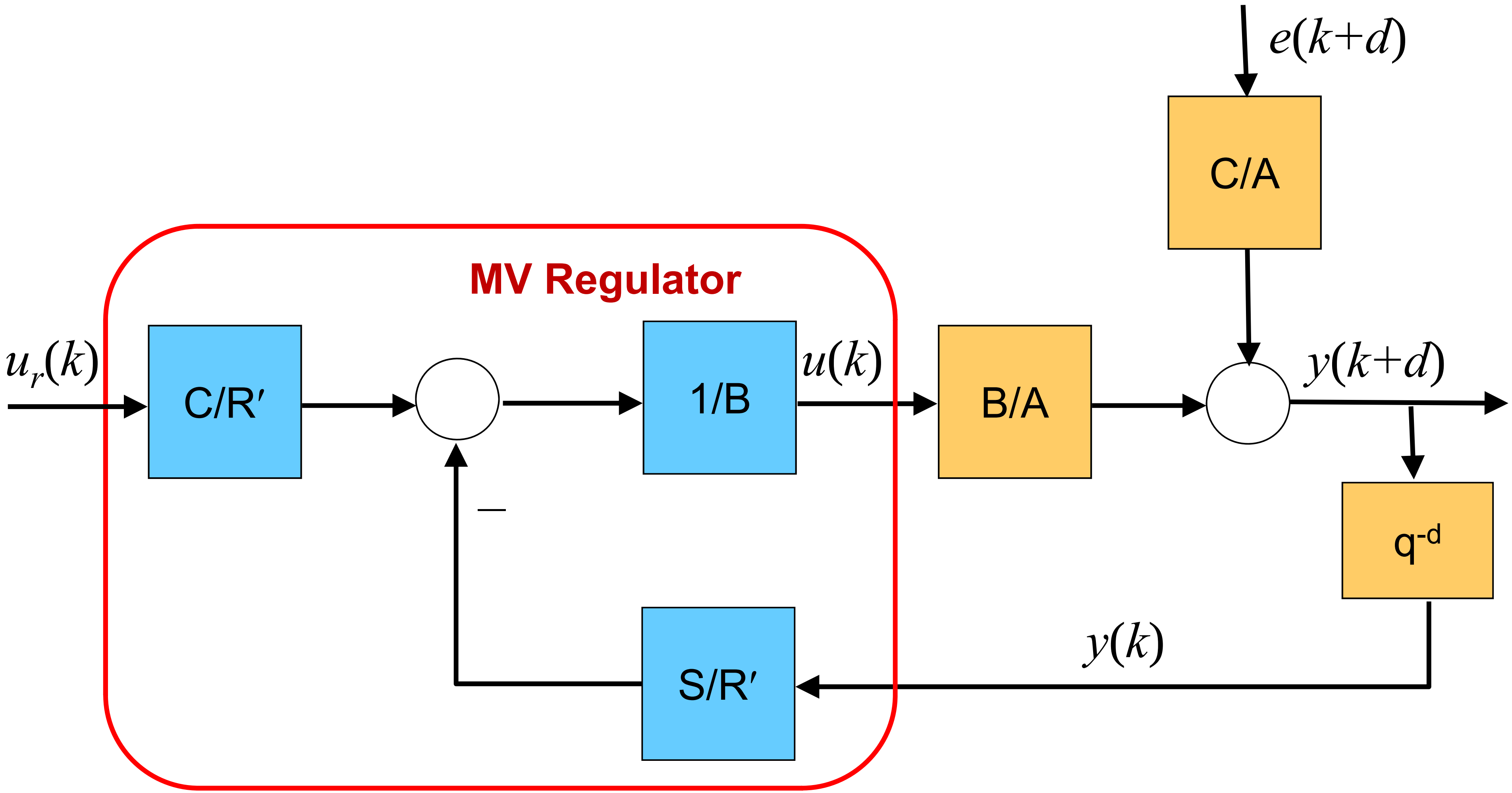
$$R(q^{-1})u(k) = C(q^{-1})u_r(k+d) - S(q^{-1})y(k)$$

- Prema tome, konačni oblik regulatora po minimumu varijance je:

$$u(k) = \frac{1}{B(q^{-1})R'(q^{-1})}\left[C(q^{-1})u_r(k+d) - S(q^{-1})y(k)\right] \quad (19)$$

Regulator po minimumu varijance

- Regulator opisan jednadžbom (19) obično se koristi uz $u_r(k) = \text{konst.}$



Regulator po minimumu varijance

- Izlazni signal je oblika:

$$y(k+d)=\frac{BC}{B(AR'+q^{-d}S)}u_r(k)=\frac{BC}{BC}u_r(k) \qquad (20)$$

- Karakteristični polinom zatvorenog kruga je BC.
- Uz pretpostavku da je C stabilan polinom, stabilan sistem upravljanja se postiže uz B/A minimalno fazni proces.
- Tada će biti:

$$\boxed{y(k+d)=u_r(k)}$$

Regulator po minimumu varijance

- MV regulator s praćenjem determinističkog referentnog signala krati sve nule procesa.
- Mogu se očekivati problemi kod neminimalno-faznih sistema:
  - Nule procesa izvan jedinične kružnice.
  - Signal upravljanja se raspiruje.
- Potrebno faktorizirati polinom B:
  - $B = B^{-}B^{+}$, gdje je B^{-} polinom sa svim nulama izvan jediničnog kruga (slabo prigušenje) i B^{+} polinom sa svim nulama unutar jediničnog kruga (dobro prigušenje).
  - Dobije se **MA (Moving Average) upravljanje**, tačnije suboptimalno upravljanje.

MA (Moving Average) upravljanje

- **Korištenjem faktorizacije polinoma B i kraćenjem nula procesa unutar jedinične kružnice kod MV algoritma dobiva se MA algoritam**.
- MA zakon upravljanja:

$$u(k) = \frac{-S(q^{-1})}{B^{+}(q^{-1})R'(q^{-1})} y(k) = -\frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})} y(k) \tag{21}$$

  gdje je $R = R'B^{+}$.

- Ako se koristi ARMAX model uz rastavljanje polinoma B na stabilni i nestabilni dio:

$$A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}B^{-}(q^{-1})B^{+}(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k)$$

  dobiva se Diophantova jednadžba oblika:

$$A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}B^{+}(q^{-1})S(q^{-1}) = B^{+}(q^{-1})C(q^{-1})$$

MA (Moving Average) upravljanje

- Polinomi R i S dobivaju se rješavanjem Diophantove jednadžbe.
- Svojstva MA upravljanja:
  - Red polinoma R' je $d+nb^{+}-1$
  - MA proces višeg reda od MV procesa:
    - Red MA procesa $d + nb^{+} - 1$
    - Red MV procesa $d - 1$

MA (Moving Average) upravljanje

- **Indirektni MA algoritam.**
- **Početni podaci**: poznat red polinoma na, nb i nc te period diskretizacije.
- **Rekurzivni algoritam**:
  - **Korak 1**. Estimacija parametara sistema:
    - ✓ mjerenje signala $u(k)$, $y(k)$
    - ✓ određivanje koeficijenata polinoma A, B i C
  - **Korak 2**. Proračun koeficijenata polinoma R i S rješavanjem Diophantove jednadžbe:

$$\boxed{A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}B^{+}(q^{-1})S(q^{-1}) = B^{+}(q^{-1})C(q^{-1})}$$

  - **Korak 3**. Proračun algoritma upravljanja:

$$\boxed{u(k) = \frac{-S(q^{-1})}{B^{+}(q^{-1})R'(q^{-1})}y(k) = -\frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})}y(k)}$$

MA (Moving Average) upravljanje

- **Direktni implicitni MA algoritam.**
- Zaobilazi prvi korak prethodnog algoritma.
  - Koeficijenti polinoma R i S rekurzivno se proračunavaju u bloku za identifikaciju parametara proces.
- Reparametrizacija modela procesa
  - Parametri regulatora se direktno pojavljuju u jednadžbi dinamike procesa
    - ✓ Do izraza se dolazi djelovanjem Diophantove jednadžbe na signal y_k:

$$\begin{aligned} Cy(k) &= AR'y(k) + Sy(k-d) \\ &= R'[Bu(k-d) + Ce(k)]y(k) + Sy(k-d) \\ &= Ru(k-d) + Sy(k-d) + R'Ce(k) \end{aligned}$$

MA (Moving Average) upravljanje

- Na kraju se dobiva:

$$y(k+d) = \frac{1}{C}[Ru(k) + Sy(k) + R'e(k+d)]$$

- **MA direktna metoda – algoritam**
- **Početni podaci**: poznat red polinoma R i S te horizont predikcije d.
- **Rekurzivni algoritam**:
  - estimacija koeficijenata polinoma R i S
  - proračun algoritma upravljanja.

MA (Moving Average) upravljanje

Karakteristike MA algoritma:

- **Razlika u odnosu na MV algoritam u broju nula koje krati**:
  - Uz $d = na - nb$
    - ✓ krate se sve nule procesa
  - Uz $d = na$
    - ✓ ne krati se niti jedna nula procesa.
- **Veliki signal upravljanja**
  - Smanjenje signala – uvođenjem u funkciju cilja dodatnih težinskih koeficijenata.

LQG upravljanje

- Općenita kriterijska funkcija:

$$\boxed{J = E\{y^2(k) + \rho u^2(k)\}} \tag{22}$$

opisuje varijance izlaza i upravljačkih signala.

- Upravljački zakon koji minimizira kriterijsku funkciju (22) predstavlja **LQG (Linear Quadratic Gaussian) regulator**.
- Ako je $\rho = 0$ dobiveni regulator je MV regulator.
- Minimizacija funkcije (22) vodi ka regulatoru s fiksnim pojačanjem koji se može interpretirati u obliku postavljanja polova (pole placement).

LQG upravljanje

- Da bi se dobilo rješenje LQG problema, potrebno je prvo riješiti problem **spektralne faktorizacije**, to jest, naći normirani (monic) stabilni polinom n-tog reda $P(q)$ koji zadovoljava jednadžbu:

$$rP(q)P(q^{-1}) = \rho A(q)A(q^{-1}) + B(q)B(q^{-1})$$

- LQG regulator se nakon toga dobiva kao rješenje Diophantove jednadžbe:

$$C(q)P(q) = A(q)R(q) + B(q)S(q) \tag{23}$$

- Za postizanje jednoznačnog rješenja sa $\deg R = \deg S = n$ potrebno je načiniti neke daljnje restrikcije na rješenje dano jednadžbom (23).

LQG upravljanje

- Interpretacija jednadžbe (23) je da LQG regulator postavlja polove zatvorenog kruga u $P(q)$, dano spektralnom faktorizacijom, i u $C(q)$, koji karakterizira poremećaje.
- Daljnje restrikcije su povezane sa Teoremom 1. koji će se razmatrati kasnije.
- Procedura LQG dizajna može se također koristiti u sintezi samopodesivog regulatora (**LQG STR**).
- U vezi s tim promatrajmo model procesa:

$$\boxed{A(q)y(q) = B(q)u(k) + C(q)e(k)} \tag{24}$$

i kriterijsku funkciju stacionarnog stanja:

$$\boxed{J = E\{(y(k) - y_m(k))^2 + \rho u^2(k)\}} \tag{25}$$

LQG upravljanje

- Optimalni zakon upravljanja koji minimizira jednadžbu (25) za sistem opisan jednadžbom (24) dan je teoremom:
- **Teorem 1**. **LQG upravljanje**. Promatrajmo sistem opisan jednadžbom (24) i neka su $A(q)$ i $C(q)$ normirani polinomi stupnja n. Petpostavimo da $C(q)$ ima sve nule unutar jedinične kružnice i pretpostavimo da nema netrivijalnih polinoma koji dijele $A(q)$, $B(q)$ i $C(q)$. Neka je $A_2(q)$ najveći zajednički sadržilac polinoma $A(q)$ i $B(q)$ i neka su $A_2^+(q)$ polinom stupnja l koji predstavlja faktor od $A_2(q)$ sa svim nulama unutar jedinične kružnice i $A_2^-(q)$ polinom stupnja m koji predstavlja faktor od $A(q)$ koji ima sve nule izvan jedinične kružnice ili na jediničnoj kružnici.

LQG upravljanje

- Prihvatljiv zakon upravljanja koji minimizira jednadžbu (25) sa $\rho > 0$ dan je sa:

$$R(q)u(k) = -S(q)y(k) + T(q)y_m(k) \tag{26}$$

gdje su R i S polinomi stupnja $n + m$:

$$R(q) = A_2^-(q)\tilde{R}(q)$$
$$S(q) = z^m\tilde{S}(q)$$

pri čemu R i S zadovoljavaju Diophantovu jednadžbu:

$$A_1(q)A_2^-(q)\tilde{R}(q) + q^m B_1(q)\tilde{S}(q) = P_1(q)C(q) \tag{27}$$

LQG upravljanje

- U prethodnoj jednadžbi je:

$$\deg \tilde{R}(q) = \deg \tilde{S}(q) = n \;\; \text{i} \;\; \tilde{S}(0) = 0$$

- Osim toga je:

$$\boxed{\begin{aligned} A(q) &= A_1(q)A_2(q) \\ B(q) &= B_1(q)A_2(q) \\ \tilde{B}(q) &= B_1(q)A_2^+(q) \end{aligned}}$$

- Polinom $P(q)$ je dan sa:

$$\boxed{P(q) = A_2^+(q)P_1(q)}$$

LQG upravljanje

- U prethodnoj jednadžbi polinom $P_1(q)$ je rješenje problema spektralne faktorizacije:

$$\boxed{rP_1(q)P_1(q^{-1}) = \rho A_1(q)A_2^-(q)A_1(q^{-1})A_2^-(q^{-1}) + B_1(q)B_1(q^{-1})} \tag{28}$$

sa $\deg P_1(q) = \deg A_1(q) + A_2^-(q)$

- Polinom $T(q)$ je dan sa:

$$\boxed{T(q) = t_0 q^m C(q)}$$

gdje je

$$\boxed{t_0 = P_1(1) / B_1(1)}$$

- Ovim je završen opis teorema.

LQG upravljanje

- Kombiniranjem prethodnih jednadžbi dobiva se:

$$\boxed{A(q)B(q)+B(q)S(q)=A_2(q)P_1(q)C(q)}$$

- LQG rješenje se stoga može interpretirati kao regulator s postavljenjem polova, gdje su polovi postavljeni u nule od A_2, P_1 i C.
- Regulator također ima svojstvo da A_2^- dijeli R.
- Ovo je primjer **principa internog modela**.
- Korištenje ovog principa implicira da je model poremećaja uključen u regulator.
- Za rješenje ovog problema sinteze potrebno je riješiti problem spektralne faktorizacije (28) i Diophantovu jednadžbu (27).

LQG upravljanje

- Rješenje LQG problema dano Teoremom 1. je blisko povezano s problemom dizajna postavljanjem polova.
- Rješenje problema spektralne faktorizacije daje polove zatvorenog sistema.
- Drugi dio algoritma može se interpretirati kao problem postavljanja polova.

Adaptivno prediktivno upravljanje

- Kod MV ili MA regulatora izlaz je prediktivan samo jedanput u budućnosti.
- **Predikcijski horizont d je parametar u dizajnu**.
- Prediktivni izlaz može se također računati za različite predikcijske horizonte i zatim koristiti u kriterijskoj funkciji.
- **Prediktivni algoritmi upravljanja zasnovani su na pretpostavljenom modelu procesa i na pretpostavljenom scenariju za buduće upravljačke signale.**
- Ovim se dobiva sekvenca upravljačkih signala.
- Samo se prvi signal primjenjuje na proces, te se nakon toga računa nova sekvenca upravljačkih signala kada se dobiju nova mjerenja.

Adaptivno prediktivno upravljanje

- Regulator koji posjeduje navedena svojstva je **regulator s uzmičućim horizontom** (receding-horizont).
- Postoje različite varijante prediktivnog upravljanja:
  - **Modelsko prediktivno upravljanje.**
  - **Dinamičko matrično upravljanje.**
  - **Generalizirano prediktivno upravljanje.**
  - **Upravljanje zasnovano na proširenom horizontu,...**
- Navedene metodologije nalaze veliku primjenu u upravljanju hemijskim procesima.

Adaptivno prediktivno upravljanje

Predikcija izlaza

- Osnovna ideja u algoritmima prediktivnog upravljanja je ponovno napisati model procesa da postigne eksplicitan izraz za izlaz u budućnosti.
- Promatrajmo deterministički proces:

$$\boxed{A^*(q^{-1})y(k) = B^*(q^{-1})u(k-d_0)}$$

i uvedimo identitet:

$$\boxed{1 = A^*(q^{-1})F_d^*(q^{-1}) + q^{-d}G_d^*(q^{-1})} \qquad (29)$$

gdje je:

$$\deg F_d^* = d-1$$

$$\deg G_d^* = n-1$$

Adaptivno prediktivno upravljanje

- Indeks d koristi se da indicira da je predikcijski horizont d koraka.
- Pretpostavlja se da je $d \geq d_0$.
- Polinomski identitet (29) može se koristiti za predikciju izlaza d koraka unaprijed.
- Slijedi da je:

$$\boxed{\begin{aligned} y(k+d) &= A^* F_d^* y(k+d) + G_d^* y(k) \\ &= B^* F_d^* u(k+d-d_0) + G_d^* y(k) \end{aligned}} \qquad (30)$$

- Nadalje uvodimo:

$$\boxed{B^*(q^{-1}) F_d^*(q^{-1}) = R_d^*(q^{-1}) + q^{-(d-d_0+1)} \tilde{R}_d^*(q^{-1})} \qquad (31)$$

Adaptivno prediktivno upravljanje

- U prethodnoj jednadžbi je:

$$\deg R_d^* = d - d_0$$

$$\deg \tilde{R}_d^* = n - 2$$

- Koeficijenti od R_d* predstavljaju prvih d - $d_0 + 1$ izraza odziva na pulsnu pobudu otvorenog sistema.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{q^{-d_0}B^*}{A^*} &= q^{-d_0}B^*\left(F_d^* + q^{-d}\frac{G_d^*}{A^*}\right)\\ &= q^{-d_0}R_d^*(q^{-1}) + q^{-(d+1)}\tilde{R}_d^*(q^{-1})\\ &+ \frac{B^*(q^{-1})G_d^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}q^{-(d+d_0)}\end{aligned}} \qquad (32)$$

Adaptivno prediktivno upravljanje

- Stupnjevi zadnja dva izraza su najmanje – $(d + 1)$.
- Slijedi da $R_d{}^*$ je prvi dio pulsnog odziva, budući da je $R_d{}^* = d - d_0$.
- Jednadžba (30) može se ponovo napisati kao:

$$\boxed{\begin{aligned} y(k+d) &= R_d^*(q^{-1})u(k+d-d_0) + \tilde{R}_d^*(q^{-1})u(k-1) \\ &\quad + G_d^*(q^{-1})y(k) \\ &= R_d^*(q^{-1})u(k+d-d_0) + \tilde{y}_d(k) \end{aligned}} \qquad (33)$$

- Izraz $R_d^*(q^{-1})u(k+d-d_0)$ ovisi o $u(k),\ldots,u(k+d-d_0)$
- $\tilde{y}_d$ je funkcija $u(k - 1)$, $u(k - 2),\ldots$, i $y(k)$, $y(k - 1),\ldots$

Adaptivno prediktivno upravljanje

- Varijabla $\tilde{y}_d$ može se interpretirati kao ograničena predikcija od $y(k + d)$ uz pretpostavku da su $u(k)$ i budući upravljački signali jednaki nuli.
- Zbog toga izlaz u trenutku $k + d$ ovisi o budućim (nadolazećim) upravljačkim signalima (ako je $d > d_0$), odabranom upravljačkom signalu i ranijim ulazima i izlazima.
- Ako je $d > d_0$ potrebno je načiniti određene pretpostavke o budućim upravljačkim signalima.
- Jedna od mogućnosti je pretpostaviti da će upravljački signal ostati konstantan, to jest da je:

$$\boxed{u(k) = u(k-1) = \cdots = u(k+d-d_0)} \tag{34}$$

Adaptivno prediktivno upravljanje

- Drugi način je odrediti zakon upravljanja koji omogućuje da $y(k+d)$ slijedi željenu vrijednost uz istovremeno minimiziranje upravljačkih napora preko predikcijskog horizonta, to jest da minimizira:

$$\boxed{\sum_{l=k}^{k+d} u(l)^2} \tag{35}$$

- Treći način je pretpostaviti da će inkrement upravljačkog signala biti nula nakon nekog vremena.
- Ovo se koristi u **generaliziranom prediktivnom upravljanju (GPC)**, koji se diskutira u nastavku.

Adaptivno prediktivno upravljanje

Upravljanje s konstantnim nadolazećim upravljačkim signalom

- Promatrajmo jednadžbu (33) i pretpostavimo da je predikcijski izlaz jednak $y(k+d) = y_m(k+d)$.
- Ako pretpostavimo da jednadžba (34) vrijedi, tada $u(k)$ treba biti odabran tako da je:

$$\boxed{y(k+d) = (R_d^*(1) + q^{-1}\widetilde{R}_d^*(q^{-1}))u(k) + G_d^*(q^{-1})y(k)}$$

- Ovo daje sljedeći zakon upravljanja:

$$\boxed{u(k) = \frac{y_m(k+d) - G_d^*(q^{-1})y(k)}{R_d^*(1) + \widetilde{R}_d^*(q^{-1})q^{-1}}} \qquad (36)$$

Adaptivno prediktivno upravljanje

- Ovaj upravljački signal se nakon generiranja dovodi na proces.
- U sljedećem intervalu uzorkovanja dobiva se novo mjerenje, nakon čega se ponovo primjenjuje jednadžba (36).
- Važno je napomenuti da se vrijednost upravljačkog signala mijenja radije negoli drži konstantnom, kako je pretpostavljeno u jednadžbi (36).
- Nakon toga se koristi **upravljanje s uzmičućim horizontom**.
- Napomenimo da se radi o upravljanju koje je vremenski promjenjivo, što je u suprotnosti s **linearnim kvadratnim regulatorom sa fiksnim horizontom**.

Adaptivno prediktivno upravljanje

- Analizirajmo šta se događa sa zatvorenim sistemom upravljanja kada se jednadžba (36) koristi za upravljanje procesa:

$$\boxed{A^*(q^{-1})y(k) = B^*(q^{-1})u(k-d_0)}$$

- Sada je potrebno načiniti računanja sa unaprijednim operatorom pomaka, budući da se polovi u ishodištu mogu predvidjeti.
- Identitet jednadžbe (29) može se zapisati u formi operatora unaprijednog pomaka kao:

$$\boxed{q^{n+d-1} = A(q)F_d(q) + G_d(q)} \qquad (37)$$

Adaptivno prediktivno upravljanje

- Karakteristični polinom zatvorenog sistema je:

$$P(q) = A(q)(q^{n-1}R_d(1) + \tilde{R}_d(q)) + G_d(q)B(q) \quad (38)$$

gdje je:

$$\deg P = \deg A + n - 1 = 2n - 1$$

- Jednadžba (37) može se ponovo napisati kao:

$$\begin{aligned} B(q)q^{n+d-1} &= A(q)B(q)F_d(q) + G_d(q)B(q) \\ &= A(q)(q^{n-1}R_d(q) + \tilde{R}_d(q)) + G_d(q)B(q) \end{aligned}$$

- Slijedi:

$$A(q)\tilde{R}_d(q) + G_d(q)B(q) = B(q)q^{n+d-1} - A(q)q^{n-1}R_d(q)$$

Adaptivno prediktivno upravljanje

- Prethodni izraz daje:

$$\boxed{P(q) = q^{n-1}A(q)R_d(1) + q^{n-1}(q^d B(q) - A(q)R_d(q))}$$

- Ako je proces stabilan, slijedi iz (32) da zadnji izraz iščezava kada $d \to \infty$.
- Tako imamo:

$$\boxed{\lim_{d\to\infty} P(q) = q^{n-1}A(q)R_d(1)}$$

- Svojstva prediktivnog zakona upravljanja se ilustriraju u sljedećem primjeru.

Adaptivno prediktivno upravljanje

- **Primjer 1**. **Prediktivno upravljanje**.
- Promatra se model procesa:

$$y(k+1)+ay(k)=bu(k)$$

- Identitet jednadžbe (37) daje:

$$q^{d}=(q+a)(q^{d-1}+f_1q^{d-2}+\cdots+f_{d-1})+g_0$$

- Slijedi da su:

$$F(q)=q^{d-1}+f_1q^{d-2}+\cdots+f_{d-1}$$

$$G(q)=(-a)^{d}$$

$$R_d=bF(q)$$

$$\widetilde{R}_d(q)=0$$

Adaptivno prediktivno upravljanje

- Upravljački zakon, kada je $y_m = 0$, postaje:

$$u(k) = -\frac{(-a)^d}{b(1-a+\cdots+(-a)^{d-1})}y(k) = -\frac{(-a)^d(1+a)}{b(1-(-a)^d)}y(k)$$

- Karakteristični polinom zatvorenog sistema je:

$$P(q) = q + a + \frac{(-a)^d(1+a)}{1-(-a)^d}$$

koji ima pol:

$$p_d = -\frac{1+(-a)^d}{1-(-a)^d}$$

Adaptivno prediktivno upravljanje

- Ako je $a \leq 0$ lokacija pola je dana sa:

$$0 \leq p_d < -a \quad |a| \leq 1 \ \text{(stabilan otvoreni sistem)}$$

$$0 \leq p_d < 1 \quad |a| \geq 1 \ \text{(nestabilan otvoreni sistem)}$$

- Pol zatvorenog sistema za različite vrijednosti a i d prikazan je na sljedećoj slici.
- Primjer indicira da može biti dovoljna upotreba predikcijskog horizonta od pet do deset uzoraka.
- Moguće je generalizirati rezultat u ovom primjeru na sisteme višeg reda.
- Odziv zatvorenog sistema bit će sporiji ili će sistem biti nestabilan kada se predikcijski horizont povećava.

Adaptivno prediktivno upravljanje

- Pol zatvorenog sistema:

$$p_d = \frac{a^d - a}{a^d - 1}$$

kao funkcija d-a za različite a.