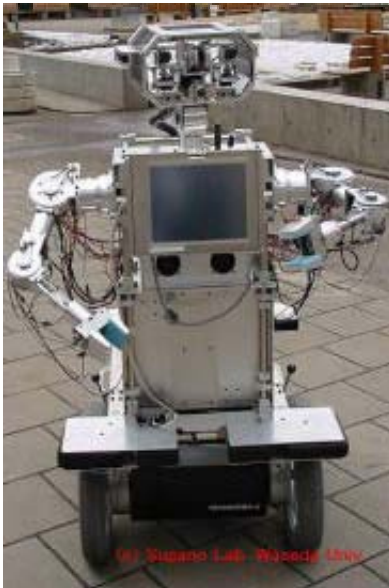


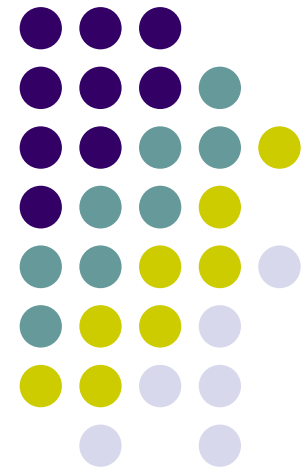
Lekcija 10: *Gradnja mape robotske okoline*



Prof.dr.sc. Jasmin Velagić
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

Kolegij: Mobilna robotika

2012/2013





10.1. Uvod

- Postupak **gradnje (konstrukcije) mape** modela robotske okoline temelji se na mjerenjima senzora.
- Sposobnost gradnje mape okoline mobilnog robota predstavlja važan zahtjev u mnogim primjenama mobilnog robota.
- Levitt i Lawton (1990) su postavili tri osnovna pitanja koja definiraju mapiranje i navigaciju mobilnih robota:
 - **Gdje sam ja?**
 - **Kako da iz trenutnog položaja stignem do drugih mjesta?**
 - **Gdje se nalaze druga mjesta u odnosu na mene?**

Uvod

- Mape obično predstavljaju strukturalne elemente u nekoj apstraktnoj domeni (naprimjer, sa semantičkim oznakama).
- U vezi s tim **mobilni robot mora biti sposoban povezati svoju trenutnu lokaciju direktno sa vlastitom predodžbom svoje okoline.**
- Mape često ovise o interpretativnim sposobnostima osoba koje ih grade i njihovih sposobnosti da načine funkcionalne zaključke, odnosno sposobnosti koje često izostaju u računarskim sistemima.
- Nadalje, **senzorske karakteristike objekata su relevantne u gradnji i razumijevanju mapa.**

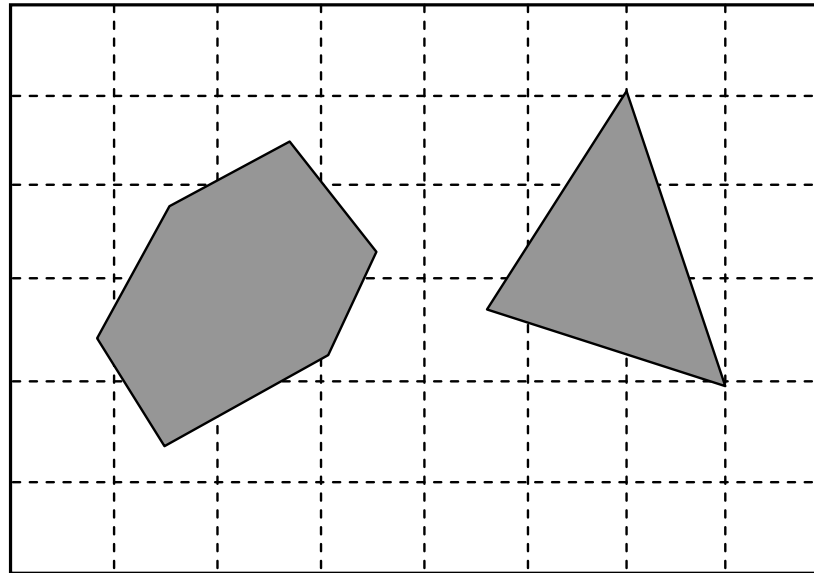


Uvod

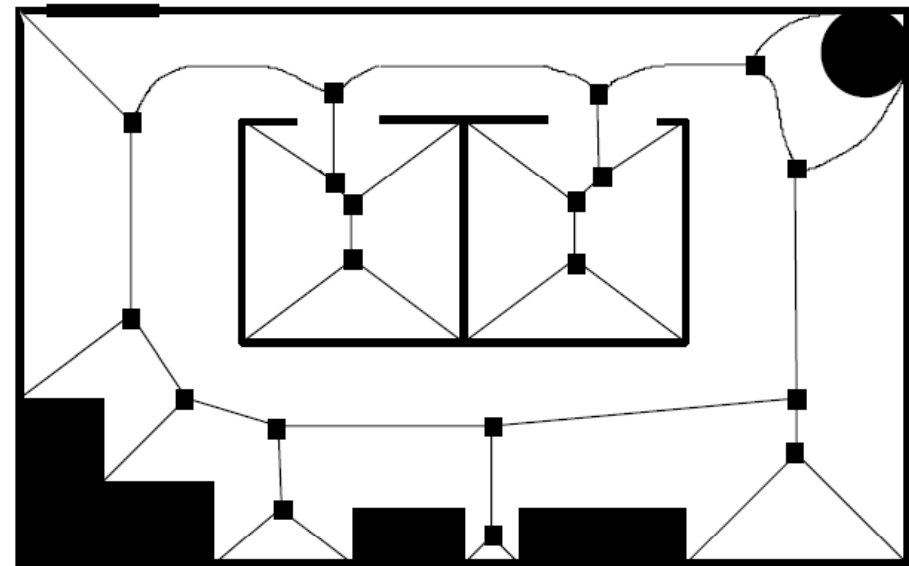
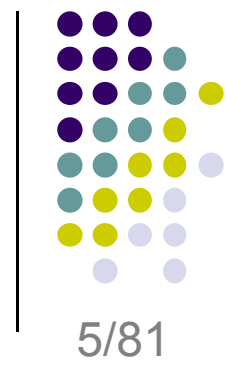
- Mape mogu biti različitih oblika.
- Postoje dvije glavne podjele na:
 - ***Metričke mape***, mape koje se temelje na apsolutnom koordinatnom sistemu i numeričkoj estimaciji položaja objekata u prostoru.
 - ***Topološke ili relacijske mape***, odnosno mape koje eksplicitno prikazuju informacije povezivanja, izražene u obliku grafova.



Uvod



Primjer metričke mape



Primjer topološke mape

Uvod



Metričke mape		Topološke mape	
prednosti	<ul style="list-style-type: none"> - jednostavna gradnja, prikaz i održavanje, - prepoznavanje mjesta (temeljeno na geometriji) nije dvoznačno i neovisno je o tački pogleda, - sposobnost računanja najkraćeg puta. 	prednosti	<ul style="list-style-type: none"> - omogućuje efikasno planiranje, mala složenost prostora (rezolucija ovisi o složenosti okoline), - ne zahtijeva tačno određivanje robotske pozicije, - konvencionalan prikaz za rješavanje simboličkih problema planiranja, prirodni jezici.
nedostaci	<ul style="list-style-type: none"> - neefikasno planiranje, rezolucija ne ovisi o složenosti okoline, - ne daje tačnu robotsku poziciju, - slabo sučelje sa rješavanjem simboličkih problema. 	nedostaci	<ul style="list-style-type: none"> - otežana konstrukcija i održavanje modela velikih okolina, - prepoznavanje mjesta zasnovano na pomoćnim objektima (orijentiri) nije jednoznačno, osjetljivo na tačku pogleda, - može dati neoptimalne putanje.

Uvod

- Komparirajući prednosti i nedostatke metričkih i topoloških mapa, može se reći sljedeće:
metričke mape su lakše za učenje, što je posljedica njihove sposobnosti tačne lokalizacije i jednostavnosti održavanja.
- **Topološke mape su kompaktnije i shodno tome omogućuju brže planiranje.**
- Da bi se iskoristile prednosti metričkih i topoloških mapa, često je povoljno razmatrati konstrukciju jednog prikaza korištenjem obzervacija iz drugog manje apstraktnog prikaza, odnosno izvršiti integraciju oba pristupa s ciljem postizanja tačnijeg modela okoline.



Uvod

- Prirodnije je promatrati lokalne nego velike skalirane opise robotske okoline.
- Posljedica toga jesu hijerarhijsko-slojeviti prikazi podataka mape u sljedećih pet slojeva (Dudek (1996)):
 - **Senzorski.**
 - **Geometrijski.**
 - **Lokalno povezani.**
 - **Topološki.**
 - **Semantički.**



Uvod

- Glavne prednosti upotrebe mapa za navigaciju mobilnih robota su:
 - **Koriste prirodne strukture tipične unutrašnje okoline** za dobivanje informacija o poziciji ne mijenjajući okolinu.
 - **Vremensko ponovno generiranje mape okoline.** Mape okoline su važne za druge zadatke mobilnih robota, kao što su globalno planiranje putanje ili izbjegavanje zamki tipa lokalni minimum u nekim postupcima lokalnog zaobilaženja prepreka.
 - Mape **omogućuju robotu da uči nove okoline i poboljšava tačnost pozicioniranja** tokom istraživanja.



Uvod

- Nedostaci korištenja mapa su u uskoj vezi sa specifičnim zahtjevima zadovoljavanja problema navigacije.
- Mogući nedostaci su:
 - Zahtijeva postojanje dovoljne stacionarnosti, odnosno jednostavno razlikovanje karakteristika koje mogu biti predmet uspoređivanja.
 - Senzorske mape moraju biti dovoljno tačne da bi bile upotrebljive.
 - Potrebna značajna moć opažanja i procesiranja.



Uvod

- Za uspješno izvođenje misije u unutarnjim prostorijama, mobilni roboti moraju imati sposobnost **gradnje i održavanja modela okoline**.
- Sljedeći faktori ograničavaju robotsku sposobnost učenja i upotrebe tačnih modela okoline:
 - **Senzori**. Senzori često nisu sposobni direktno mjeriti kvantitativne značajke koje su od interesa za danu primjenu. Naprimjer, kamere mjere vrstu boje, osvjetljenje, itd., dok je za navigaciju relevantan iskaz tipa “*vrata se nalaze ispred robota*”.



Uvod

- **Perceptualna ograničenja.** Područje percepcije (opažanja) većine senzora (kao što su ultrasonični, kamere) je ograničeno na malo područje oko robota. Za formiranje globalne informacije, robot mora aktivno istražiti svoju okolinu.
- **Šum senzora.** Mjerenja senzora su obično prekrivena šumom. Često je distribucija šuma nepoznata (rijetko se javlja Gausov šum).
- **Drift (pomak) / klizanje.** Kretanja robota su općenito netačna. Nažalost, odometrijske pogreške se akumuliraju sa vremenom. Tada i najmanje pogreške u rotaciji mogu imati snažan utjecaj na pogrešku u translaciji.



Uvod

- **Složenost i dinamika.** Robotske okoline su složene i dinamične, tako da je principijelno nemoguće održavati stvarne modele istih.
- **Zahtjevi u stvarnom vremenu (real-time).** Vremenski zahtjevi često zahtijevaju da unutarnji model mora biti jednostavan i lahko dostupan. Naprimjer, tačni CAD modeli složenih unutarnjih prostora su često nezgodni ako se akcije moraju generirati brzo.
- U osnovi postoje dva opća postupka gradnje mape koja se temelje na prethodnom postojanju, odnosno nepostojanju mape okoline. Prvi pristup koristi već **postojeću mapu**, dok drugi **gradi mapu okoline** tokom kretanja robota.



10.2. Metričke mape

- **Metričke mape predstavljaju mape sa mrežom ćelija, gdje svaka ćelija sadrži vrijednost koja izražava prisutnost ili nepostojanje prepreka u odgovarajućem području okoline.**
- Metričke mape su poznate i pod imenima *mrežaste mape* i *mape zauzeća*.
- Zajednička osobina postupaka prostorne zauzetosti jest pohrana vrijednosti u mrežu zauzeća koje reflektiraju stupanj zauzetosti svake ćelije: **jedan** za punu zauzetost ćelije, a **nula** za praznu ćeliju.
- Alternativan pristup se sastoji u pohranjivanju izvjesnosti P_{zauz} o zauzetosti ćelije.
- Treća varijanta iskazuje veličinu zauzetosti: u cijelosti puna, djelomično ili potpuno prazna.



Metričke mape

- Osnovna ideja je u konstrukciji mreže zauzeća na temelju senzorskih mjerenja kada se robot kreće kroz okolinu.
- **Potrebno je povezati mjerenja senzora sa odometrijskim informacijama i na temelju toga koristiti neki od postupaka gradnje mape.**
- Tri glavna koraka u obradi senzorskih podataka potrebnih za gradnju mape:
 - **Ekstrakcija značajki iz senzorskih podataka.**
 - **Fuzija podataka iz različitih senzorskih izvora.**
 - **Automatsko generiranje modela okoline sa različitim stupnjevima apstrakcije.**

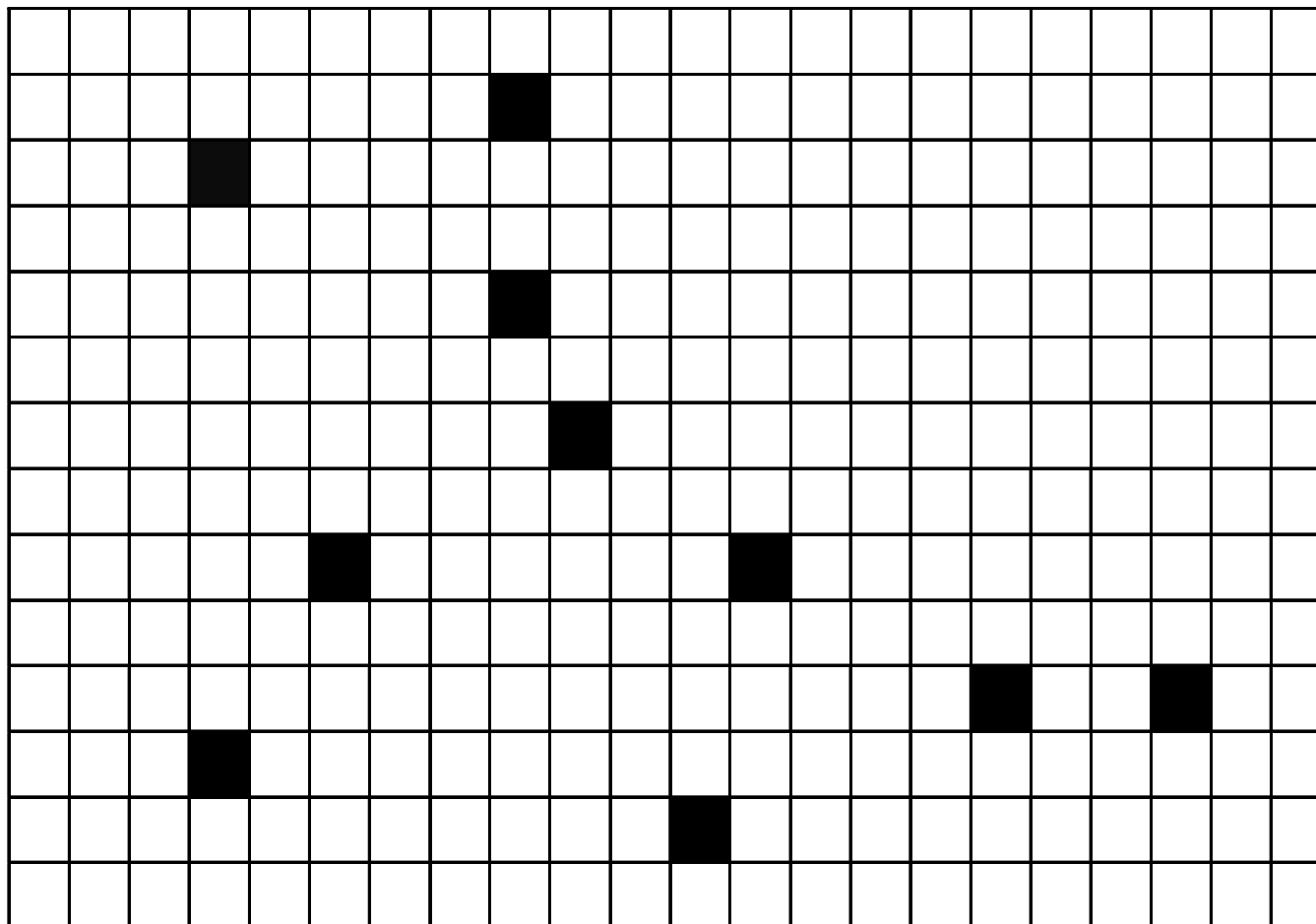
Metričke mape

- Kod mapa zauzeća su evidentna dva komplementarna prikaza: jedan za izvjesnost da je ćelija prazna, a drugi da je puna, odnosno zauzeta.
- Održavanje i upotreba prikaza zauzetosti obično se obavljaju pomoću metoda vjerojatnosti, kao što su **Bayesova teorija** i **Dempster-Shaferova teorija uvjerenja**.
- Da bi se neka od ovih metoda mogla primijeniti zahtijeva se da vjerojatnosni model senzora povezuje različita, moguća mjerenja konfiguracije okoline.
- Za potrebe gradnje metričkih mapa se u praksi, od senzora, najčešće koristi **ultrazvučni senzor** ili **sonar**.



Metričke mape

- Mrežasta mapa prostora je matrica U , sa $m \times n$ ćelija C_{ij} , svaka veličine $\sigma \times \sigma$. Jedna ćelija predstavlja dio prostora.



Metričke mape

- Ovaj skup ćelija može se opisati na sljedeći način:

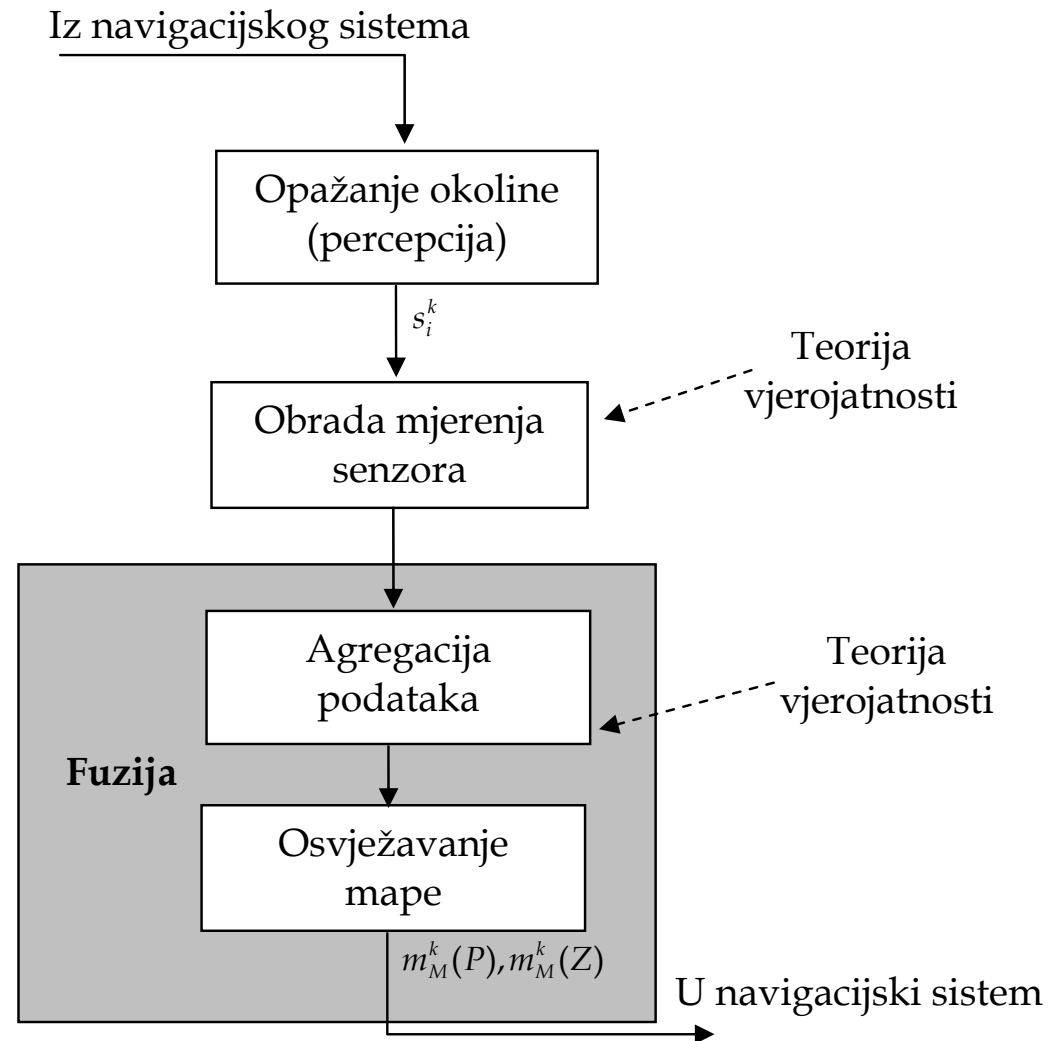
$$U = \{C_{ij} \mid i \in [1, m], j \in [1, n]\}$$

- Neka je dan skup očitavanja senzora $r = \{r_1, \dots, r_p\}$, sakupljen sa poznatih lokacija $L = \{l_1, \dots, l_q\}$.
- Sistem za gradnju mape, zasnovan na mjerenju sonara, je ustvari fuzija podataka dobivenih duž staze $[l_1 l_2 \dots l_q]$.
- Kao rezultat, svaka ćelija C_{ij} može poprimiti vrijednost uvjerenja da je prazna ili puna.
- Ćelije obojene crnom bojom su popunjene, a bijelom prazne (pogledati prethodnu sliku).



Metričke mape

- Dijagram toka odvijanja procesa gradnje mape prikazan je na slici.



Metričke mape

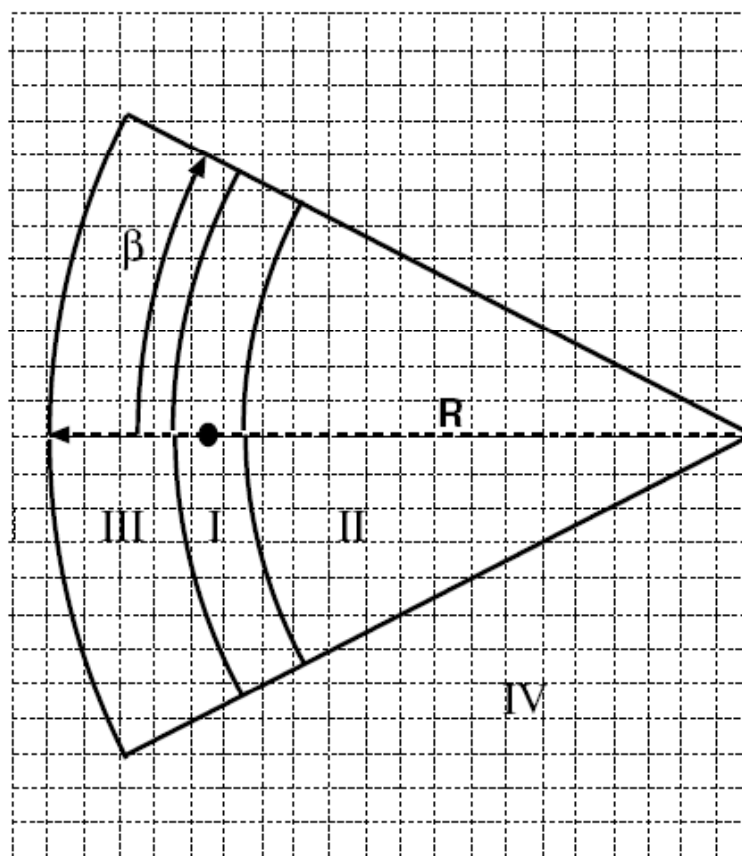
- Proces gradnje mape prostora sastoji se od tri koraka:
 - **Percepcija** - aktiviranje sonara u odgovarajućoj sekvenci dok se ne prikupi paket od n mjerenja.
 - **Obrada podataka** - ultrazvučna mjerenja se obrađuju kako bi se izgradio lokalni prikaz okoline u smislu praznog i zauzetog prostora.
 - **Fuzija** – lokalni prikaz okoline se integrira u globalni, odbacujući kontradiktorne i nedovoljne informacije.





10.2.1. Model sonarnog senzora

- Uvjerenje o zauzeću ćelija dobiva se projekcijom odziva sonara u mrežu zauzeća pomoću njegovog modela.
- Model sonara je funkcija ugla β i područja čitanja sonara R .



Model sonarnog senzora

- Svaki element mreže sadrži vrijednost koja predstavlja uvjerenje da li je ćelija zauzeta ili prazna.
- Na prethodnoj slici je polje pogleda podijeljeno u tri regiona:
 - **Region I: postoji vjerojatnoća da je ćelija u ovom području zauzeta.**
 - **Region II: postoji vjerojatnoća da je ćelija u ovom području prazna.**
 - **Region III: vjerojatnoća o zauzeću ćelije je neodređena.**



10.2.2. Gradnja mape Bayesovom teorijom

- Bayesova teorija predstavlja jednu od najpoznatijih tehnika u fuziji senzorskih podataka, njihovom preslikavanju u vjerojatnoće zauzeća i kombiniranju ovih vjerojatnoća.
- Elfes i Moravec su pioniri u korištenju Bayesove teorije za potrebe gradnje mrežastih mapa zauzeća (1985).
- Ako se koriste sonarni senzori tada se može opaziti samo jedan događaj, odnosno, da li je segment ili element (ćelija) C_{ij} mape zauzet ili prazan.
- Ovo se može napisati kao $H=\{C_O, C_E\}$, gdje C_O označava zauzetu ćeliju i C_E praznu ćeliju.



Gradnja mape Bayesovom teorijom



- Vjerojatnost da se H zaista dogodio je predstavljena sa $P(H)$ i može poprimiti vrijednosti od 0 do 1:

$$0 \leq P(H) \leq 1$$

- Vjerojatnost da ćelija C_{ij} nije zauzeta može se napisati kao:

$$P(C_E) = 1 - P(C_O) \quad (*)$$

- Iz ovog izraza slijedi da se $P(C_E)$ može izračunati ako je poznato $P(C_O)$.
- Vjerojatnosti $P(H)$ i $P(\neg H)$ se nazivaju **neuvjetne vjerojatnosti**.

Gradnja mape Bayesovom teorijom

- Ove vjerojatnosti nisu interesantne u gradnji mape jer osiguravaju samo apriori informacije.
- Mnogo je korisnije da robot koristi funkciju koja će računati vjerojatnost da je segment C_{ij} zauzet, ili prazan, za pojedinačno mjerenje senzora s .
- Ova vjerojatnost se naziva **uvjetna vjerojatnost**.
- U Bayesovom pristupu model senzora generira uvjetne vjerojatnosti u obliku $P(s | H)$, dok Bayesova pravila računaju vjerojatnosti $P(H | s)$.
- Uvjetna vjerojatnost $P(H | s)$ označava vjerojatnost da je neki segment H zauzet za zadano očitavanje senzora s , dok $P(s | H)$ predstavlja vjerojatnost da mobilni robot vidi očitavanje senzora s uz uvjet da je neki segment H zauzet.

Gradnja mape Bayesovom teorijom

- Iz izraza (*) slijedi da za neuvjetne vjerojatnosti vrijedi da je $P(H | s) + P(\neg H | s) = 1$.
- U mrežastoj mapi zauzeća za svaki njen element, odnosno ćeliju C_{ij} , koji je prekriven skeniranjem senzora računa se $P(C_O | s)$ i $P(C_E | s)$.
- U svaku ćeliju mreže se pohranjuju vrijednosti vjerojatnosti da je ćelija zauzeta i prazna.
- Drugim riječima, ovom vjerojatnošću se izražava izvjesnost o zauzeću ćelije mreže.
- Zbog toga je neophodno imati **funkciju koja će transformirati pojedinačno mjerenje sonara u vjerojatnost za svaku ćeliju**, kako je prikazano na slici sa slajda broj 21.



Gradnja mape Bayesovom teorijom

- Za svaku ćeliju mreže unutar Regiona I vjerojatnoća zauzeća se računa na sljedeći način:

$$P(O) = \frac{\left(\frac{R-r}{R}\right) + \left(\frac{\beta-\alpha}{\beta}\right)}{2} \times Max_O \quad (**)$$
$$P(E) = 1 - P(O)$$

gdje r i α označavaju udaljenost do elementa mreže i ugao koji zatvara pravac usmjeren prema elementu mreže i pravac koji se proteže sredinom konusa sonarnog senzora, respektivno.



Gradnja mape Bayesovom teorijom

- Izraz $(\beta - \alpha)/\beta$ govori da element mreže ima veće uvjerenje o zauzeću ako se nalazi bliže akustičnoj osi.
- Isto tako, element bliži ishodištu snopa isijavanja sonara također ima veće uvjerenje o zauzeću.
- Izraz Max_0 izražava pretpostavku o tome da uvjerenje o zauzeću elementa mreže nikad ne poprima punu vrijednost, odnosno 1.
- Tako, naprimjer, $Max_0 = 0.98$ znači da vjerojatnost zauzeća elementa mreže nikad ne može biti veći od 0.98.

Gradnja mape Bayesovom teorijom

- Važno je naglasiti da region I na slici sa slajda 21. ima konačne dimenzije.
- Usljed rezolucije sonara područje čitanja 0.87 metara može u stvarnosti biti između 0.82 i 0.92, odnosno 0.87 ± 0.05 metara.
- Vrijednost ± 0.05 metara naziva se **tolerancija**.
- Svaki element mreže u Regionu II se osvježava korištenjem sljedećih jednažbi:

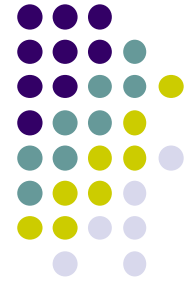
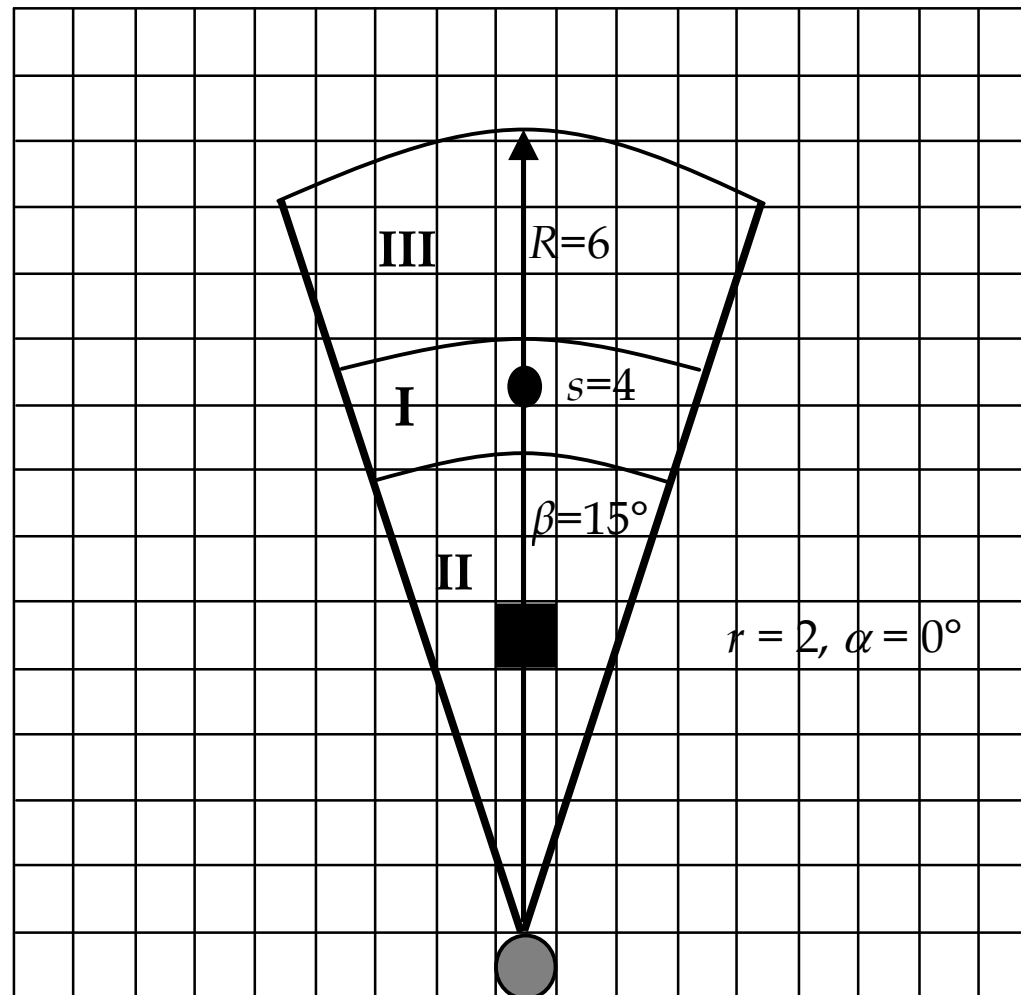
(***)

$$P(O) = 1 - P(E)$$
$$P(E) = \frac{\left(\frac{R-r}{R}\right) + \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta}\right)}{2}$$

Za razliku od Regiona I, vjerojatnost da je element mreže unutar Regiona II prazan iznosi 1.

Primjer 1.

- Na slici je prikazana mrežasta mapa zauzeća sa robotom unutar nje.



Primjer 1.

- Robot je prikazan krugom.
- Sonarni senzor vraća vrijednost mjerenja unutar 4 metara sa tolerancijom ± 0.5 metara.
- Maksimalna vjerojatnost zauzeća elementa mreže iznosi $Max_O = 0.98$.
- Na udaljenosti 2 metra od ishodišta snopa isijavanja sonar registrira prepreku ($r = 2$).
- Budući da je $(4 - 0.5) > 2$ slijedi da je registrirani element mreže u Regionu II.
- Ugao pod kojim sonar vidi taj element je $\alpha = 0^\circ$.
- Nakon identificiranja regiona kojem pripada registrirani element mrežaste mape koriste se izrazi za računanje vjerojatnosti zauzeća ćelije.

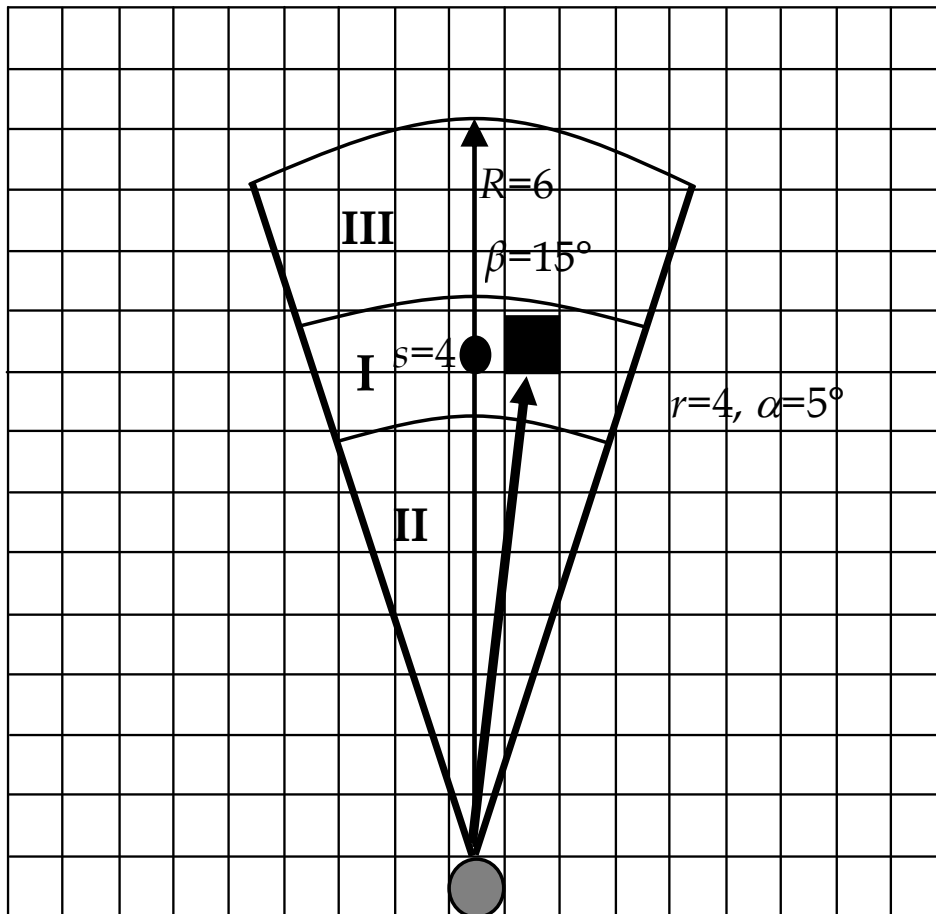
Primjer 1.

- Za zadane vrijednosti r , R , α i β dobivaju se sljedeće vrijednosti vjerojatnosti zauzeća, korištenjem jednadžbi (***):

$$P(E) = \frac{\binom{6-2}{6} + \binom{15-0}{15}}{2} = 0.83$$
$$P(O) = 1 - 0.83 = 0.17$$

Primjer 2.

- Na slici ispod sonarni senzor je registrirao objekat koji prekriva ćeliju na udaljenosti $r = 4$ metra i pod uglom $\alpha = 5^\circ$ i nalazi se u regionu I.



Korištenjem jednađbi (**)
dobivaju se sljedeće
vrijednosti vjerojatnosti
zauzeća registriranog
elementa mrežaste mape:

$$P(O) = \frac{\left(\frac{6-4}{6}\right) + \left(\frac{15-5}{15}\right)}{2} \times 0.98 = 0.49$$
$$P(E) = 1 - 0.49 = 0.51$$

Gradnja mape Bayesovom teorijom

- Navedena dva primjera su demonstrirala računanje neuvjetne vjerojatnosti.
- Ranije je navedeno da je za senzorske modele mnogo prihvatljivije računati uvjetne vjerojatnosti.
- U slučaju uvjetne vjerojatnosti model senzora prikazuje $P(s|H)$.
- Korištenjem Bayesovog pravila izračunava se vjerojatnost zauzeća elementa mreže $P(H|s)$ za zadano mjerenje senzora:

$$P(H | s) = \frac{P(s | H)P(H)}{P(s | H)P(H) + P(s | \neg H)P(\neg H)}$$

(****)



Gradnja mape Bayesovom teorijom

- Prevodeći prethodni izraz u oblik sa zauzećem elementa mreže H slijedi:

$$P(O | s) = \frac{P(s | O)P(O)}{P(s | O)P(O) + P(s | E)P(E)}$$

- Vrijednosti $P(s|O)$ i $P(s|E)$ su poznate iz modela senzora. Neuvjetne vjerojatnosti $P(O)$ i $P(E)$ su ranije (unaprijed) poznate.
- Uvrštavanjem ovih vrijednosti u prethodni izraz dobiva se trenutna vrijednost zauzeća promatranog elementa mrežaste mape.
- Važno je napomenuti da u mnogim slučajevima nema unaprijed znanja na temelju kojeg bi se izračunale neuvjetne vjerojatnosti.





Gradnja mape Bayesovom teorijom

- U tim slučajevima se uzima da je $P(O) = P(E) = 0.5$.
- Ako su $P(s = 4|O) = 0.58$ i $P(s = 4|E) = 0.42$, tada se korištenjem izraza (***) za element mrežaste mape C_{ij} dobivaju sljedeće vrijednosti vjerojatnosti zauzeća:

$$P(O | s = 4) = \frac{(0.58)(0.5)}{(0.58)(0.5) + (0.42)(0.5)} = 0.58$$

$$P(E | s = 4) = \frac{(0.42)(0.5)}{(0.42)(0.5) + (0.58)(0.5)} = 0.42$$

Gradnja mape Bayesovom teorijom

- Svi do sada ilustrirani primjeri su razmatrali pojedinačno mjerenje i na temelju njega izračunavali neuvjetne i uvjetne vjerojatnosti zauzeća elementa mrežaste mape.
- Sada se postavlja pitanje: **"Kako kombinirati ovo mjerenje sa drugim mjerenjima (fuzija)? "**.
- Prvo ovježavanje je jednostavno. Svaki element mrežaste mape je inicijaliziran sa a priori vjerojatnostima o zauzeću elementa mape (prazan i zauzet).
- Ako a priori vjerojatnosti zauzeća elementa mape nisu poznate, pretpostavlja se da je $P(H) = P(\neg H) = 0.5$.
- Nakon toga se primjenom Bayesovog pravila računaju nove vrijednosti vjerojatnosti zauzeća elementa mreže koje zamjenjuju stare, dok je a priori vrijednosti ($P(H) = 0.5$).



Gradnja mape Bayesovom teorijom

- U slučaju kada više senzora registrira zauzeće istog elementa mrežaste mape tada Bayesovo pravilo postaje (za n obzervacija s_1, s_2, \dots, s_n):

$$P(H | s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{P(s_1, s_2, \dots, s_n | H)P(H)}{P(s_1, s_2, \dots, s_n | H)P(H) + P(s_1, s_2, \dots, s_n | \neg H)P(\neg H)}$$

- Ovdje se sada javlja problem generiranja $P(s_1, s_2, \dots, s_n)$.
- Idealno bi bilo da model sonara daje vrijednosti zauzeća svih elemenata mreže C_{ij} za n kombinacija senzorskih očitavanja.
- Ako se očitavanje senzora s_1 može smatrati kao rezultat eksperimenta različitog od onog za s_2 i ostale senzore, tada se $P(s_1, s_2, \dots, s_n | H)$ pojednostavljuje izrazom $P(s_1 | H) \cdot P(s_2 | H) \cdot \dots \cdot P(s_n | H)$.



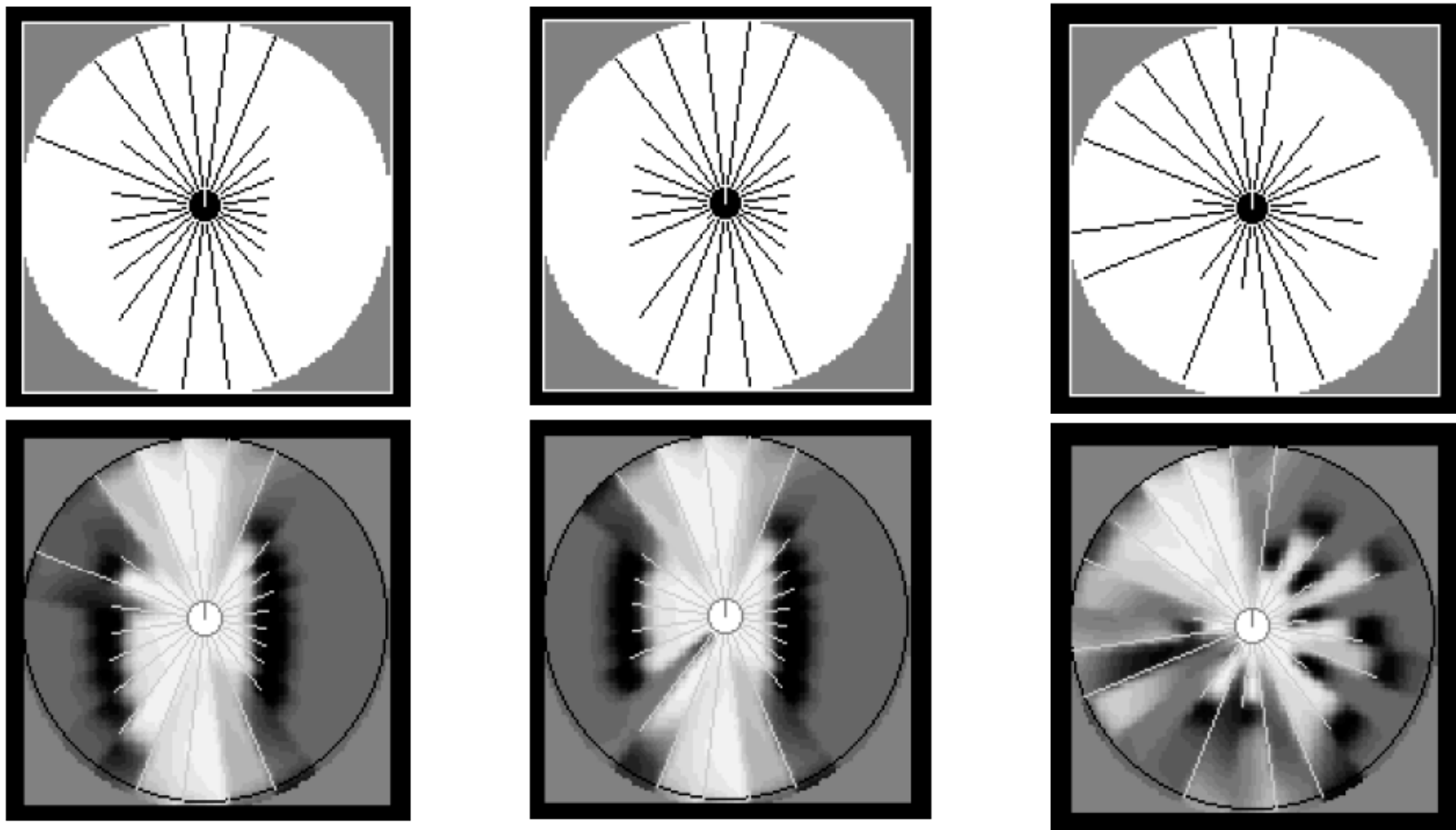
Gradnja mape Bayesovom teorijom

- Program mora moći zapamtiti svih $n-1$ mjerenja (očitanja).
- Budući da ne postoji način predikcije koliko dugo će pojedinačni segment mreže biti opažen to će ovo stvarati priličan programerski problem.
- Na sljedećoj slici su prikazana tri skeniranja sonarnog senzora (slike u prvom redu) i na temelju njih generirane mreže zauzeća pomoću neuronske mreže (Thrun & Bücken, 1996).



Gradnja mape Bayesovom teorijom

- Skeniranje sonarnim senzorom i generiranje mrežaste mape zauzeća



Gradnja mape Bayesovom teorijom

- Primjer mrežaste mape dobivene pomoću AAI robota (Thrun & Bücken, 1996) upotrebom Bayesove teorije vjerojatnosti na temelju mjerenja sonarnih senzora prikazan je na slici.



10.2.3. Gradnja mape D-S teorijom

- **Dempster-Shaferova teorija uvjerenja spada u skupinu subjektivno probabilističkih tehnika koje imaju mogućnost suočavanja sa neizvjesnim i nekompletnim informacijama.**
- Ona je istovremeno teorija uvjerenja, jer koristi stupanj potpore temeljen na uvjerenju, i teorija vjerojatnosti, budući da koristi kombinaciju uvjerenja.
- Također, Dempsterova teorija se temelji na pojedinačnom mišljenju i mnogo je interesantnija u području uvjerenja i vjerodostojnosti nego vjerojatnosti.
- Ova teorija omogućuje prikaz neznanja i stoga je funkcija djelomičnog znanja.



Gradnja mape D-S teorijom

- Probabilističke tehnike (npr. Bayesova), razmatraju pojedinačne propozicije i pridružuju svakoj kauzalni utjecaj ili numeričku estimaciju stupnja uvjerenja kojeg ona može imati.
- **Jedno od ograničenja probabilističkih pristupa jest da oni koriste pojedinačne kvantitete za mjeru (svakoj propoziciji se pridružuje jedna vrijednost), što može biti veoma složena situacija.**
- Dempster-Shaferova teorija uvjerenja razmatra **skupove propozicija i pridružuje svakoj od njih interval** [uvjerenje, vjerodostojnost], unutar kojeg moraju postojati stupnjevi uvjerenja za svaku propoziciju.
- Ova mjera uvjerenja, označena sa *Bel*, rangirana je od nule, što znači neuvjerenje za skup propozicija, do jedan, što predstavlja uvjerenje izvjesnosti.



Elementi D-S teorije uvjerenja

- Dempster-Shaferova teorija uvjerenja karakterizirana je **sistemom razlikovanja** (*engl.* frame of discernment, *FOD*), **dodjeljivanjem osnovne vjerojatnosti** (*engl.* basic probability assignment, *BPA*), **uvjerenjem** (*engl.* belief, *Bel*), **vjerodostojnošću** (*engl.* plausibility, *Pls*) i **Dempsterovim pravilom kombiniranja** (*engl.* Dempster's rule of combination).
- **Definicija 1. Sistem razlikovanja** (FOD), označen sa Θ , definiran je kao konačni skup oznaka (*engl.* labels) koje predstavljaju uzajamno isključive događaje (*engl.* mutually exclusive events).



Elementi D-S teorije uvjerenja

- **Definicija 2. Pridruživanje osnovne vjerojatnosti** (BPA) je funkcija $m: \Psi \rightarrow [0, 1]$, gdje je Ψ skup svih podskupova Θ . Moć skupa Θ je $\Psi = 2^\Theta$. Funkcija m može se interpretirati kao distribucija vjerojatnosti svake od oznaka u Ψ -u, sa zadovoljenjem sljedećeg kriterija:

$$\sum_{A \subset \Psi} m(A) = 1$$
$$m(\phi) = 0$$

gdje je ϕ prazan skup

- Tako je oznaci A pridružena osnovna vjerojatnost izražena brojem $m(A)$, koja opisuje stupanj uvjerenja da je to stvarno A .

Elementi D-S teorije uvjerenja

- Međutim, totalno uvjerenje pripisano A-u je suma svih brojčano izraženih vjerojatnosti pridruženih A-u i njegovim podskupovima:

$$Bel(A) = \sum_{\forall B: B \subseteq A} m(B)$$

- Definicija 3.** Funkcija uvjerenja $Bel: \Psi \rightarrow [0, 1]$ je kvantitet uvjerenja koji podržava propozicije A i B i ima sljedeća svojstva:

$$Bel(\phi) = 0$$

$$Bel(\Theta) = 1$$

$$Bel(A) + Bel(\neg B) \leq 1$$

$$Bel(A) \leq Bel(B), \text{ ako je } A \subset B$$

$$Bel(A \cap B) \leq \min(Bel(A), Bel(B))$$

Elementi D-S teorije uvjerenja

- **Definicija 4.** Vjerodostojnost (Pls) propozicije A može se iskazati kao vrijednost uvjerenja koja ne podržava njenu negaciju (negaciju od A). Ona je definirana kao $Pls: \Psi \rightarrow [0, 1]$, sa sljedećim svojstvima:

$$Pls(A) = 1 - Bel(\neg A) = 1 - \sum_{\forall B: A \not\subset B} m(B)$$

$$Pls(A) - Bel(B) \geq 0$$

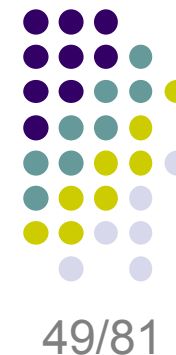
$$Pls(A \cup B) = \max(Pls(A), Pls(B))$$

Elementi D-S teorije uvjerenja

- **Definicija 5.** Stanje svake oznake (opisano sa BPA) ponovno se postavlja kombiniranjem novog neovisnog izvora uvjerenja korištenjem Dempsterovog pravilo kombinacije, odnosno zaključivanja, na sljedeći način:

$$m_1 \oplus m_2(A) = \frac{\sum_{\forall B, C \in \Psi: B \cap C = A} m_1(B)m_2(C)}{1 - \sum_{\forall B, C \in \Psi: B \cap C = \phi} m_1(B)m_2(C)}$$
$$m_1 \oplus m_2(\phi) = 0$$





Primjer 3.

- Pretpostavimo da je $\Theta = \{A, B, C\}$ i $m_1(\{A\}) = 0.5$, $m_1(\{A, B\}) = 0.5$, $m_1(\{A, B, C\}) = 0.5$, $m_1(\text{ostali}) = 0$, $m_2(\{B, C\}) = 0.4$, $m_2(\{A, B, C\}) = 0.6$, $m_2(\text{ostali}) = 0$. Izračunati $m_1 \oplus m_2$.
- Moć skupa Θ je:

$$2^\Theta = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}, \{A, B, C\}\}$$

- Suma $\Gamma = \sum_{\forall X, Y \in \Psi: X \cap Y = \emptyset} m_1(X)m_2(Y)$ jednaka je:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{\forall X, Y \in \Psi: X \cap Y = \emptyset} m_1(X)m_2(Y) = m_1(\{A\})m_2(\{B, C\}) + m_1(\{B\})m_2(\{A, C\}) + m_1(\{C\})m_2(\{A, B\}) \\ &\quad + m_1(\{A, C\})m_2(\{B\}) + m_1(\{A, B\})m_2(\{C\}) + m_1(\{B, C\})m_2(\{A\}) \\ &\quad + m_1(\{\emptyset\})m_2(\{A, B, C\}) + m_1(\{A, B, C\})m_2(\{\emptyset\}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Primjer 3.

- Korištenjem Dempsterovog pravila kombiniranja dobivaju se sljedeće sume:



$$\begin{aligned}(m_1 \oplus m_2)(\{A\}) &= \frac{1}{1-\Gamma} [m_1(\{A\})m_2(\{A, C\}) + m_1(\{A\})m_2(\{A, B\}) + m_1(\{A, B\})m_2(\{A\}) \\ &\quad + m_1(\{A, C\})m_2(\{A\}) + m_1(\{A\})m_2(\{A, B, C\}) + m_1(\{A, B, C\})m_2(\{A\}) \\ &\quad + m_1(\{A, C\})m_2(\{A, B\}) + m_1(\{A, B\})m_2(\{A, C\})] \\ &= 1 \times (0 + 0 + 0 \times 0.6 + 0.5 \times 0 + 0 + 0.5 \times 0 + 0.5 \times 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(m_1 \oplus m_2)(\{B\}) &= \frac{1}{1-\Gamma} [m_1(\{B\})m_2(\{B, C\}) + m_1(\{B\})m_2(\{A, B\}) + m_1(\{A, B\})m_2(\{B\}) \\ &\quad + m_1(\{B, C\})m_2(\{B\}) + m_1(\{B\})m_2(\{A, B, C\}) + m_1(\{A, B, C\})m_2(\{B\}) \\ &\quad + m_1(\{A, B\})m_2(\{B, C\}) + m_1(\{B, C\})m_2(\{A, B\})] \\ &= 1 \times (0 \times 0.4 + 0 + 0 \times 0.6 + 0.5 \times 0 + 0 + 0.5 \times 0 + 0.5 \times 0.4 + 0) \\ &= 0.2\end{aligned}$$

Primjer 3.



$$\begin{aligned}(m_1 \oplus m_2)(\{C\}) &= \frac{1}{1-\Gamma} [m_1(\{C\})m_2(\{A, C\}) + m_1(\{C\})m_2(\{B, C\}) + m_1(\{A, C\})m_2(\{C\}) \\ &\quad + m_1(\{B, C\})m_2(\{C\}) + m_1(\{C\})m_2(\{A, B, C\}) + m_1(\{A, B, C\})m_2(\{C\}) \\ &\quad + m_1(\{A, C\})m_2(\{B, C\}) + m_1(\{B, C\})m_2(\{A, C\})] \\ &= 1 \times (0 + 0 \times 0.4 + 0 \times 0.6 + 0 + 0 + 0.5 \times 0 + 0.5 \times 0.4 + 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(m_1 \oplus m_2)(\{A, B\}) &= \frac{1}{1-\Gamma} [m_1(\{A, B\})m_2(\{A, B\}) + m_1(\{A, B\})m_2(\{A, B, C\}) \\ &\quad + m_1(\{A, B, C\})m_2(\{A, B\})] \\ &= 1 \times (0.5 \times 0 + 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0) \\ &= 0.3\end{aligned}$$

Primjer 3.

$$\begin{aligned}(m_1 \oplus m_2)(\{A, C\}) &= \frac{1}{1-\Gamma} [m_1(\{A, C\})m_2(\{A, C\}) + m_1(\{A, C\})m_2(\{A, B, C\}) \\ &\quad + m_1(\{A, B, C\})m_2(\{A, C\})] \\ &= 1 \times (0 + 0 \times 0.6 + 0.5 \times 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(m_1 \oplus m_2)(\{B, C\}) &= \frac{1}{1-\Gamma} [m_1(\{B, C\})m_2(\{B, C\}) + m_1(\{B, C\})m_2(\{A, B, C\}) \\ &\quad + m_1(\{A, B, C\})m_2(\{B, C\})] \\ &= 1 \times (0 \times 0.4 + 0 \times 0.6 + 0.5 \times 0.4) \\ &= 0.2\end{aligned}$$

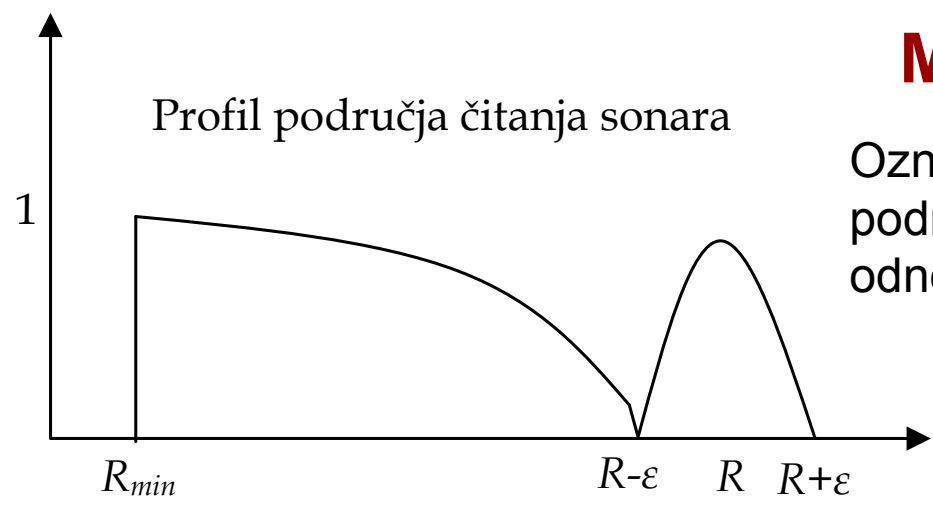
$$\begin{aligned}(m_1 \oplus m_2)(\{A, B, C\}) &= \frac{1}{1-\Gamma} [m_1(\{A, B, C\})m_2(\{A, B, C\})] \\ &= 1 \times (0.5 \times 0.6) \\ &= 0.3\end{aligned}$$



Gradnja mape D-S teorijom

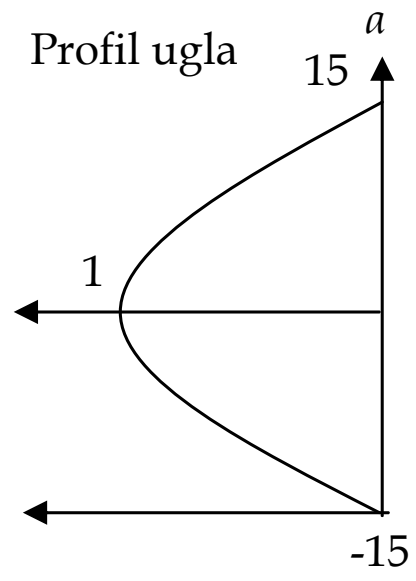
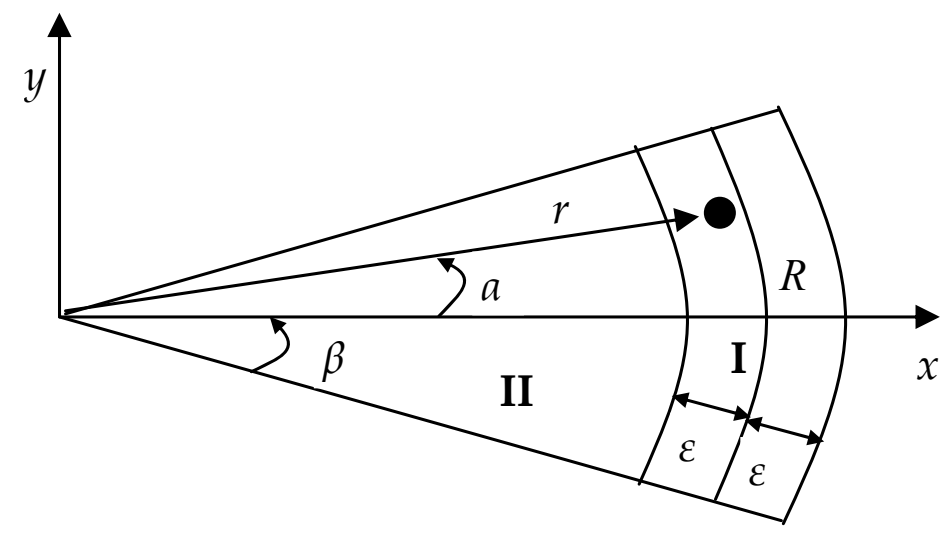
- Treba napomenuti da tokom faze percepcije sonarni senzori emitiraju pakete impulsa sa takvim razmacima da je interferencija svedena na minimum.
- Da bi se mogle uzeti u obzir osobine senzora u modeliranju znanja o zauzeću ćelija koristi se Dempster-Shaferova teorija uvjerenja.
- Uvjerenje o zauzeću ćelija dobiva se projekcijom odziva sonara u mrežu zauzeća pomoću modela sonara.
- **Model sonara je funkcija ugla i područja čitanja sonara** (sljedeća slika).

Gradnja mape D-S teorijom



Model sonara

Oznakama I i II prikazana su područja eventualno zauzetog, odnosno, praznog prostora.



Gradnja mape D-S teorijom

- Uvjerenja o zauzeću ćelija unutar ovih područja su (Elfes, 1987):
- a) Područje I, gdje je $R-\varepsilon < r < R+\varepsilon$:

$$m(O) = \frac{\left(\frac{\beta - \alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon - |R - r|}{\varepsilon}\right)^2}{2} \times Max_O$$

$$m(E) = 0$$

$$m(\{E, O\}) = 1 - m(O)$$



Gradnja mape D-S teorijom

- b) Područje II, gdje je $R_{min} < r < R-\varepsilon$:

$$m(O) = 0$$

$$m(E) = \frac{\left(\frac{\beta - \alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{R - \varepsilon - r}{R - \varepsilon}\right)^2}{2}$$

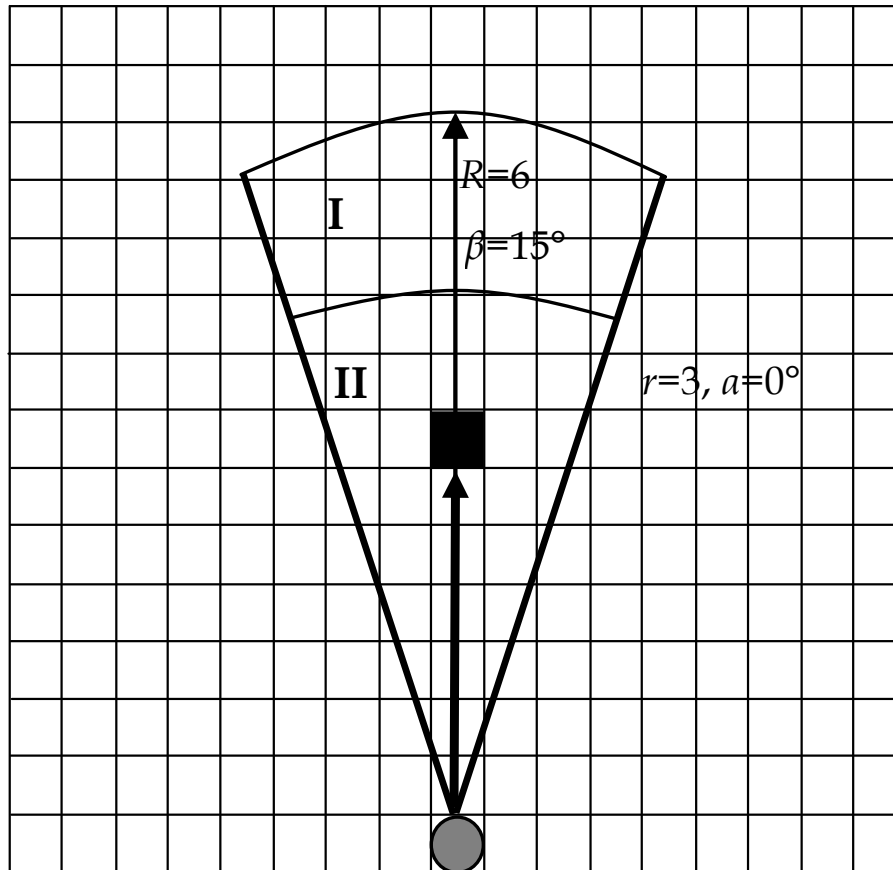
$$m(\{E, O\}) = 1 - m(E)$$

gdje su (r, α) koordinate tačke unutar konusa sonara (pozicija i orijentacija), a ε označava toleranciju za područje zauzeća. Izbor prikladnog ε -a je bitan za pravilnu interpretaciju zauzeća ćelija na temelju mjerenja sonara.



Primjer 4.

- Pretpostavimo da se robot nalazi u elementu mreže $C_{15,9}$ i da je potrebno ispitati zauzeće elementa $C_{8,9}$ na slici.



Element mrežaste mape $C_{8,9}$ nalazi se u regionu II, pa vrijedi:

$$m(O) = 0$$

$$m(E) = \frac{\left(\frac{15-0}{15}\right)^2 + \left(\frac{6-1-3}{6-1}\right)^2}{2} = \frac{1 + \frac{2}{5}}{2} = \frac{7}{10}$$

$$m(\{E, O\}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

Prema tome prevladava uvjerenje da je ćelija (8,9) prazna.

Gradnja mape D-S teorijom

Fuzija senzorskih podataka

- Dva su osnovna zadatka fuzije: **agregacija podataka iz različitih izvora** i **osvježavanje mape**.
- Kod gradnje mape prvo se specificira kako obraditi mjerenja senzora da bi se svakoj ćeliji pridružile osnovne vrijednosti (BPA).
- Pridruživanje osnovnih vrijednosti $m_{i,j}^{S(r)}(E)$, $m_{i,j}^{S(r)}(O)$ i $m_{i,j}^{S(r)}(\{O, E\})$, koje odgovaraju mjerenju senzora $S(r)$ dobivenog na udaljenosti r , obavlja se na temelju jednadžbi sa slajdova 55 i 56.
- Funkcije $m_{i,j}(E)$, $m_{i,j}(O)$ i $m_{i,j}(E, O)$ označavaju uvjerenja da je ćelija i, j prazna, zauzeta i nepoznata.
- Prema tome, stanje svake ćelije je opisano brojevima koji izražavaju pridruživanje osnovne vjerojatnosti svakoj oznaci u Ψ .



Gradnja mape D-S teorijom

Fuzija senzorskih podataka

- Međutim poznato je da za svaku ćeliju i, j u mreži vrijedi:

$$m_{i,j}(\phi) = 0$$

$$\sum_{A \in \Psi} m_{i,j}(A) = m_{i,j}(\phi) + m_{i,j}(E) + m_{i,j}(O) + m_{i,j}(\{E, O\}) = 1$$

- Svaka ćelija u mapi se prvo inicijalizira sljedećim vrijednostima:

$$m_{i,j}(E) = m_{i,j}(O) = 0, \quad m_{i,j}(\{E, O\}) = 1 \quad (*****)$$

Gradnja mape D-S teorijom

Fuzija senzorskih podataka

- Dok se robot kreće, vrši se skeniranje okoline i tako dobiveni podaci se ubacuju u mapu.
- Osvježavanje mape obavlja se na temelju osnovnih vjerojatnosti pridruženih ćelijama ranije mape i trenutnim mjerenjima senzora.
- Eksplicitno, osvježene osnovne vjerojatnosti za svaku ćeliju u mapi postaju:

$$m_M^t(E) = m_M^{t-1} \oplus m_S^t(E) = \frac{m_M^{t-1}(E)m_S^t(E) + m_M^{t-1}(E)m_S^t(\{E, O\}) + m_M^{t-1}(\{E, O\})m_S^t(E)}{1 - m_M^{t-1}(E)m_S^t(O) - m_M^{t-1}(O)m_S^t(E)}$$

$$m_M^t(O) = m_M^{t-1} \oplus m_S^t(O) = \frac{m_M^{t-1}(O)m_S^t(O) + m_M^{t-1}(O)m_S^t(\{E, O\}) + m_M^{t-1}(\{E, O\})m_S^t(O)}{1 - m_M^{t-1}(E)m_S^t(O) - m_M^{t-1}(O)m_S^t(E)}$$

Gradnja mape D-S teorijom

Fuzija senzorskih podataka

- U procesu fuzije mjerenja senzora se kombiniraju sa ranijom mapom i na taj način se dobiva nova mapa.
- Mapa se na ovaj način osvježava tokom kretanja mobilnog robota.
- Zbog potreba navigacije u realnom vremenu mapa je lokalnog karaktera i informacije o zauzeću ćelija pređene ravnine se ne pamte, zbog računarske uštede.
- Samo ćelije koje se nalaze u vidokrugu sonara se pamte i osvježavaju.



Gradnja mape D-S teorijom

Fuzija senzorskih podataka

- Prednost ovog pristupa je da eksplicitni prikaz dvoznačnosti nije samo u mjerenjima senzora $m_S(E, O)$, već i u pohranjenom uvjerenju $m_M(E, O)$.
- Jedno mjerenje kruga sonara (šesnaest sonara), obavi se u vremenskom intervalu trajanja 0.6 sekunde.
- Ova mjerenja su prikazana na slici podebljanim linijama koje izlaze iz mobilnog robota.
- Nakon svakog mjerenja mapa se osvježava prikupljanjem novih podataka pribavljenih od sonara i njihovim kombiniranjem sa ranijim podacima u mapi.

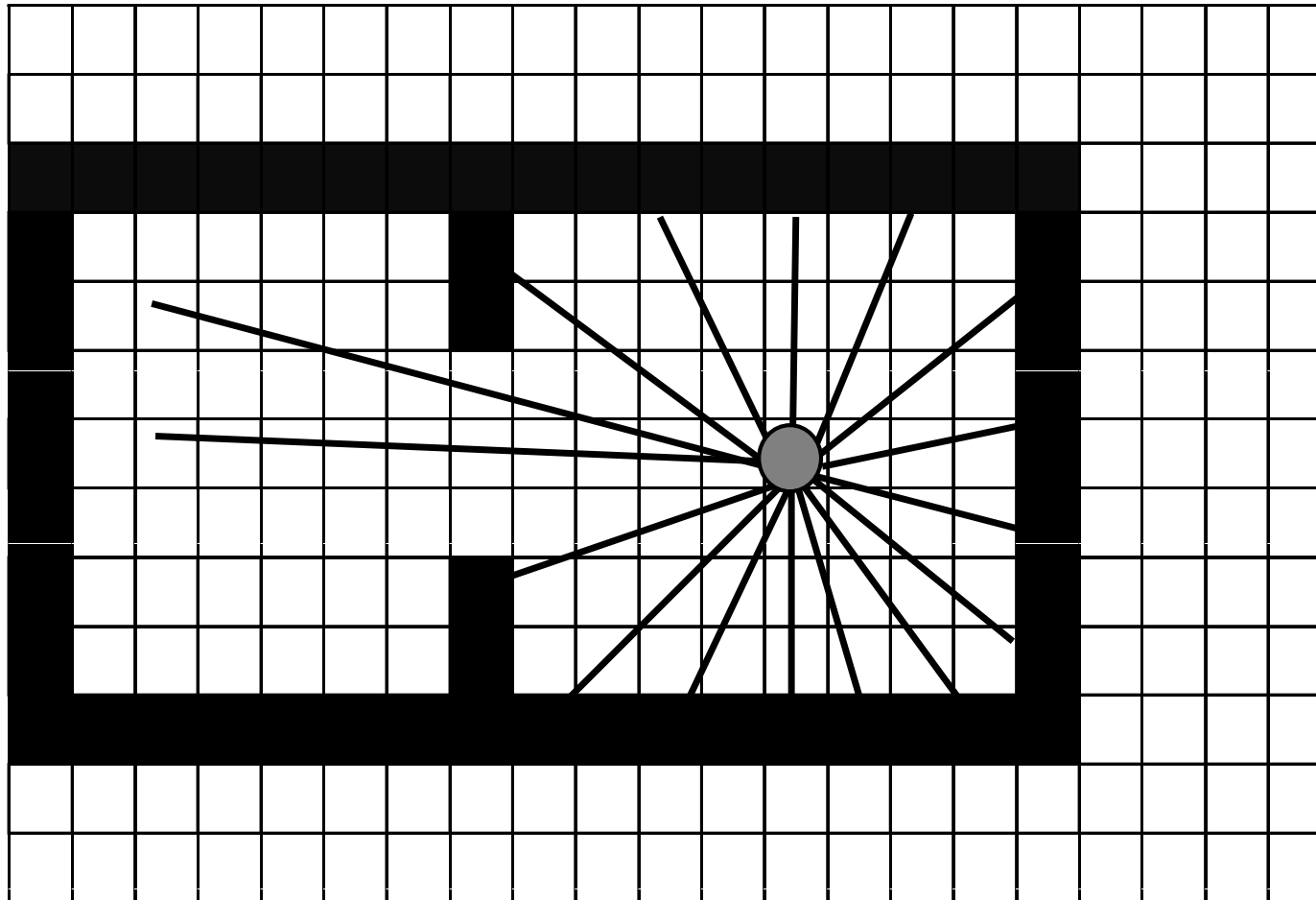


Gradnja mape D-S teorijom

Fuzija senzorskih podataka

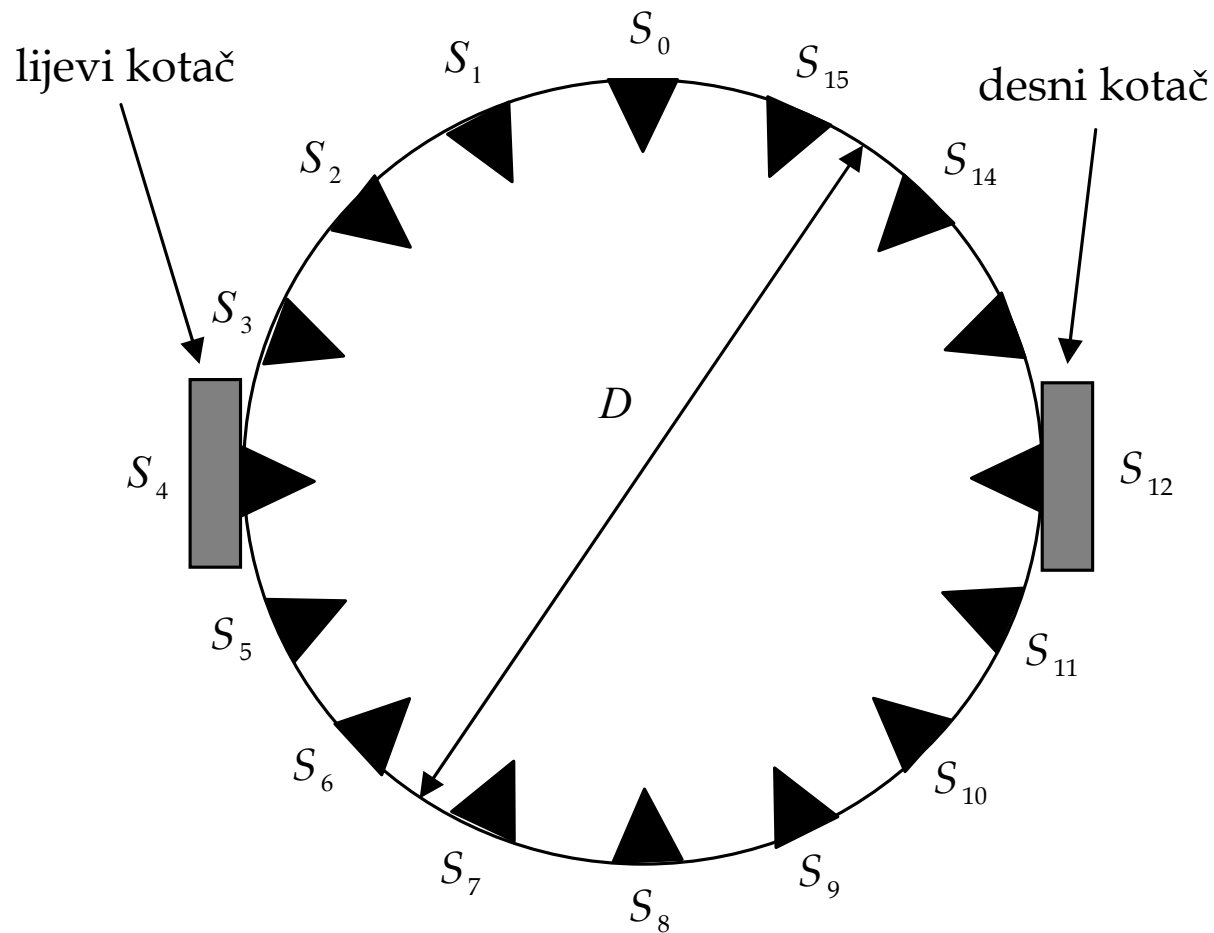


63/81



Primjer 5.

- Da bi se bolje razumio primjer na sljedećoj slici je prikazana platforma mobilnog robota sa 16 sonara raspoređenih u kružnom prstenu.



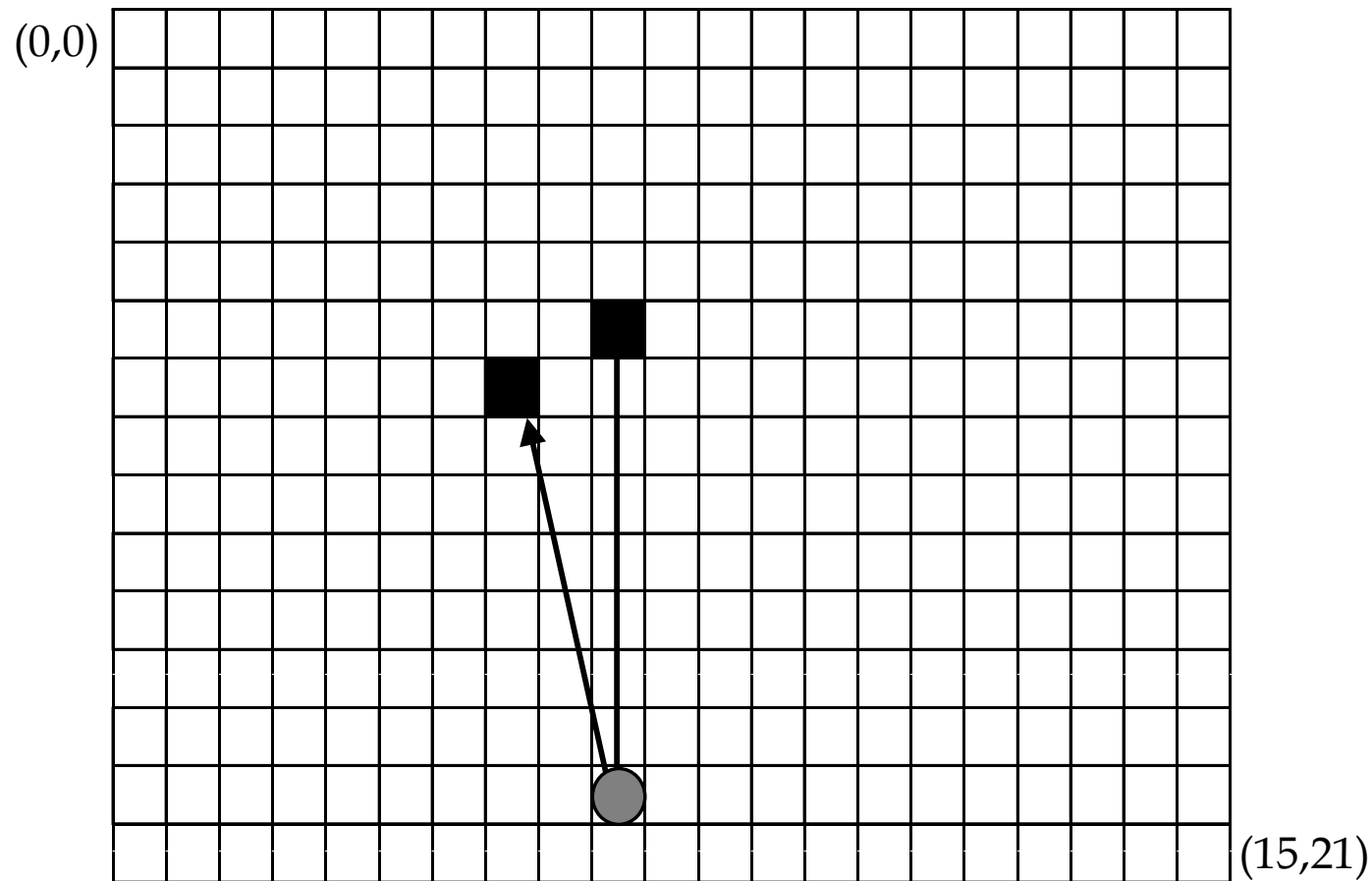
Primjer 5.

- Neka se robot u početnom trenutku nalazi u ćeliji $(14, 10)$, odnosno $C_{14,10}$.
- Prije početka kretanja sve ćelije imaju osnovne vjerojatnosti (*****).
- Nakon starta dobivena su mjerenja sonara S_0 i S_1 na udaljenostima $r_0 = 7$ i $r_1 = 5$ pod uglovima $\alpha_0 = 0^\circ$ i $\alpha_1 = 3^\circ$ (slika ispod) (Velagić, 2005; Velagić, Lačević i Peruničić, 2006).



Primjer 5.

- Neka se robot u početnom trenutku nalazi u ćeliji $(14,10)$, odnosno $C_{14,10}$.





Primjer 5.

- Uvjerenja da su ćelije (7,8) i (10,6) zauzete su:

$$m_{7,8}^{S_0(7)}(O) = \frac{\left(\frac{15-0}{15}\right)^2 + \left(\frac{1.5-|8-7|}{1.5}\right)^2}{2} \cdot 0.98 = 0.54488$$

$$m_{7,8}^{S_0(7)}(E) = 0$$

$$m_{7,8}^{S_0(7)}(\{E, O\}) = 1 - m_{7,8}^{S_0(7)}(O) = 0.45512$$

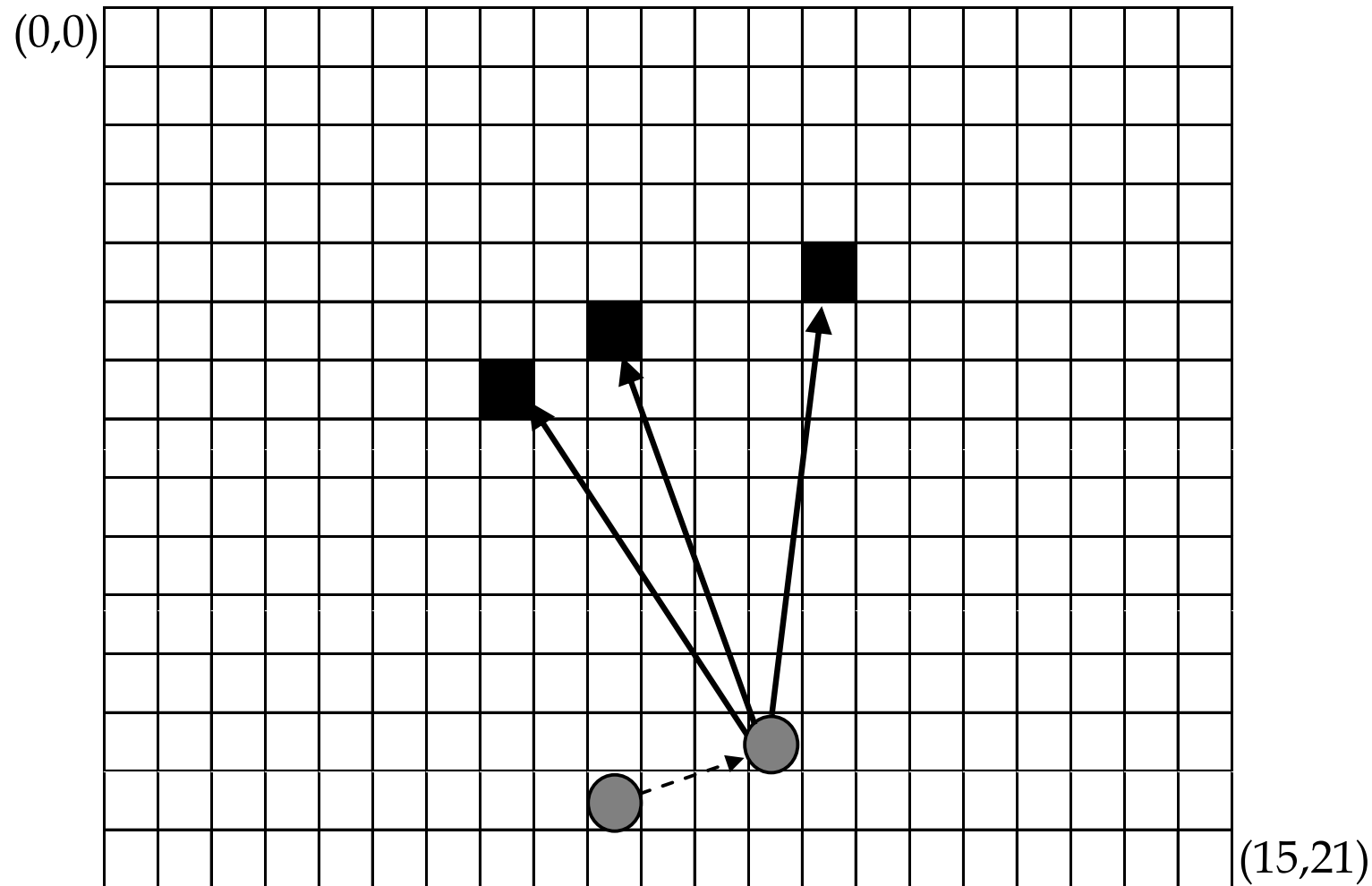
$$m_{6,10}^{S_1(5)}(O) = 0$$

$$m_{6,10}^{S_1(5)}(E) = \frac{\left(\frac{15-3}{15}\right)^2 + \left(\frac{8-1.5-5}{10-1.5}\right)^2}{2} = 0.336$$

$$m_{6,10}^{S_1(5)}(\{E, O\}) = 1 - m_{6,10}^{S_1(5)}(O) = 0.664$$

Primjer 5.

- U sljedećem trenutku se robot pomjerio u pravcu označenom isprekidanom linijom na slici



Primjer 5.

- Uvjerenja da su ćelije (7,8), (6,10) i (5,14) zauzete na temelju mjerenja sonara S_0 , S_1 i S_{15} ($r_0 = 6.5$, $r_1 = 7$, $r_{15} = 7.5$, $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 5$ i $\alpha_{15} = 4$) su:

$$m_{7,8}^{S_0(6.5)}(O) = \frac{\left(\frac{15-2}{15}\right)^2 + \left(\frac{1.5-|8-6.5|}{1.5}\right)^2}{2} \cdot 0.98 = 0.36848$$

$$m_{7,8}^{S_0(6.5)}(E) = 0$$

$$m_{7,8}^{S_0(6.5)}(\{E, O\}) = 1 - m_{7,8}^{S_0(6.5)}(O) = 0.63152$$

$$m_{6,10}^{S_1(7)}(O) = \frac{\left(\frac{15-5}{15}\right)^2 + \left(\frac{1.5-|8-7|}{1.5}\right)^2}{2} \cdot 0.98 = 0.27244$$

$$m_{6,10}^{S_1(7)}(E) = 0$$

$$m_{6,10}^{S_1(7)}(\{E, O\}) = 1 - m_{6,10}^{S_1(7)}(O) = 0.72756$$

Primjer 5.

$$m_{5,14}^{S_{15}(7.5)}(O) = \frac{\left(\frac{15-4}{15}\right)^2 + \left(\frac{1.5 - |8-7.5|}{1.5}\right)^2}{2} \cdot 0.98 = 0.48118$$

$$m_{5,14}^{S_{15}(7.5)}(E) = 0$$

$$m_{5,14}^{S_{15}(7.5)}(\{E, O\}) = 1 - m_{5,14}^{S_{15}(7.5)}(E) = 0.51882$$



Primjer 5.

- Kombiniranjem prethodnih i trenutnih mjerenja za ćelije (7,8) i (6,10) pomoću Dempsterovih pravila zaključivanja dobiva se:

$$m_{7,8}^t(E) = m_{7,8}^{t-1} \oplus m_{7,8}^t(E) = \frac{0 \cdot 0 + 0 \cdot 0.63152 + 0.45512 \cdot 0}{1 - 0 \cdot 0.36848 - 0.5488 \cdot 0} = 0$$

$$m_{7,8}^t(O) = m_{7,8}^{t-1} \oplus m_{7,8}^t(O) = \frac{0.5488 \cdot 0.36848 + 0.5488 \cdot 0.63152 + 0.45512 \cdot 0.36848}{1 - 0 \cdot 0.36848 - 0.5488 \cdot 0} = 0.7151$$

$$m_{7,8}^t(\{E, O\}) = 1 - 0.7151 = 0.2849$$

Primjer 5.

$$m_{6,10}^t(E) = m_{6,10}^{t-1} \oplus m_{6,10}^t(E) = \frac{0 \cdot 0 + 0 \cdot 0.72756 + 0.664 \cdot 0}{1 - 0 \cdot 0.27244 - 0.336 \cdot 0} = 0$$



$$m_{6,10}^t(O) = m_{6,10}^{t-1} \oplus m_{6,10}^t(O) = \frac{0.336 \cdot 0.27244 + 0.336 \cdot 0.72756 + 0.664 \cdot 0.27244}{1 - 0 \cdot 0.27244 - 0.336 \cdot 0} = 0.5169$$

$$m_{6,10}^t(\{E, O\}) = 1 - 0.5169 = 0.4831$$

$$m_{5,14}^t(O) = 0.48118$$

$$m_{5,14}^t(E) = 0$$

$$m_{5,14}^t(\{E, O\}) = 0.51882$$

Na temelju novog skeniranja povećalo se uvjerenje o zauzeću ćelija (7,8) i (6,10). Ovaj proces se dalje nastavlja dok robot ne dođe do cilja.

Primjer 5.

- Primjer mape zauzeća generirane Dempster-Shafereovom teorije uvjerenja prikazan je na slici (Murphy, 2000).

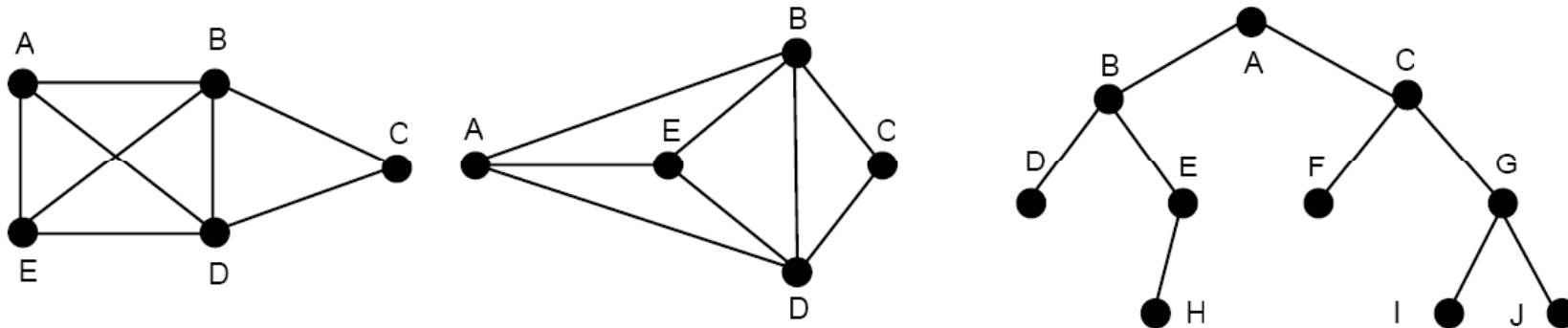


10.3. Topološke mape

- Da bi se izbjegle poteškoće u održavanju velikih metričkih mapa robotske okoline alternativno se koriste prikazi okoline u obliku grafova.
- Topološki prikaz okoline zaobilazi zahtjev za potencionalno velikim memorijskim prostorom za pohranu podataka o elementima mape koji je povezan sa metričkim mapama.
- **Topološke mape opisuju okolinu pomoću grafa koji spaja specifične lokacije u stvarnom svijetu (geometrijske značajke prostora).**
- Graf se sastoji od vrhova (čvorovi) i ivica (linija) koje povezuju vrhove. Također se može grafu pridružiti još jedan parametar koji izražava težinu odgovarajuće ivice.

Topološke mape

- Primjeri različitih grafova



75/81

- Mapa robotske okoline predstavljena grafom može se opisati skupom N čvorova V i M linija povezivanja E :

$$G = (V, E)$$

Topološke mape

- Čvorovi grafa i linije povezivanja su definirani na sljedeći način:

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_N)$$

$$E = (e_1, e_2, \dots, e_M)$$

- gdje su linije povezivanja dane sa:

$$e = (v_i, v_j)$$

- Skupovi V i E za graf sa prve slike na prethodnom slajdu su:

$$V = (A, B, C, D, E)$$

$$E = (AB, AD, AE, BC, BD, CD, DE)$$

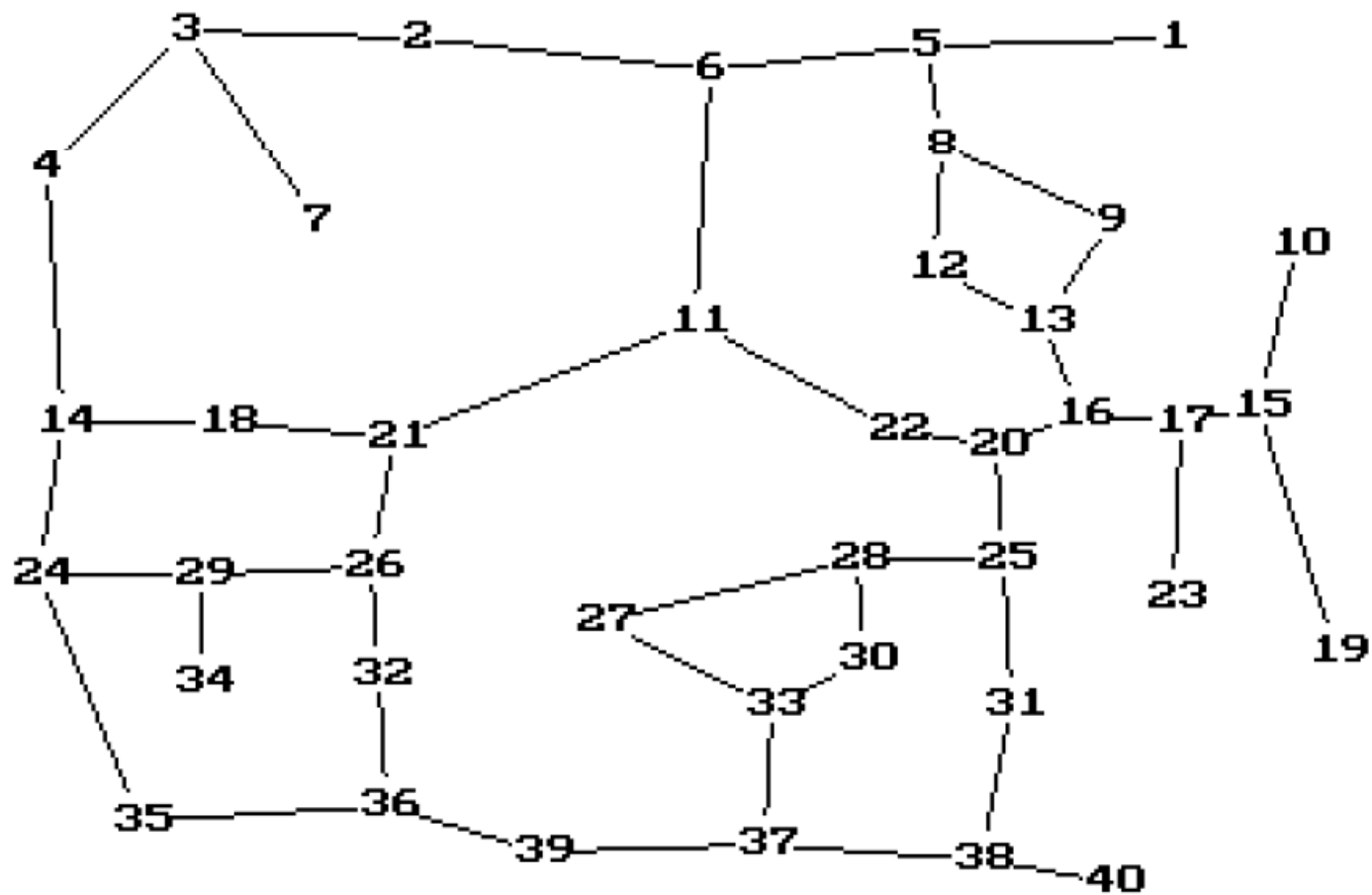
Topološke mape

- U robotskoj okolini čvorovima se označavaju uočljive situacije, mjesta ili orijentiri (kao što su otvori u zidu, prolazi, čoškovi prostorija, itd.).
- Ovi čvorovi se povezuju linijama ako postoji direktna staza između njih.
- U praksi se topološki prikazi koriste za kontinuirane okoline zasnovane na orijentirima ili drugim značajkama.
- Rezultati ekstrakcije topološke mape (grafa) iz mrežaste mape sa slike na slajdu 63. prikazani su na sljedećoj slici.



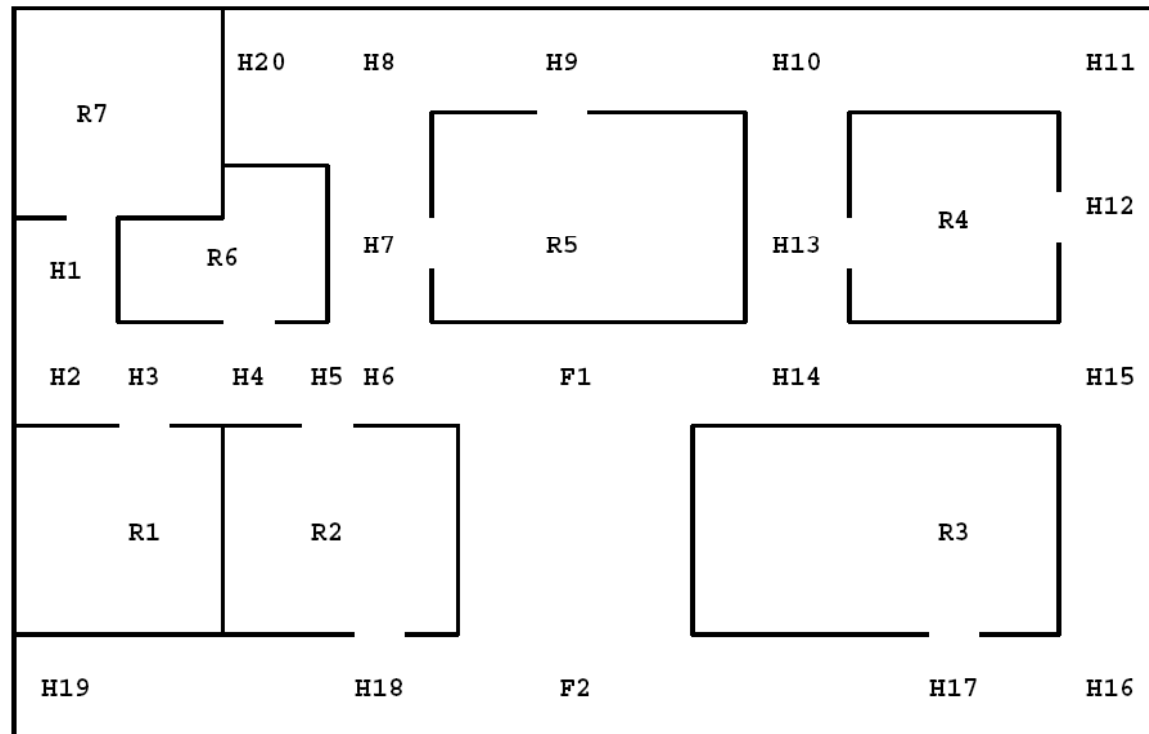
Topološke mape

- Topološki graf



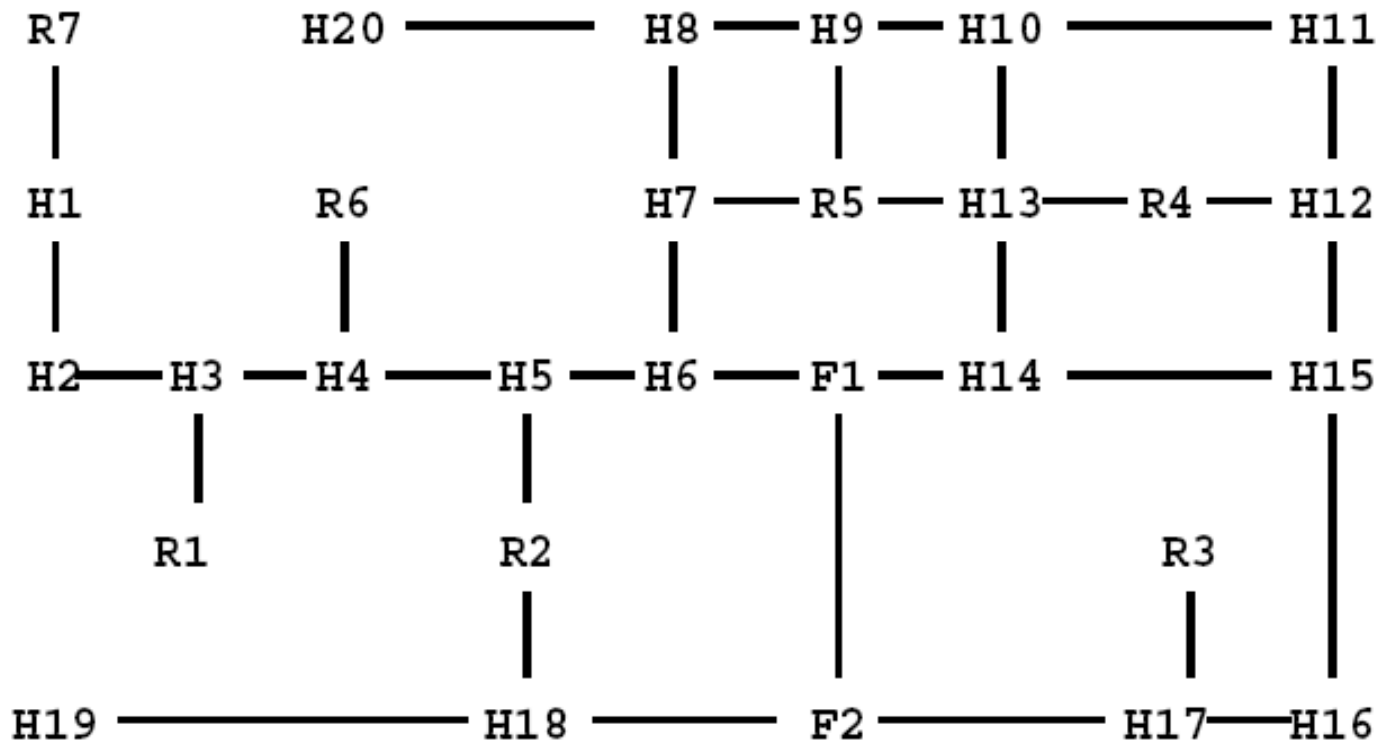
Topološke mape

- Na sljedećoj slici prikazana je metrička mapa prikaza jednog kata zgrade.
- Prostorije su označene oznakom R, a hodnici sa H. Prikaz istog kata zgrade pomoću grafa, odnosno topološke mape predočen je slikom na sljedećem slajdu.



Topološke mape

- Topološki prikaz kata zgrade sa prethodnog slajda



Topološke mape

- Na temelju topoloških grafova razvijene su brojne metode planiranja kretanja, kao što su **grafovi vidljivih vrhova** i **Voronoijevi grafovi**, koji će se detaljno razmatrati u jednom od sljedećih predavanja.
- Također je važan i problem kretanja po topološkim mapama i pronalaženje optimalnih puteva kroz topološke grafove.
- Za ove potrebe se najviše koriste Dijkstra, Bellman-Ford i Bug algoritmi, koji će se također razmatrati u jednom od sljedećih predavanja.

