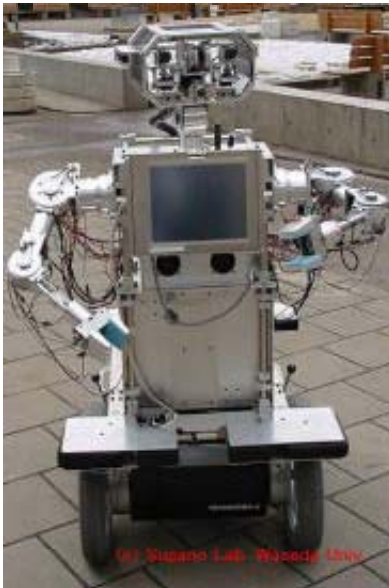


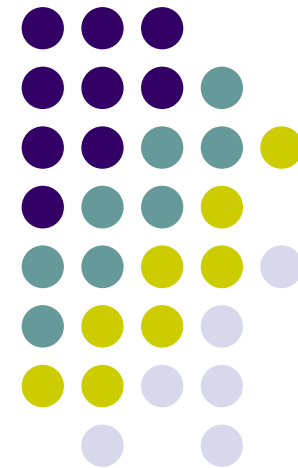
# Lekcija 2: *Lokomocija mobilnih robota*



Prof.dr.sc. Jasmin Velagić  
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

Kolegij: Mobilna robotika

2012/2013



## 2.1. Lokomocija

- **Lokomocija je proces u kome se pod djelovanjem sila pomjera autonomni robot ili neko drugo vozilo.**
- Proučavanje kretanja pod djelovanjem navedenih sila je predmet *dinamike*, dok *kinematika* matematički opisuje kretanje bez promatranja vanjskih sila koje ga uzrokuju.
- Drugim riječima, kinematika proučava geometrijske aspekte kretanja, a dinamika uključuje brzine i energije pridružene kretanju.
- Roboti koji nemaju potpuno neovisno upravljanje svakom od varijabli položaja, već se mora izvoditi složeno manevriranje da se dođe u željeni položaj, nazivaju se *neholonoskim*.
- Roboti kod kojih se svim varijablama položaja može neovisno upravljati nazivaju se *holonomskim robotima*. Takvi roboti se mogu kretati u svim pravcima.



# Lokomocija

- Postoje različite strategije kretanja koje se mogu primijeniti na mobilne robote.
- Izbor strategije ovisi o primjeni mobilnog robota i o njegovoj okolini:
  - **Kako se brzo robot može kretati?**
  - **Da li robot ima puzastu strukturu?**
  - **Da li robot mora prelaziti preko zemljišta i neravnih područja?**
  - **Da li je podloga po kojoj se mobilni robot kreće glatka ili hrapava?**



# Lokomocija

- Podjela mobilnih robota s obzirom na radnu sredinu:
- **Kopneni** (engl. terrestrial) roboti se kreću po zemlji. Oni su projektirani uzimajući u obzir prednost čvrste površine po kojoj idu i gravitacije. Iako se većina ovih robota kreće pomoću kotača, postoje i roboti iz ove grupe koji se uspinju, hodaju, kotrljaju, koriste tračnice, ili pak gmižu.
- **Vodeni** (engl. aquatic) roboti operiraju u vodi, bilo na površini vode ili pod vodom. Većina postojećih vodenih vozila pogoni se mlaznim motorima ili propelerima. Vodeni roboti su potencijalno važno područje istraživanja i primjene, budući da je većina Zemlje prekrivena vodom i velike dubine okeana nisu dostupne čovjeku.
- **Zračni** (engl. airborne) roboti često oponašaju postojeće letjelice ili ptice. Robotski helikopteri, letjelice s krilima, robotski upravljani padobranci i zračne lađe su primjeri zračnih robota koji su do danas dizajnirani. Zračni roboti imaju dosta zajedničkog s vodenim, uključujući potrebu za izlaznom energijom čak i u stacionarnom stanju.
- **Svemirski** (engl. space). Svemirski roboti operiraju u mikrogravitacijskom dijelu svemira i obično su predviđeni za održavanje svemirskih stanica. Različiti pogoni omogućuju robotu kretanje u takvim sredinama. Dvije su glavne vrste ovih robota, oni koji se penju i oni koji slobodno lebde.



# Lokomocija

- Za lokomociju mobilnih robota veoma važno je razmatrati **stabilnost** robota, **karakteristike kontakta** između robota i podloge i **vrstu okoline** unutar koje se mobilni robot kreće.
- Za **stabilnost** su relevantni sljedeći parametri: *broj i geometrija dodirnih tačaka*, *centar gravitacije*, *statička/dinamička stabilnost*, *nagib terena* po kome se robot kreće, itd.
- Posebno je važan problem kretanja po neravnom terenu.
- Roboti koji su namijenjeni kretanju po neravnim površinama koriste kotače, gusjenice ili noge.



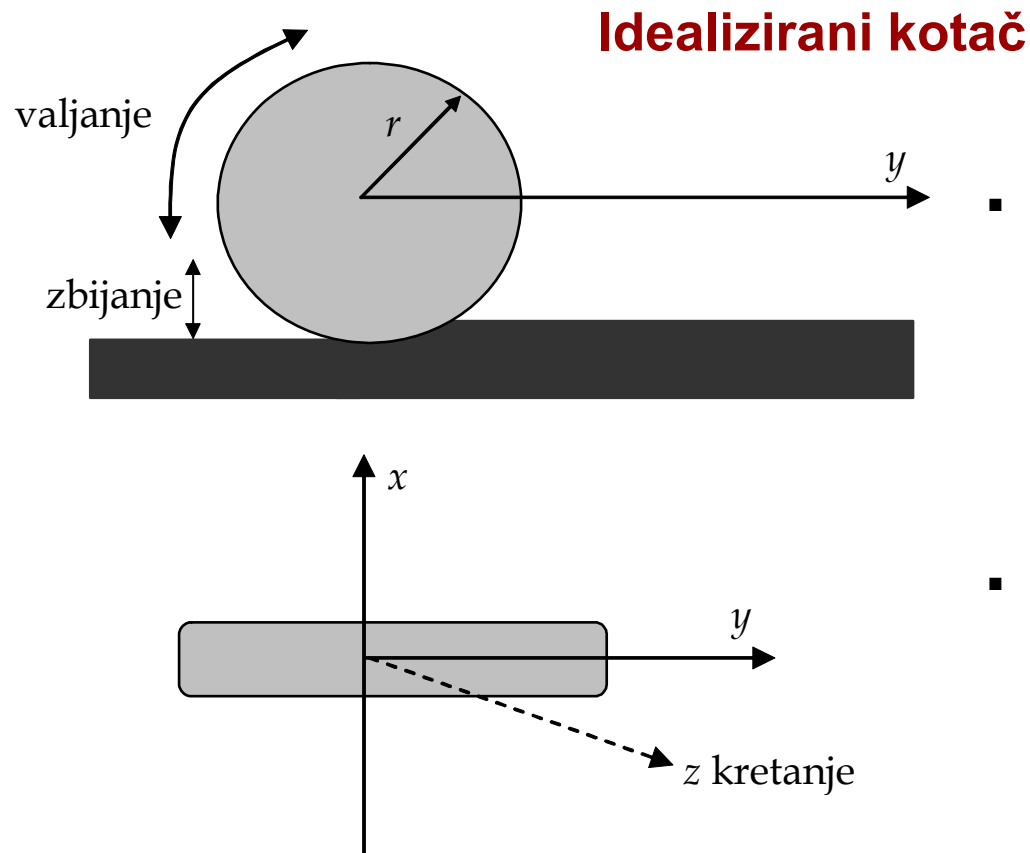
# Lokomocija

- Kotači na takvim robotima moraju imati dobre sisteme za amortizaciju, te sisteme za skretanje prilagođene takvim uvjetima.
- Gusjenice su zasigurno bolji način kretanja po neravnim površinama, zato što one ne moraju imati amortizaciju, a i sistem za skretanje (kao kod tenkova) im je vrlo efikasan na svim terenima.
- **Karakteristike kontakta** ovise o *dodirnim tačkama, duljini staze i njenom obliku, uglu pod kojim se obavlja kontakt, trenju*, itd.
- Što se tiče vrste **radne okoline** ona može predstavljati vodu, zrak, meku ili tvrdi podlogu, itd.



## 2.2. Mobilni roboti na kotačima

- Kada kotač dođe u dodir s podlogom javlja se trenje koje omogućuje njegovo okretanje (kotrljanje), što ima za posljedicu kretanje vozila.



- Ako kotač slobodno rotira oko  $x$  osi, robot pokazuje valjanje u smjeru  $y$  ose i izvjesno bočno klizanje.
- Stvarno kretanje kotača može biti duž  $z$  osi, ali uz uvjet malih brzina valjanja.

# Mobilni roboti na kotačima

- Jedan od prevladavajućih estimacijskih postupaka kretanja kod mobilnih robota temelji se na mjerenju pređenog puta.
- Estimacija pređenog puta (**odometrija**) provodi se mjerenjem okretaja kotača, odnosno mjerenjem ugaone brzine kotača.
- Najjednostavniji slučaj jest slobodno rotirajući kotač.
- U slučaju idealnog kotača, ovo implicira duljinu puta  $2\pi r$  za svaku rotaciju kotača polumjera  $r$ .
- U praksi, ponašanje kotača je znatno kompliciranije.
- Uz postojanje **bočnog klizanja**, nedovoljna vuča može također dovesti do **klizanja u smjeru kretanja**, što može učiniti estimaciju pređenog puta netačnom.





## Mobilni roboti na kotačima

- Dodatni faktori javljaju se zbog zbijanja podloge i kohezije između dodirne površine i kotača.
- Budući da ovi faktori ovise o promjenjivim karakteristikama podloge, teško je tačno estimirati pređeni put na temelju rotacije kotača.
- Odstupanje od idealnog modela događa se najčešće kada su sile narinute na kotač (ubrzanje ili usporenje).
- Prema tome, **uzdužno i bočno klizanje, neravna podloga i promjenjivi promjer kotača** su najčešći uzroci netačnosti estimacije pređenog puta.

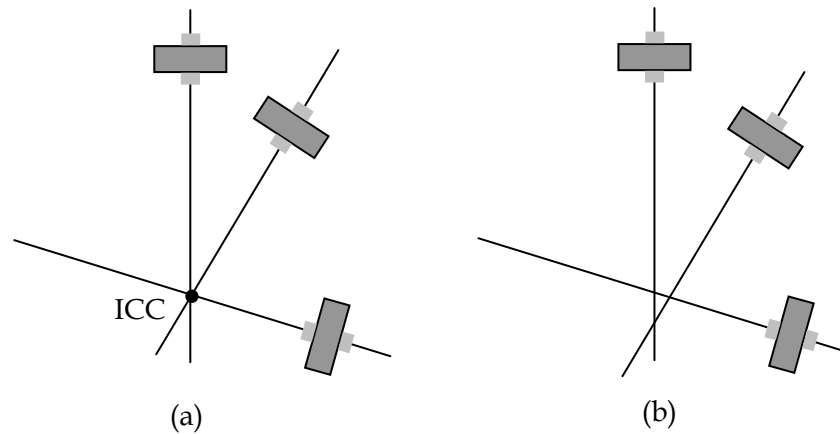


## Mobilni roboti na kotačima

- Nadalje, potrebno je razmotriti šta se događa kada vozilo sa više kotača dolazi u dodir s podlogom.
- Za sve kotače koji dodiruju podlogu i rotiraju, kretanje svakog od njih mora biti duž njihove zajedničke  $y$  ose.
- Tako kod robota sa kotačima prilikom izvođenja kretanja valjanja mora postojati tačka oko koje svaki kotač obavlja kružno kretanje.
- Ova tačka je poznata pod imenom **trenutni centar zakrivljenosti** (engl. instantaneous center of curvature - ICC) ili **trenutni centar rotacije** (engl. instantaneous center of rotation - ICR).



# Mobilni roboti na kotačima



- Ako se vozilu tokom kretanja mijenja ICC, neka svojstva kotača, kao što su njihove pojedinačne orijentacije s obzirom na vertikalnu os, moraju biti promijenjene.
- U praksi nije teško identificirati ICC tačku jer ona mora ležati na liniji podudaranja s osi valjanja svakog kotača koji je u dodiru s podlogom.
- Drugim riječima, ona mora ležati na pravcu koji se podudara s osi rotacije svakog kotača da bi kotrljanje bilo moguće.
- Različiti mehanizmi promjene ICC su mogući, i neki od njih će se razmatrati u ovoj lekciji.
- Oni ovise uglavnom o pogonskoj konfiguraciji mobilnog robota.

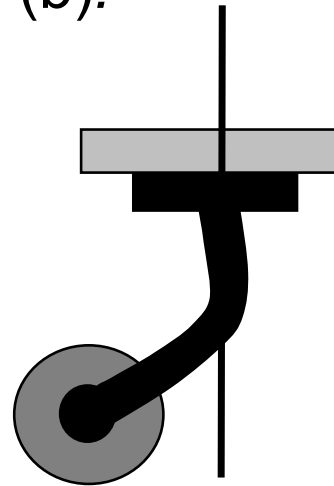
## Mobilni roboti na kotačima

- Ako su svi kotači u dodiru sa tlom sposobni za kotrljanje, tada ne samo da ICC mora postojati, nego brzina svakog kotača mora biti u skladu sa strogom rotacijom cjelokupnog mobilnog robota oko ICC-a.
- Ako se mobilni robot kreće na ravnoj podlozi tada on posjeduje tri stupnja slobode kretanja (3DOF): poziciju  $(x, y)$  i orijentaciju  $\theta$ .
- Trojka  $(x, y, \theta)$  određuje lokaciju, odnosno položaj robota.
- Ova se trojka naziva **vektor konfiguracije robota** ili **vektor varijabli položaja**.
- Mobilni roboti obično nemaju potpuno neovisno upravljanje svakom od tri navedene varijable vektora konfiguracije robota, već se mora izvoditi složeno manevriranje da se dođe u željeni položaj.

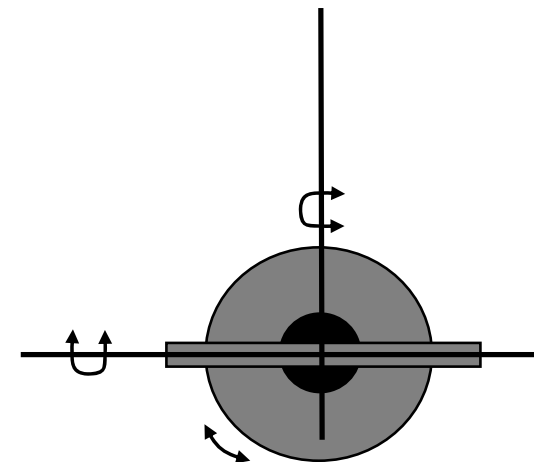


# Mobilni roboti na kotačima

- Kada se želi automobil parkirati na određeno mjesto, tada vozač mora obaviti seriju složenih manevara koji ovise o prirodi okoline i konfiguraciji vozila.
- Ovo je primjer tzv. *neholonomskog ograničenja*.
- Često mobilni roboti imaju i takozvane **pasivne kotače** koji ne doprinose niti upravljanju niti su pogonski, već služe samo kao dodatni oslonci radi osiguranja stabilnosti robota. Primjeri pasivnih kotača su *castor* (a) i *rollerball* (b).



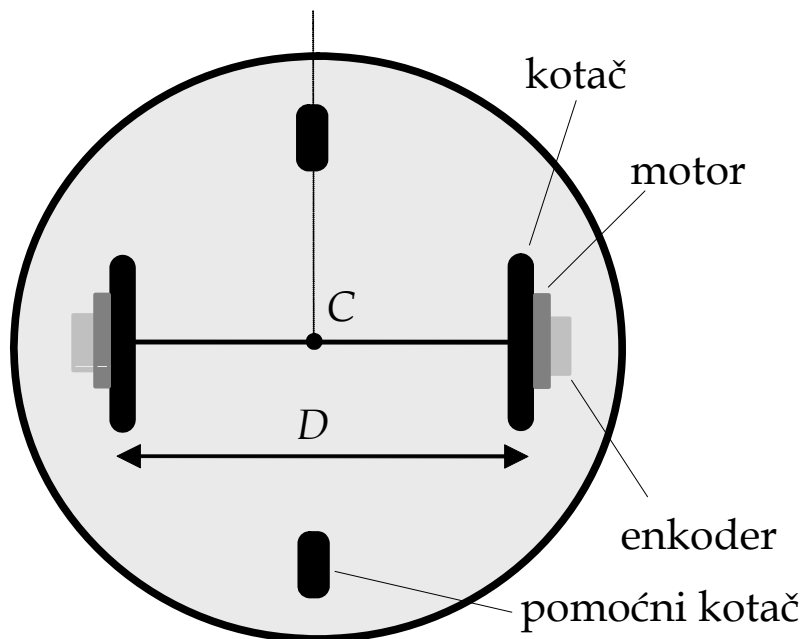
(a)



(b)

## 2.2.1. Mobilni robot sa diferencijalnim pog.

- Mobilni robot s diferencijalnim pogonom sastoji se od dva kotača ugrađena na zajedničkoj osovini upravljana posebnim motorima.
- Prednosti upotrebe diferencijalnog pogona su: **jednostavna izvedba, niska cijena i mogućnost rotacije robota u mjestu.**



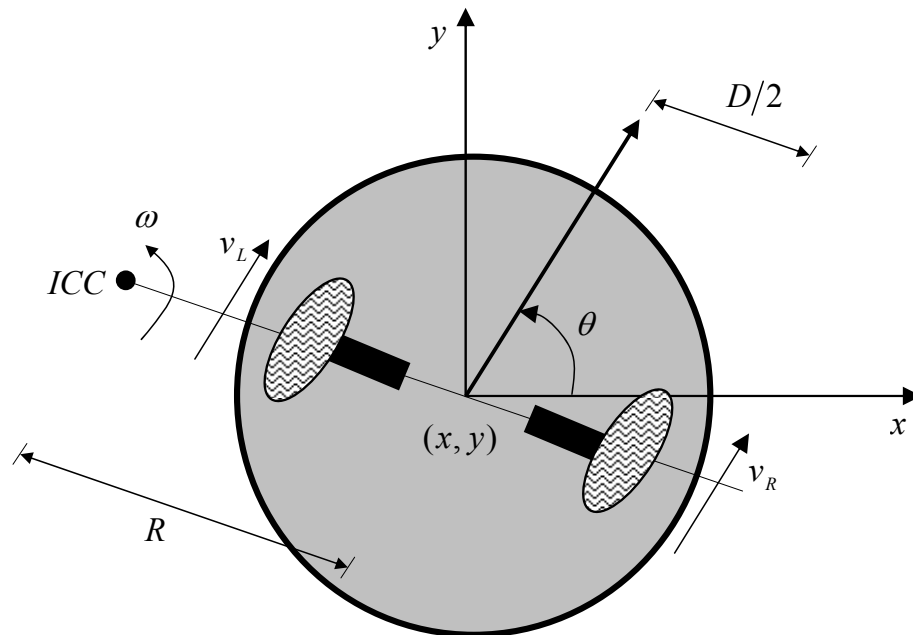
**Pioneer 3DX**



# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Kinematika robota sa diferencijalnim pogonom

- Problem direktne kinematike sastoji se u određivanju brzine mobilnog robota  $v$  i njegovog položaja  $(x, y, \theta)$  za zadane brzine kotača  $v_R$  i  $v_L$ . Pri tome se moraju uzeti u obzir kinematička ograničenja pogonskog sistema.
- Da bi se problem direktne kinematike riješio potrebno je prvo pravilno odabrati koordinatni sistem robota i odrediti ICC tačku, tj. polumjer rotacije robota  $R$  oko ICC-a.



$R$  – polumjer rotacije robota

$ICC$  – trenutni centar zakrivljenosti



# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Kinematika robota sa diferencijalnim pogonom



Linijske brzine lijevog i desnog kotača:

$$\begin{aligned}\omega(R + D/2) &= v_R \\ \omega(R - D/2) &= v_L\end{aligned}$$

U bilo kojem trenutku vrijedi:

$$R(t) = \frac{D (v_R(t) + v_L(t))}{2 (v_R(t) - v_L(t))}$$

$$\omega(t) = \frac{v_R(t) - v_L(t)}{D}$$

$$v(t) = \omega(t)R(t) = \frac{v_R(t) + v_L(t)}{2}$$



# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Kinematika robota sa diferencijalnim pogonom



17/63

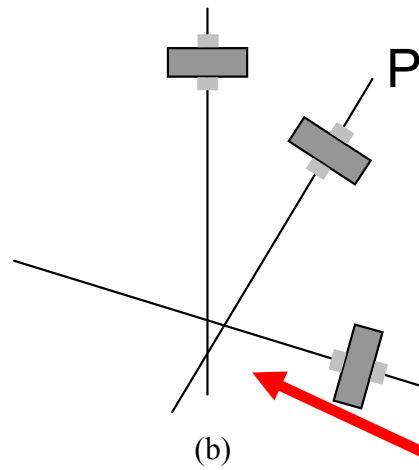
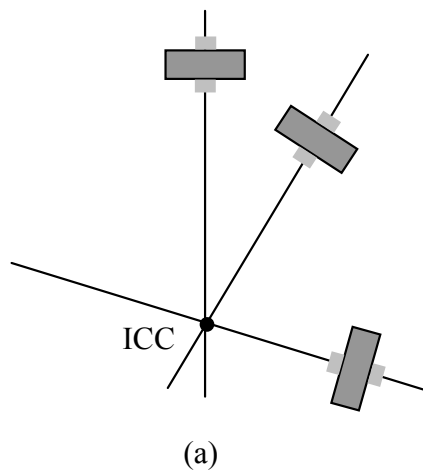
Postoji nekoliko specijalnih slučajeva.

- Ako je  $v_L = v_R$ , tada je vrijednost radijusa  $R$  beskonačna i robot se kreće pravolinijski.
- Ako je  $v_L = -v_R$ , tada je radijus nula i robot rotira oko srednje tačke između kotača, tj. rotira u mjestu. Ovo čini diferencijalni pogon atraktivnim za robote koji se moraju kretati u uskoj (suženoj) sredini.
- Za druge vrijednosti  $v_L$  i  $v_R$ , robot se ne može kretati pravolinijski već može slijediti krivolinijsku trajektoriju oko tačke udaljene za iznos  $R$  od centra robota, mijenjajući svoju poziciju i orijentaciju.

# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Direktna kinematika robota sa diferencijalnim pogonom

- Postojanje ICC tačke.
- Tačka oko koje svaki kotač obavlja kružno kretanje.
- Odabire se da leži na osi kotača (da bi klizanje bilo što manje).



Položaj ICC tačke (konstantan):

$$ICC = \begin{bmatrix} ICC_x \\ ICC_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - R \sin(\theta) \\ y + R \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Nepostojanje ICC tačke.

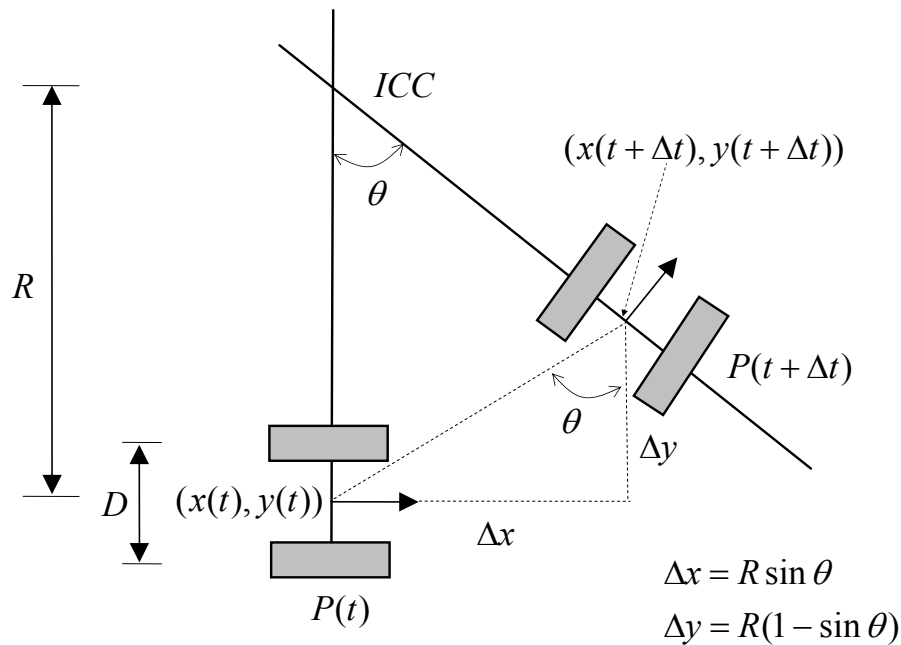
U trenutku  $(t+\Delta t)$  konfiguracija robota će biti:

$$\begin{bmatrix} x(t + \Delta t) \\ y(t + \Delta t) \\ \theta(t + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega\Delta t) & -\sin(\omega\Delta t) & 0 \\ \sin(\omega\Delta t) & \cos(\omega\Delta t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - ICC_x \\ y(t) - ICC_y \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ICC_x \\ ICC_y \\ \omega\Delta t \end{bmatrix}$$

# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Direktna kinematika robota sa diferencijalnim pogonom

- Određivanje položaja i orijentacije mobilnog robota



Konfiguracija robota  
(položaj + orijentacija):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t [v_R(\tau) + v_L(\tau)] \cos(\theta(\tau)) d\tau + x_0 \\
 y(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t [v_R(\tau) + v_L(\tau)] \sin(\theta(\tau)) d\tau + y_0 \\
 \theta(t) &= \frac{1}{D} \int_0^t [v_R(\tau) - v_L(\tau)] d\tau + \theta_0
 \end{aligned}
 \tag{*}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \\ 0 \end{bmatrix} v(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega(t)$$

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{1}{2}(v_R + v_L) \\
 \omega &= \frac{1}{D}(v_R - v_L)
 \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(v_R(t) + v_L(t)) \cos(\theta(t)) \\ \frac{1}{2}(v_R(t) + v_L(t)) \sin(\theta(t)) \\ \frac{1}{D}(v_R(t) - v_L(t)) \end{bmatrix}$$

# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Inverzna kinematika robota sa diferencijalnim pogonom

- Jako je interesantno pitanje, na koje je nekad teško odgovoriti, a koje glasi: “Kako se mogu odabrati upravljački parametri da robot postigne specificirani globalni položaj ili da slijedi zadanu trajektoriju?”
- Ovo je poznato kao zadatak određivanja ***inverzne kinematike*** vozila, odnosno inverzije kinematičkih veza između upravljačkih ulaza i ponašanja.
- Inverzna kinematika je također povezana sa problemom planiranja trajektorije.



# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Inverzna kinematika robota sa diferencijalnim pogonom



21/63

- Ako se pretpostavi da su  $v_L(t) = v_L$ ,  $v_R(t) = v_R$  i  $v_L \neq v_R$ , tada jednačba (\*) postaje:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{D}{2} \frac{v_R + v_L}{v_R - v_L} \sin\left(\frac{t}{D}(v_R - v_L)\right) \\y(t) &= -\frac{D}{2} \frac{v_R + v_L}{v_R - v_L} \cos\left(\frac{t}{D}(v_R - v_L)\right) + \frac{D}{2} \frac{v_R + v_L}{v_R - v_L} \\ \theta(t) &= \frac{t}{D}(v_R - v_L)\end{aligned} \quad (**)$$

gdje je  $(x, y, \theta)_{t=0} = (0, 0, 0)$ .

- Za zadano ciljno vrijeme i ciljnu poziciju  $(x, y)$ , jednačba (\*\*) računa  $v_R$  i  $v_L$ , ali ne osigurava neovisno upravljanje  $\theta$ -te.

# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Inverzna kinematika robota sa diferencijalnim pogonom



22/63

- Drugim riječima, postoji beskonačno mnogo rješenja za  $v_R$  i  $v_L$  iz (\*\*), ali sva rješenja odgovaraju kretanju robota oko istog koji prolazi kroz tačku  $(0,0)$  u trenutku  $t = 0$  i  $(x, y)$  u trenutku  $t = t$ ; međutim, robot ide oko kruga u različitim vremenskim trenucima i različitim smjerovima.
- Umjesto inverzije jednažbe (\*) s ciljem dobivanja upravljačkih parametara koji osiguravaju postizanje specificirane robotske poze, promatraju se specijalni slučajevi kretanja vozila s diferencijalnim pogonom.



# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Inverzna kinematika robota sa diferencijalnim pogonom

- Ako je  $v_L = v_R = v$  kretanje mobilnog robota se pojednostavljuje na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} x(t + \Delta t) \\ y(t + \Delta t) \\ \theta(t + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) + v \cos(\theta(t)) \Delta t \\ y(t) + v \sin(\theta(t)) \Delta t \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (***)$$

to jest, robot se kreće pravolinijski.

- Ako se odabere  $-v_L = v_R = v$ , tada se jednačba (\*\*\*) pojednostavljuje u oblik:

Robot rotira u ravnini.

$$\begin{bmatrix} x(t + \Delta t) \\ y(t + \Delta t) \\ \theta(t + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) + \frac{2v\Delta t}{D} \end{bmatrix}$$

# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Inverzna kinematika robota sa diferencijalnim pogonom

- Prema tome, kod pogonjenja robota do neke ciljne konfiguracije  $(x, y, \theta)$ , robot može rotirati u mjestu dok se kreće prema cilju  $(x, y)$ , zatim pogoniti prema naprijed do stizanja u ciljnu tačku  $(x, y)$ , i nakon toga okretati se u mjestu dok se ne postigne zahtijevana orijentacija  $\theta$ .
- Ovo nisu jedina rješenja inverzne kinematike, nego ih ima više koja se temelje na glatkoj promjeni trajektorija.





# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Dinamika robota sa diferencijalnim pogonom

- Određivanje *dinamičkog modela* mobilnog robota bitno je sa stajališta simulacije kretanja i sinteze algoritma upravljanja.
- Dinamičko ponašanje mobilnog robota dato je u obliku vremenske promjene konfiguracije robota u ovisnosti o momentima koji djeluju na zglobove, a koji nastaju djelovanjem pogona pridruženih kotačima mobilnog robota.
- Ova povezanost može se izraziti skupom diferencijalnih jednačbi, tzv. *jednadžbi kretanja*, koje određuju odziv robota pod djelovanjem ulaznih momenata.



# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Dinamika robota sa diferencijalnim pogonom



- Lagrangeova formulacija:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$$

gdje su  $T$  i  $U$  kinetička i potencijalna energija.

- Jednadžbe kretanja na temelju Lagrangeove funkcije:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial}{\partial q_i} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n$$

odnosno (jer se robot kreće u ravnini):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial}{\partial q_i} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n$$

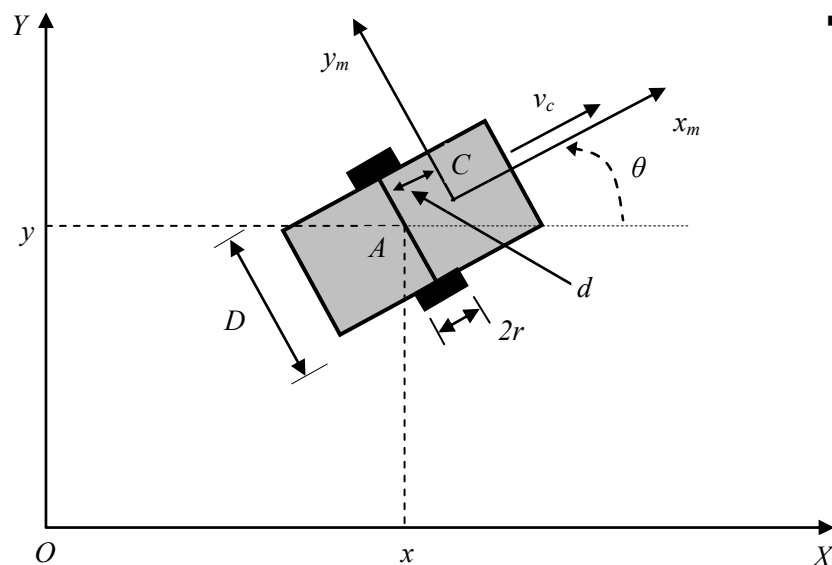
# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Dinamika robota sa diferencijalnim pogonom

- Model se izvodi za robot prikazan na slici [Velagić, Lačević i Peruničić, 2005].



27/63



Kretanje centra mase:

$$\begin{aligned}\dot{x}_C &= \dot{x}_A - d\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y}_C &= \dot{y}_A + d\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{\theta} &= \frac{r(\dot{\theta}_R - \dot{\theta}_L)}{D}\end{aligned}$$

- Kinetička energija mobilne platforme:

$$T = T_l + T_r + T_{kr}$$

gdje su:

$$T_l = \frac{1}{2} m v_c^2 \quad \text{- Kinetička energija linijskog kretanja robota}$$

$$T_r = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 \quad \text{- Kinetička energija rotacije robota}$$

$$T_{kr} = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_R^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_L^2 \quad \text{- Kinetička energija rotacije oba kotača}$$

$m$  je masa robota,  $I_0$  moment inercije kotača i rotora zajedno.

# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Dinamika robota sa diferencijalnim pogonom



28/63

- Uvrštavanjem u gornju jednažbu:

$$\dot{x}_A = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_R + \dot{\theta}_L) \cos \theta$$
$$\dot{y}_A = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_R + \dot{\theta}_L) \sin \theta$$

dobiva se:

$$\dot{x}_C = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_R + \dot{\theta}_L) \cos \theta - d\dot{\theta} \sin \theta$$
$$\dot{y}_C = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_R + \dot{\theta}_L) \sin \theta + d\dot{\theta} \cos \theta$$

- Uvrštavanjem navedenih izraza u izraze za energije slijedi:

$$T_l = \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) = \frac{m}{2} \left( \frac{r^2}{4}(\dot{\theta}_R + \dot{\theta}_L)^2 + \frac{r^2 d^2}{D^2}(\dot{\theta}_R - \dot{\theta}_L)^2 \right)$$

# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Dinamika robota sa diferencijalnim pogonom



$$T_r = \frac{r^2}{2D^2} I_A (\dot{\theta}_R - \dot{\theta}_L)^2$$

$$T_{kr} = \frac{1}{2} I_0 (\dot{\theta}_R + \dot{\theta}_L)^2$$

gdje je  $I_A = I_C + md^2$  moment inercije oko tačke  $A$ .

- Ukupna kinetička energija mobilnog robota je:

$$T = \frac{mr^2}{8} (\dot{\theta}_R + \dot{\theta}_L)^2 + \frac{r^2 (I_A + md^2)}{8R^2} (\dot{\theta}_R - \dot{\theta}_L)^2 + \frac{I_0}{2} (\dot{\theta}_R + \dot{\theta}_L)^2$$

odnosno:

$$T = T(\dot{\theta}_R, \dot{\theta}_L) = \left( \frac{mr^2}{8} + \frac{(I_A + md^2)r^2}{2D^2} + \frac{I_0}{2} \right) \dot{\theta}_R^2 + \left( \frac{mr^2}{8} + \frac{(I_A + md^2)r^2}{2D^2} + \frac{I_0}{2} \right) \dot{\theta}_L^2 + \left( \frac{mr^2}{4} - \frac{(I_A + md^2)r^2}{D^2} \right) \dot{\theta}_R \dot{\theta}_L$$

# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Dinamika robota sa diferencijalnim pogonom



- Lagrangeove funkcije:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_R} = 2 \left( \frac{mr^2}{8} + \frac{(I_A + md^2)r^2}{2D^2} + \frac{I_0}{2} \right) \dot{\theta}_R + \left( \frac{mr^2}{4} - \frac{(I_A + md^2)r^2}{D^2} \right) \dot{\theta}_L$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_R} \right) = \left( \frac{mr^2}{4} - \frac{r^2 I_1}{D^2} \right) \ddot{\theta}_L + \left( \frac{mr^2}{4} + \frac{r^2 I_1}{D^2} + I_0 \right) \ddot{\theta}_R$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_L} = 2 \left( \frac{mr^2}{8} + \frac{r^2 I_1}{2D^2} + \frac{I_0}{2} \right) \dot{\theta}_L + \left( \frac{mr^2}{4} - \frac{r^2 I_1}{D^2} \right) \dot{\theta}_R$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_L} \right) = \left( \frac{mr^2}{4} - \frac{r^2 I_1}{D^2} \right) \ddot{\theta}_R + \left( \frac{mr^2}{4} + \frac{r^2 I_1}{D^2} + I_0 \right) \ddot{\theta}_L$$

- Za neholonomni mobilni robot:

$$\xi_1 = \tau_R - K_{tr} \dot{\theta}_R$$

$$\xi_2 = \tau_L - K_{tr} \dot{\theta}_L$$

pogonski moment

moment usljed viskoznog trenja

# Mobilni robot sa diferencijalnim pogonom

## Dinamika robota sa diferencijalnim pogonom

- Dinamička jednađžba mobilnog robota:

$$\begin{aligned} A\ddot{\theta}_R + B\ddot{\theta}_L &= \tau_R - K_{tr}\dot{\theta}_R \\ B\ddot{\theta}_R + A\ddot{\theta}_L &= \tau_L - K_{tr}\dot{\theta}_L \end{aligned}$$

gdje su:

$$A = \left( \frac{mr^2}{4} + \frac{r^2 I_1}{D^2} + I_0 \right)$$

$$B = \left( \frac{mr^2}{4} - \frac{r^2 I_1}{D^2} \right)$$



## 2.2.2. Mobilni robot sa sinhronim pogonom

- **Tipične konfiguracije mobilnih robota sa sinhronim pogonom uključuju tri ili više pogonskih kotača, mehanički povezanih na način da svi kotači rotiraju u istim smjerovima sa jednakim brzinama.**
- Na taj način se ostvaruje skladno kretanje kotača.
- Za postizanje ovog sklada koriste se dva neovisna motora, jedan za valjanje svih kotača prema naprijed i drugi za njihovo rotiranje (okretanje).
- Budući da svi kotači ostaju paralelni, roboti sa sinhronim pogonom uvijek rotiraju oko centra robota.
- Na ovaj način oni imaju sposobnost direktnog upravljanja orijentacijom  $\theta$ .





## Mobilni robot sa sinhronim pogonom

- Sposobnost neovisnog upravljanja rotacijom i brzinom robota pojednostavljuje cjelokupno upravljanje robotom i omogućuje da se kretanje robota promatra kao kretanje jedne idealizirane tačke.
- Pogonske platforme robota sa sinhronim pogonima su obično trokutastog ili cilindričnog oblika.
- Mobilni roboti sa sinhronim pogonom su osjetljivi na male promjene glatkoće dodirne površine.
- Ove promjene uzrokuju problem u poravnavanju kotača, budući da svaki kotač prelazi različit put.



## Mobilni robot sa sinhronim pogonom

- Računanje odometrije sinhronog pogona je gotovo trivijalno; zakretanje vozila se jednostavno izvodi iz enkodera koji mjeri ugao zakreta, dok je pomak u smjeru kretanja dan sljedećim izrazom:

$$d = \frac{2\pi N}{C_e} R_e$$

gdje su:

$d$  = pomak vozila duž putanje,

$N$  = broj obrtaja osovine motora mjeren enkoderom,

$C_e$  = broj obrtaja kotača mjeren enkoderom,

$R_e$  = efektivni polumjer kotača.

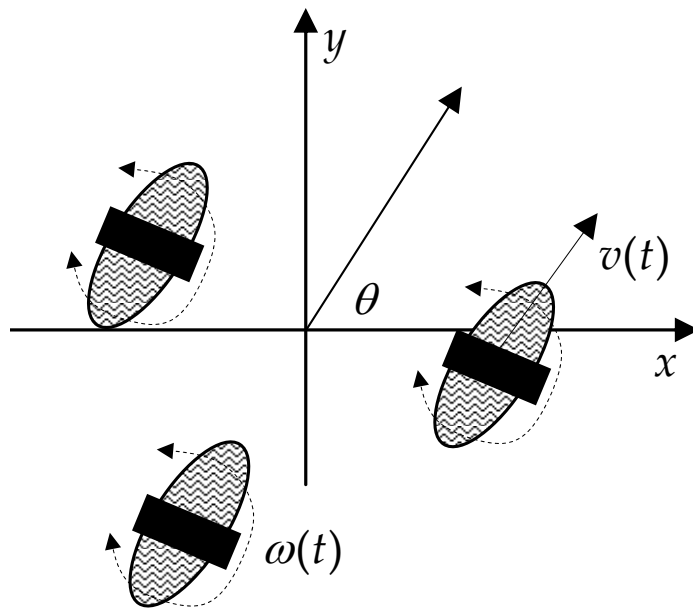




# Mobilni robot sa sinhronim pogonom

## Direktna kinematika

- Promatrajmo tipičnu konfiguraciju mobilnog robota sa tri kotača.
- Mobilni robot sa sinhronim pogonom rotira oko svog centra brzinom  $\omega(t)$  i linijski se kreće brzinom  $v(t)$ .



$$x(t) = \int_0^t v(t) \cos(\theta(t)) dt$$
$$y(t) = \int_0^t v(t) \sin(\theta(t)) dt$$
$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt$$

ICC tačka u beskonačnosti

Mijenjanje orijentacije kotača manipulira smjerom prema ICC tački.

# Mobilni robot sa sinhronim pogonom

## Inverzna kinematika

- Budući da se promjene u orijentaciji mogu u potpunosti razdvojiti od translacije, inverzna kinematika vozila sa sinhronim pogonom je jako slična specijalnom slučaju inverzne kinematike diferencijalnog pogona.
- Za razmatranje su važna dva specijalna slučaja:
  - (1) ako je  $v(t) = 0$  i  $\omega(t) = \omega$  za neki period  $\Delta t$ , tada robot rotira u mjestu brzinom  $\omega\Delta t$  i
  - (2) ako je  $\omega(t) = 0$  i  $v(t) = v$  za isti period  $\Delta t$ , tada se robot kreće u smjeru u kojem je postavljena udaljenost  $v\Delta t$ .



## Mobilni robot sa sinhronim pogonom

- Primjeri mobilnih robota sa sinhronim pogonom prikazani su na slici.



37/63



Mobilni robot RWI B-21 sa sinhronim pogonom (© RWI, USA)



Spider robot (© Ransomes Jacobsen)

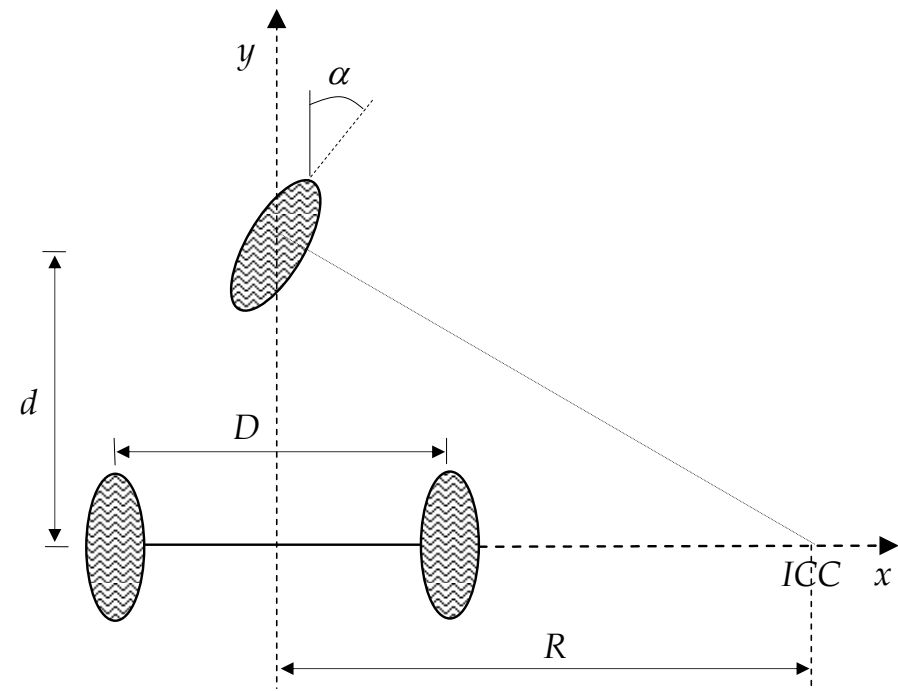
## 2.2.3. Mobilni robot sa tricikl pogonom

- **Tipična konfiguracija mobilnog robota sa tricikl pogonom sastoji se od jednog pogonskog kotača na prednjoj i dva pasivna kotača na zadnjoj strani vozila, pri čemu su pasivni kotači pričvršćeni na zajedničku osovinu.**
- Također, tricikl pogon može imati i dva pogonska i jedan pasivni kotač.
- Odometri su uglavnom smješteni na zadnjim pasivnim kotačima.
- Kretanje robota je određeno upravljanjem smjera napredovanja (određenog uglom  $\alpha$ ) i brzinom  $v_p$ .
- Obje upravljačke varijable ovise o prednjem pogonskom kotaču.



# Mobilni robot sa tricikl pogonom

- U osnovi on ima jednostavnu izvedbu i stoga nalazi široku primjenu u mobilnoj robotici.
- Dobro svojstvo tricikl pogona je nepostojanje klizanja.
- Loša svojstva tricikl pogona su složeno planiranje putanje (ne mogu se okretati u mjestu) i problemi zakretanja pri nultoj brzini.



# Mobilni robot sa tricikl pogonom

## Direktna kinematika

- Kinematičke jednačbe:

$$R(t) = d \tan(\pi/2 - \alpha(t))$$

$$\omega(t) = \frac{v(t)}{\sqrt{d^2 + R^2(t)}}$$

$\omega$  - ugaona brzina oko tačke koja leži na rastojanju  $R$  od okomite linije (normala),

$v$  - linijska brzina prednjih kotača,

$d$  - udaljenost između prednjeg kotača i osi zadnjih kotača.



# Mobilni robot sa tricikl pogonom

## Direktna kinematika

- Budući da je  $v_p = r\omega$  slijedi ( $r$  – polumjer kotača):

$$\omega(t) = \frac{r\omega_p(t)}{\sqrt{d^2 + R^2(t)}} = \frac{v_p(t)}{d} \sin \alpha(t)$$

- Komponente linijske brzine  $v$  i ugaona brzina robota (uz zanemarenje klizanja):

$$v_x(t) = v_p(t) \cos \alpha(t)$$

$$v_y(t) = 0$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{v_p(t)}{d} \sin \alpha(t)$$



# Mobilni robot sa tricikl pogonom

## Direktna kinematika



- Kombiniranjem ranijih izraza dobiva se:

$$x(t) = \int_0^t v_p(\tau) \cos(\alpha(\tau)) \cos(\theta(\tau)) d\tau + x_0$$
$$y(t) = \int_0^t v_p(\tau) \cos(\alpha(\tau)) \sin(\theta(\tau)) d\tau + y_0$$
$$\theta(t) = \int_0^t \frac{v_p(\tau)}{d} \sin(\alpha(\tau)) d\tau + \theta_0$$

- Iz prethodnog izraza slijedi:

$$\dot{x}(t) = v_p(t) \cos(\alpha(t)) \cos(\theta(t))$$
$$\dot{y}(t) = v_p(t) \cos(\alpha(t)) \sin(\theta(t))$$
$$\dot{\theta}(t) = \frac{v_p(t)}{d} \sin(\alpha(t))$$

$$v(t) = v_p(t) \cos(\alpha(t))$$
$$\omega(t) = \frac{v_p(t)}{d} \sin(\alpha(t))$$

**→**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

# Mobilni robot sa tricikl pogonom

## Inverzna kinematika

- Prvi slučaj, kada je  $\alpha = 0$ , robot se kreće prema naprijed i dobiva se:

$$\begin{bmatrix} x(t + \Delta t) \\ y(t + \Delta t) \\ \theta(t + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) + v(t) \cos(\theta(t)) \Delta t \\ y(t) + v(t) \sin(\theta(t)) \Delta t \\ \theta(t) \end{bmatrix}$$

- Drugi slučaj se odnosi na mogućnost okretanja (rotacije) pogonskog kotača u iznosu  $\pm 90^\circ$ . Tada se robot može okretati u mjestu:

$$\begin{bmatrix} x(t + \Delta t) \\ y(t + \Delta t) \\ \theta(t + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \pm \frac{v(t) \Delta t}{d} \end{bmatrix}$$



# Mobilni robot sa tricikl pogonom

## Inverzna kinematika

- Kada se prednji kotač ne može zakretati tada nije moguće mijenjati orijentaciju robota bez istovremenog mijenjanja njegove pozicije.
- Ograničavanje područja zakretanja kotača rezultira ograničavanjem polumjera zakrivljenosti kruga oko koga se robot može voziti.
- U praksi, čak i ako se ne bi ograničavao polumjer zakrivljenosti mnogi mobilni roboti sa kotačima bi ostvarivali linijsko kretanje u slučaju kada žele obavljati rotacijsko kretanje.



# Mobilni robot sa tricikl pogonom

## Inverzna kinematika

- Problem inverzne kinematike može se riješiti na način sličan onima za mobilne robote sa diferencijalnim ili sinhronim pogonom, ako je robot sa tricikl pogonom sposoban ostvarivati kretanja sa uglom zakretanja od  $\pm 90^\circ$ .
- Međutim, ako je ugao zakretanja ograničen tada je pogonjenje robota do pojedinačne lokacije mnogo složenije.

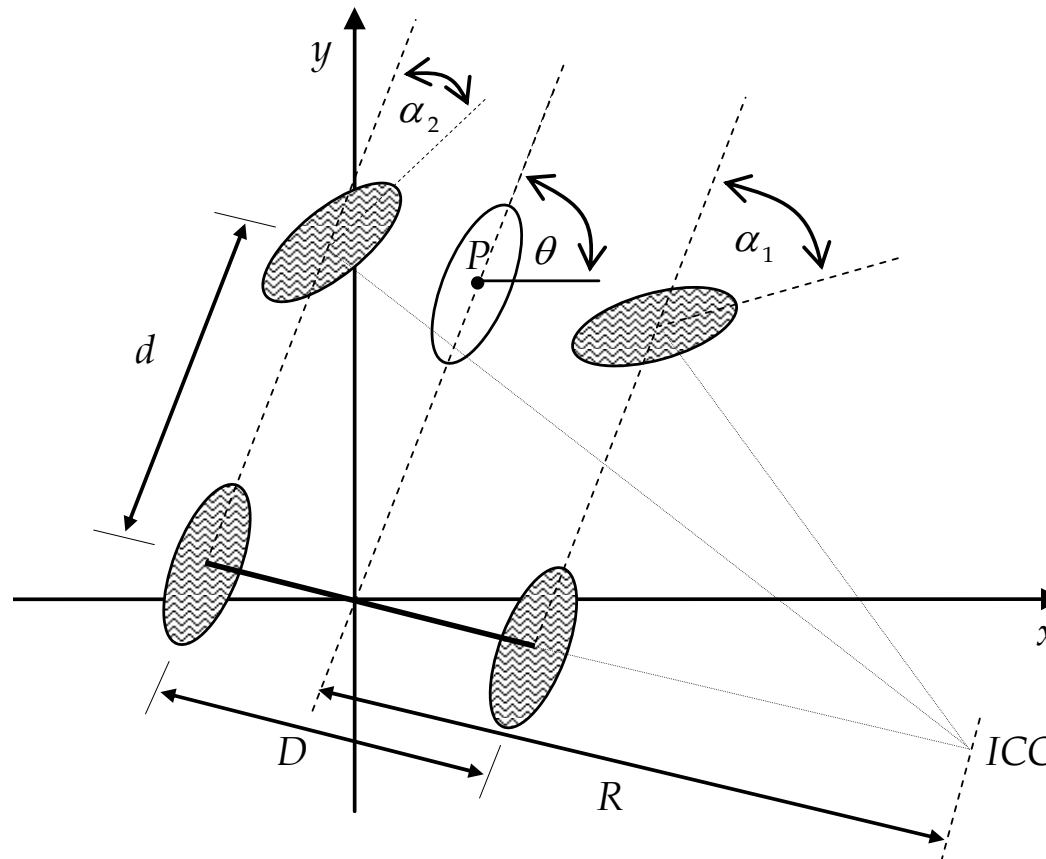


RTImagic Milva robot sa tricikl pogonom



## 2.2.4. Mobilni robot sa automobilskim pog.

- Kod ove vrste pogona, samo su prva dva kotača pogonska i svaki od njih rotira neovisno sa različitim iznosom ugla u odnosu na ICC tačku, koja mora ležati na liniji koja prolazi kroz osovinu zadnjih kotača.



# Mobilni robot sa automobilskim pogonom

- Unutarnji kotač se zakreće za veći ugao od vanjskog kotača i shodno tome prelazi manju udaljenost od vanjskog.
- Ovakva geometrija vozila zadovoljava tzv. Ackermanovu jednadžbu:

$$\cot \alpha_1 - \cot \alpha_2 = + \frac{D}{d}$$

$\alpha_1$  = relativni ugao zakreta unutarnjeg kotača,

$\alpha_2$  = relativni ugao zakreta vanjskog kotača,

$D$  = udaljenost između sredina susjednih kotača,

$d$  = udaljenost između osovina prednjih i zadnjih kotača.



# Mobilni robot sa automobilskim pogonom

- Stvarni ugao zakreta vozila  $\theta$ , koji se može promatrati kao ugao kojeg zatvara kotač postavljen u zamišljenom centru osovine prednjih kotača  $P$ , može se izraziti preko zakreta unutarnjeg ili vanjskog pogonskog kotača:

$$\cot \theta - \cot \alpha_1 = \frac{D}{2d}$$

ili

$$\cot \theta = \cot \alpha_1 + \frac{D}{2d}$$





# Mobilni robot sa automobilskim pogonom

## Direktna kinematika

- Kod Ackermanovog pogona mobilnog robota kotači rotiraju oko tačke koja prolazi kroz os osovine udaljene za  $R$  od centralne linije vozila, pri čemu vrijedi:

$$R + \frac{D}{2} = d \tan(\pi/2 + \alpha_1)$$

- Da bi kotači ostvarili kotrljanje, drugi kotač mora rotirati za ugao  $\alpha_2$ , gdje je:

$$R - \frac{D}{2} = d \tan(\pi/2 + \alpha_2)$$

# Mobilni robot sa automobilskim pogonom

## Direktna kinematika

- Općenito sva četiri kotača putuju po podlozi različitim brzinama, pri čemu specificiranje brzine jednog kotača specificira automatski i brzine ostalih.
- Sa stajališta vozača automobil ima dvije vrste upravljanja: upravljanje pedalom za gas i upravljanje okretanjem kotača.
- Referentna tačka, sa koordinatama  $(x, y)$ , je srednja tačka osovine kotača.
- Pretpostavimo da su razmaci između zadnjih osovina i prednjih osovina jednaki 1.
- Oznake brzine prednjih kotača i ugla između prednjih kotača i smjera kretanja  $\theta$  označeni su sa  $\omega$  i  $\alpha$ , respektivno.



# Mobilni robot sa automobilskim pogonom

## Direktna kinematika

- Preciznije iskazano, prednji kotači nisu u potpunosti paralelni ( $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ) te se zbog toga koristi srednja vrijednost njihovih uglova ( $(\alpha_1 + \alpha_2)/2$ ), u odnosu na smjer kretanja  $\theta$ , kao ugao zakreta.
- Osim toga, mehanička ograničenja nameću  $|\alpha| \leq \alpha_{\max}$  i kao posljedicu toga minimalan polumjer zakretanja.
- Kinematički model mobilnog robota može se, osim korištenja koncepta ICC tačke, izvesti primjenom kinematičkih ograničenja na kotače robota.
- Kod robota s automobilskim pogonom vektor konfiguracije je  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta \ \alpha]^T$ .



# Mobilni robot sa automobilskim pogonom

## Direktna kinematika

- Korištenjem Pfaffovih ograničenja [Murray, Li i Sastry, 1993] dobivaju se jednačbe:

$$\dot{x}(t) \sin(\theta(t) + \alpha(t)) - \dot{y}(t) \cos(\theta(t) + \alpha(t)) - d\dot{\theta}(t) \cos(\alpha(t)) = 0$$

$$\dot{x}(t) \sin(\theta(t)) - \dot{y}(t) \cos(\theta(t)) = 0$$

- Prva jednačba predstavlja **kinematičko ograničenje na kotrljanje kotača**, a druga **uvjet zabrane lateralnog kretanja kotača**.
- Ovdje se pretpostavlja da nema klizanja, te je moguće samo kotrljanje i rotacija kotača oko vertikalne osi kroz tačku dodira kotača s podlogom po kojoj se robot kreće (pri tome za svaki kotač postoji samo po jedna tačka dodira s podlogom).



# Mobilni robot sa automobilskim pogonom

## Direktna kinematika



- Kinematička ograničenja u Pfaffovom obliku su:

$$A^T(q) \cdot \dot{q} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta(t)) & -\cos(\theta(t)) & 0 & 0 \\ \sin(\theta(t) + \alpha(t)) & -\cos(\theta(t) + \alpha(t)) & -d & \cos(\alpha(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix} = 0$$

- Ako se ulazi ovog sistema označe sa  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$  tada:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha(t)) \cos(\theta(t)) \\ \cos(\alpha(t)) \sin(\theta(t)) \\ \frac{1}{d} \sin(\alpha(t)) \\ 0 \end{bmatrix} u_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2(t)$$

# Mobilni robot sa automobilskim pogonom

## Direktna kinematika

- Budući da se prednjim kotačima može mijenjati ugao zakreta to je razumno uzeti da je upravljački ulaz  $u_2(t) = \omega(t)$ .
- Izbor upravljačkog ulaza  $u_1(t)$  ovisi o pogonu kotača.
- Kako su u ovom slučaju prednji kotači pogonski to je prikladan izbor  $u_1(t) = v(t)$ , gdje  $v(t)$  predstavlja linijsku brzinu prednjih kotača.
- Na temelju ovog izbora upravljačkih ulaza slijedi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha(t)) \cos(\theta(t)) \\ \cos(\alpha(t)) \sin(\theta(t)) \\ \frac{1}{d} \sin(\alpha(t)) \\ 0 \end{bmatrix} v(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega(t)$$



# Mobilni robot sa automobilskim pogonom

## Inverzna kinematika

- Računanje inverzne kinematike automobilskog pogona je veoma složen proces, koji može shvatiti svaka osoba koja parkira automobil u naseljenom mjestu.
- Većina Ackermanovih vozila ima veoma velik minimalni radijus zakretanja u odnosu na ograničeno područje zakretanja kotača.
- Ovo ima za posljedicu složene manevre prilikom tro-tačkastog zakretanja i paralelnog parkiranja.
- Na kraju se može reći da su karakteristike automobilskog pogona **jednostavna izvedba, prilagođavanje vanjskim terenima i složeno planiranje putanje.**



## Mobilni robot sa automobilskim pogonom

- Kod automobilske pogona je poseban problem bočnog parkiranja, zbog toga što kotači imaju **ograničen ugao zakreta, nemogućnost rotacije u mjestu i postojanje velikog broja vozila u blizini.**





## 2.2.5. Mobilni robot sa svesmjernim pog.

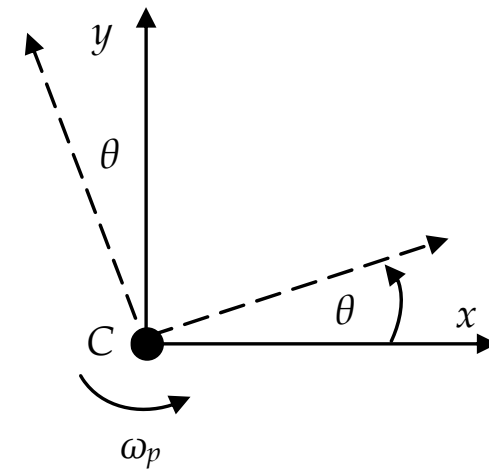
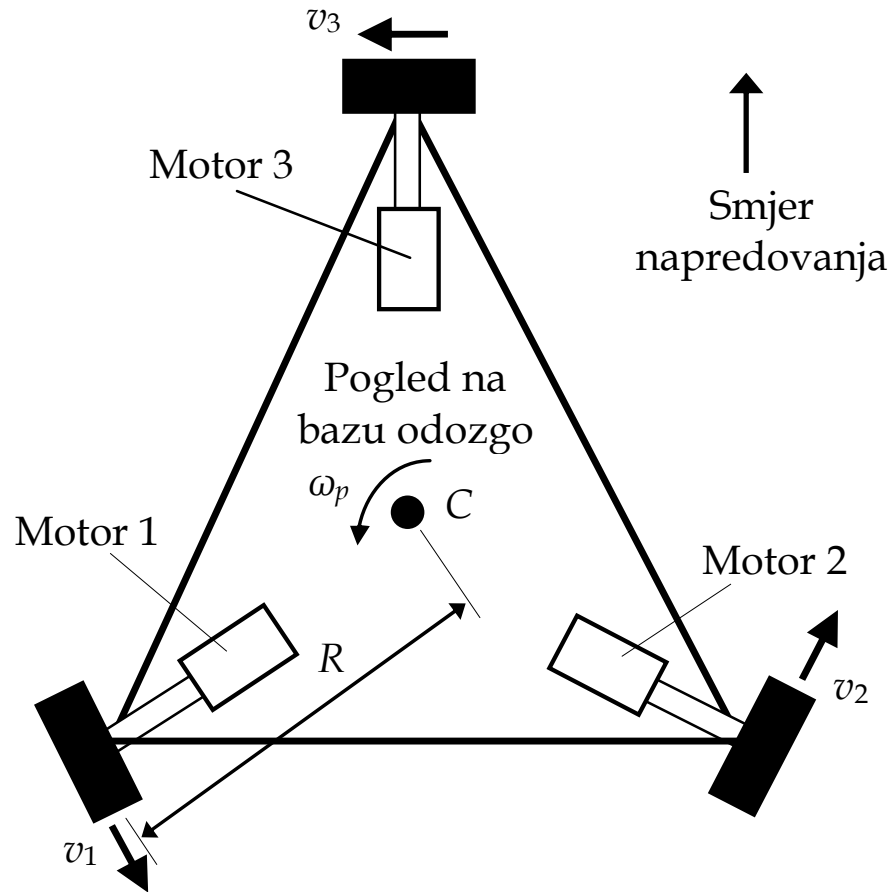
- Da bi se otklonila kinematička ograničenja koriste se “složeniji” kotači koji omogućuju okretanje u više od jednog smjera.
- Mobilni roboti sa takvim kotačima nazivaju se **svesmjerni roboti**.
- Svesmjerni mobilni roboti su jednostavniji za upravljanje od robota sa jednostavnim kotačima budući da je kretanje robota neovisno o konfiguraciji robota  $(x, y, \theta)$ .
- Svaki kotač ima vlastiti pogonski motor, to jest, brzine kotača se mijenjaju neovisno.
- Skup složenih kotača je gotovo beskonačan.



# Mobilni robot sa svesmjernim pogonom



- Podaci o poziciji i brzini mobilnog robota dobivaju se od enkodera.
- Razmatra se mobilni robot sa svesmjernim pogonom na slici.



C - težište robota (pivot os)

# Mobilni robot sa svesmjernim pogonom

- Za robota sa slike jednadžbe kretanja, koje povezuju brzine pojedinačnih motora sa komponentama brzina  $v_x$  i  $v_y$  u referentnom koordinatnom sistemu, glase [Holland, 1983]:

$$\begin{aligned}v_1 &= \omega_1 r = v_x + \omega_p R \\v_2 &= \omega_2 r = -\frac{1}{2}v_x + \frac{\sqrt{3}}{2}v_y + \omega_p R \\v_3 &= \omega_3 r = -\frac{1}{2}v_x - \frac{\sqrt{3}}{2}v_y + \omega_p R\end{aligned}$$

$v_i$  = tangencijalna brzina  $i$ -tog kotača,

$\omega_i$  = rotacijska brzina  $i$ -tog motora,

$\omega_p$  = brzina rotacije baze oko pivot osi,

$r$  = efektivni polumjer kotača,

$R$  = efektivna udaljenost kotača od pivot osi.



# Mobilni robot sa svesmjernim pogonom



- Iz gornjih jednađbi dobivaju se izrazi za brzine  $v_x$ ,  $v_y$  i  $\omega_p$ :

$$v_x = \frac{2v_1 - v_2 - v_3}{3}$$
$$v_y = \frac{v_2 - v_3}{1.734}$$
$$\omega_p = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3R}$$

- iz čega slijedi da se koordinate:

$$x(t) = \int v_x dt$$
$$y(t) = \int v_y dt$$
$$\theta(t) = \int \omega_p dt$$

mogu neovisno upravljati.

## Mobilni robot sa svesmjernim pogonom

- Svesmjerni pogon ima važnu primjenu kod robota za pomoć starim i hendikepiranim osobama, robota muzejskih vodiča, invalidskih kolica, igrača robotskog nogometa.
- Primjeri izvedbi kotača za mobilne robote sa svesmjernim pogonom:



61/63



# Mobilni robot sa svesmjernim pogonom

- Reprezentativan primjer mobilnog robota sa svjesmjernim pogonom je Nomad XR400.
- Ovaj robot ima četiri kotača za holonomsko kretanje.
- Svaki od ovih kotača se može pogoniti i za postizanje preciznog kretanja se zahtijeva precizna sinhronizacija i koordinacija između kotača.



Nomad XR4000 mobilni robot sa svjesmjernim pogonom



Muzejski vodić Sage

# Mobilni robot sa svesmjernim pogonom

- Primjer mobilnog robota sa svesmjernim pogonom za robotski nogomet (Soccer Robo) i holonomskog robota sa četiri kotača (Holbos – razvijen na ETF-u u Sarajevu).

