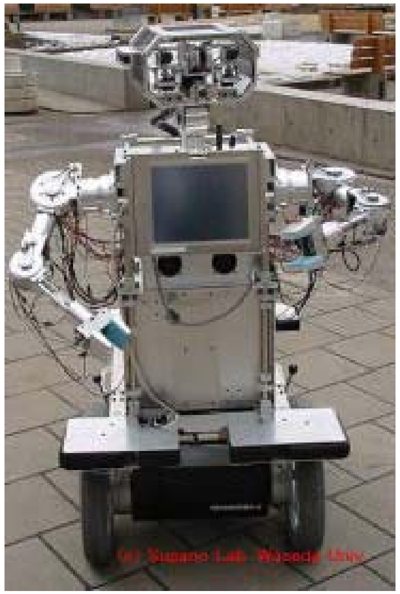
Lekcija 8: *Prikaz odometrijskih pogreški pomoću slučajnih varijabli i normalne distribucije*



Prof.dr.sc. Jasmin Velagić
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

Kolegij: Mobilna robotika

2012/2013

8.1. Uvod

- Pogreške je matematički najprirodnije predstaviti pomoću ***slučajnih*** varijabli.
- Svaka slučajna varijabla *x* predstavlja distribuciju (raspodjelu) vrijednosti.
- Budući da su pozicija i ugao zakreta robota kontinuirane varijable, one se opisuju **funkcijom gustoće vjerojatnosti**.
- Funkcija gustoće vjerojatnosti se predstavlja funkcijom $p(x)$ nad svim vrijednostima x-a, gdje je:

$$0 \leq p(x) \leq 1$$

$$\int p(x)dx = 1$$

Uvod

- ***Matematičko očekivanje*** ili očekivana vrijednost funkcije slučajne varijable $f(x)$ predstavlja njezinu otežanu vrijednost, gdje je otežavanje definirano sa:

$$E(f(\mathbf{x})) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx$$

- Dakle, očekivanje je funkcional, to jest za njegovo računanje je neophodno poznavati ukupnu funkciju gustoće vjerojatnosti.
- Očekivanje slučajne varijable $\boldsymbol{x}$ naziva se i njezinom ***sredinom***, ***srednjom vrijednošću***, ***prosjekom*** (engl. mean).

Uvod

- Očekivana ili srednja vrijednost slučajne varijable ***x*** izračunava se kao:

$$\boxed{\hat{x} = E(f(x))}$$

- Važno je napomenuti da očekivana vrijednost slučajne varijable ***x*** nije nužno i najvjerojatnija vrijednost koju će varijabla ***x*** poprimiti.
- Najvjerojatnija vrijednost slučajne varijable određena je tačkom maksimuma funkcije gustoće vjerojatnosti.
- Dakle, očekivana vrijednost nije "najbolje" ime za prosječnu, odnosno srednju, vrijednost, pa treba paziti da se to ne miješa.
- Kod Gaussove razdiobe su očekivana i srednja vrijednost jednake, što je i razlog zašto se ova dva pojma miješaju.

Uvod

- Razdioba vrijednosti oko prosječne vrijednosti naziva se ***varijanca*** i definirana je izrazom:

$$\boxed{\sigma^2 = E((\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})^2)}$$

- Iz navedenih definicija slijedi veoma važno svojstvo koje se odnosi na ***uzoračku srednju vrijednost*** $\overline{\boldsymbol{x}}$:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\overline{\boldsymbol{x}} = 0}$$

gdje je x_i obzervacija slučajne varijable ***x***.

Uvod

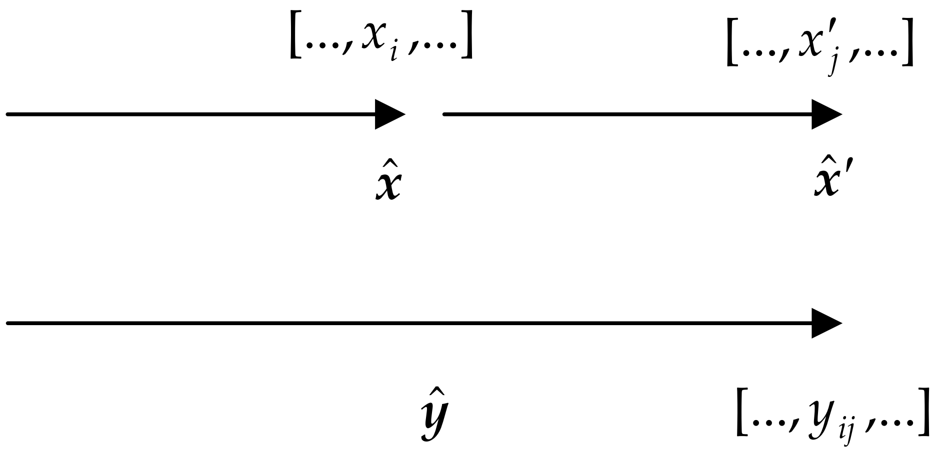
- Uzoračka srednja vrijednost i ***uzoračka varijanca*** računaju se na sljedeći način:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad , \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^{\,2}}{n-1}$$

- **Iz ovih izraza slijedi da je uzorkovani podatak bliži uzoračkoj srednjoj vrijednosti nego stvarnoj srednjoj vrijednosti.**
- Međutim, manja vrijednost nazivnika u navedenim izrazima će kompenzirati ovo odstupanje.
- Standardna devijacija je dobra mjera raspršenosti slučajne varijable ***x***.

Uvod

- **Primjer 8.1.** Neka se mobilni robot kreće pravolinijski 2 metra i neka ***x*** predstavlja kretanje unutar prvog metra i ***x’*** kretanje unutar drugog metra.
- Drugim riječima postoje dva segmenta, gdje je svaki segment dug jedan metar. Prema tome svaka od slučajnih varijabli ***x*** i ***x’*** imaju srednju vrijednost jednaku jedinici.



Uvod

- Ukupno kretanje mobilnog robota predstavljeno je slučajnom varijablom ***y***.
- Da bi se izračunala varijanca tada se slučajna varijabla ***y*** promatra kao suma slučajni varijabli ***x*** i ***x'*** ($y_{ij} = x_i + x'_j$).
- Slijedi da će varijanca od ***y*** postati:

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{y}) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left[(x_i + x'_j) - (\hat{x} + \hat{x}')\right]^2}{n^2} = \mathrm{var}(\hat{x}) + \mathrm{var}(\hat{x}')$$

- **Iz ovog izraza slijedi da je varijanca na kraju drugog metra kretanja mobilnog robota jednaka sumi varijanci svakog pojedinog segmenta duljine jedan metar.**

Uvod

- **Varijanca predstavlja srednju (prosječnu) vrijednost kvadrata pogreške, dok devijacija predstavlja drugi korijen varijance.**
- Ako se pretpostavi da su pogreške u području kretanja neovisne tada je devijacija nakon dva metra kretanja mobilnog robota za $\sqrt{2}$ puta veća od devijacije nakon jednog metra pređenog puta.
- Veoma je važno identificirati sistemske pogreške i izvršiti njihovu korekciju.
- U slučaju mobilnih robota sa diferencijalnim pogonom prilikom rotacije (posebno okretanja u mjestu) **mogu se pojaviti veliki iznosi sistemskih pogrešaka**, ovisno o podlozi po kojoj se robot kreće.

Uvod

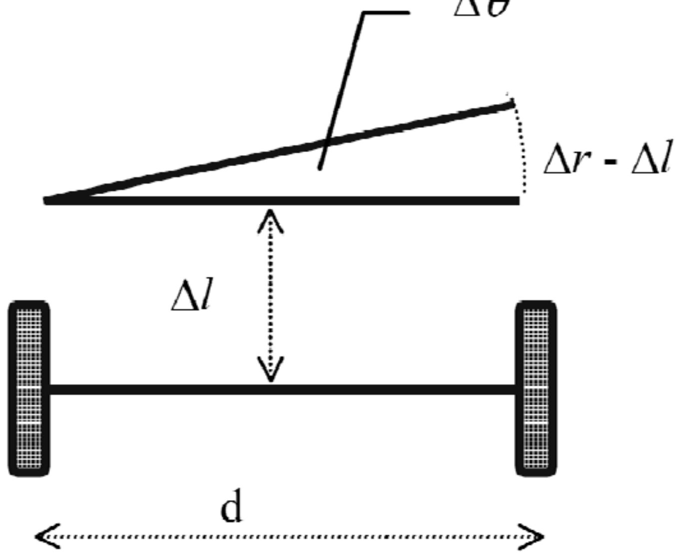
- **Ako je podloga poznata od ranije tada je moguće korigirati sistemske pogreške rotacijom mobilnog robota po toj podlozi unutar upravljačkih uvjeta.**
- Drugi nedostatak je što slučajne varijable ne moraju imati ograničenja na svoje varijance kada se one zbrajaju.
- Izvedeni izraz za varijancu vrijedi samo kada je $y_{ij} = x_i + x'_j$, pri čemu se to odnosi **samo na koordinate pozicije, ne i za uglove.**
- U slučaju uglova, postoji singularitet za 0° ($y_{ij} = (x_i + x'_j)\mathrm{mod}(360)$).

Uvod

- Kada se računaju ugaona odstupanja Δy_{ij} tada maksimalna razlika uglova iznosi 180°, pa je $\Delta y_{ij} = (x_i + x'_j)\mathrm{mod}(180)$.
- Za male razlike uglova Δy_{ij} je blizu nule i rezultat modulo operacije neće imati gotovo nikakav efekat.
- Međutim, **za velike iznose razlike uglova ukupna ugaona varijanca će biti manja od sume varijanci dviju komponenti.**

Uvod

- **Primjer 8.2.** Na slici je prikazan mobilni robot sa diferencijalnim pogonom.
- Razmak između kotača je označen sa *d*.
- Robot se kreće 20 ms, pri čemu desni kotač prelazi put duljine *Δr*, a lijevi kotač put duljine *Δl*.
- **Postavlja se pitanje koliki put je prešao robot i koliko dugo se zakretao?**



Uvod

- Ako je $\Delta r = \Delta l$ tada su oba kotača prešla isti put, što znači da se robot kretao pravolinijski stazom duljine Δr i da nije bilo zakretanja robota tokom kretanja.
- Ako su Δr i Δl različiti tada je tokom kretanja došlo do zakretanja jednog od kotača.
- Ako se pretpostavi da se robot kretao pravolinijski duljinom Δl i da je nakon toga lijevi kotač mirovao, a desni kotač se nastavio kretati ($\Delta l < \Delta r$, pri čemu su oba pozitivna, pogledati prethodnu sliku), odnosno zakretati, postavlja se pitanja koliko je to zakretanje trajalo?

Uvod

- Tokom ovog kretanja (nakon *Δl)* osovina kotača se zakretala oko centra lijevog kotača (promjer *d*) i promjena ugla zakreta *Δθ* je određena duljinom luka kojeg opisuje kretanje desnog kotača (*Δr* - *Δl*).
- Ova promjena ugla iznosi:

$$\boxed{\Delta\theta = \frac{\Delta r - \Delta l}{2\pi d} 2\pi = \frac{\Delta r - \Delta l}{d}} \qquad (*)$$

- Sljedeće pitanje koje se postavlja je **koliki put je prešao centar mase robota?**
- U prvom dijelu kretanja centar robota je prešao put duljine *Δl*.

Uvod

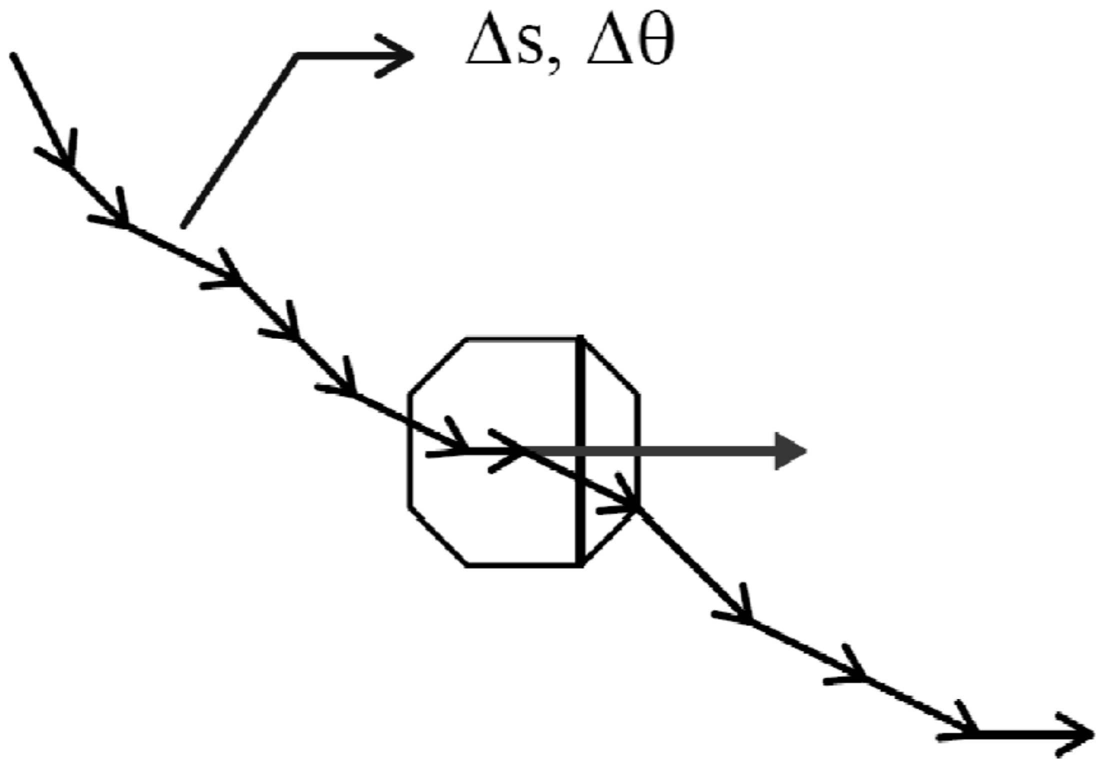
- U drugom dijelu, centar robota je prešao dvostruko kraći put od duljine luka kojeg je prešao desni kotač, odnosno 0.5(*Δr* - *Δl*).
- Kada se ovome doda duljina prvog dijela puta *Δl* dobiva se ukupni pređeni put centra mase robota:

$$\boxed{\Delta s = \Delta l + \frac{1}{2}(\Delta r - \Delta l) = \frac{\Delta r + \Delta l}{2}} \qquad (**)$$

- Izrazima (*) i (**) su opisana mala kretanja mobilnog robota (trajanje 20 ms).
- **Mala kretanja robota se mogu integrirati kako bi odredili globalnu poziciju robota.**

Uvod

- U vezi s tim promatra se sljedeća slika gdje je svaki segment putanje dobiven na osnovu mjerenja senzora.



Uvod

- U slučaju mobilnog robota Pioneer III DX mjerenja senzora se obavljaju svakih 10 ms, maksimalna brzina kretanja robota je 2 m/s i maksimalan put koji za to vrijeme može preći ovaj robot je 2 cm.
- U svakom trenutku lokacija robota je određena sa (x, y, θ) u globalnom koordinatnom sistemu.
- Ako se u sljedećem trenutku (između dva mjerenja) pređe segment duljine Δs pod uglom $\Delta\theta$, tada se dobiva nova lokacija robota (x', y', θ').

Uvod

- Nove koordinate je lahko izračunati ako se pretpostavi da je inkrementalni segment predstavljen linijom.
- U ovom slučaju se dobiva:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x + \Delta s \cos(\Delta\theta) \\ y' &= y + \Delta s \sin(\Delta\theta) \\ \theta' &= \theta + \Delta\theta \end{aligned}}$$

- Zbog svojstva aditivnosti varijanci, **sve pogreške će se predstavljati njihovim varijancama, to jest, srednjom kvadratnom pogreškom**.

Uvod

- Kod navedenog kretanja se najčešće javljaju sljedeće tri pogreške pozicije i orijentacije: $k_R \Delta s$ [mm^2/m], $k_\theta \Delta\theta$ [deg^2/deg] i $k_D \Delta s$ [deg^2/m] (deg označava stupanj (engl. degree)).
- Ako se robot kreće prema naprijed prelazeći udaljenost *s* pod uglom *θ*, tada su varijance jednake:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{var}(s) &= k_R s \\ \mathrm{var}(\theta) &= k_\theta \theta + k_D s \end{aligned}}$$

gdje *s* i *θ* poprimaju pozitivne vrijednosti.

8.2. Uzorkovanje slučajne varijable

- Za prikaz trenutne pogreške pozicije robota koriste se trodimenzionalne varijable za *x*, *y* i *θ*.
- Osnovno je pitanje **kako kretanje mobilnog robota djeluje na neizvjesnost njegove pozicije *X*?**
- Da bi se odgovorilo na ovo pitanje promatra se kretanje robota duž *x* osi duljine a.
- Osim toga, važno je identificirati kako razviti slučajnu varijablu ***X*** unutar ovog kretanja.

Uzorkovanje slučajne varijable

- Općenito se kretanje robota može predstaviti drugom slučajnom varijablom ***Y***, sa parametrom a koji izražava duljinu kretanja:

$$\boxed{Y(a) = f_{Y(a)}(y)}$$

- U slučaju kada nema neizvjesnosti robot prelazi stvarnu udaljenost a i kretanje predstavljeno slučajnom varijablom jednako je Diracovoj delta funkciji $\delta_a(y)$.
- Ova funkcija nije diferencijabilna, ali ima sljedeće karakteristike:

$$\begin{aligned} &\delta_a(x) = 0, x \neq a \\ &\int \delta_a(x)dx = 1 \\ &\int f(x)\delta_a(x)dx = f(a) \end{aligned}$$

Varijanca delta fukcije jednaka je nuli.

Uzorkovanje slučajne varijable

- U slučaju postojanja neizvjesnosti, odnosno normalne distribucije neizvjesnosti, promjena slučajne varijable ***Y*** je izražena normalnom distribucijom sa centrom a.
- **Varijanca normalne distribucije definira neizvjesnost kretanja.**
- Za zadanu inicijalnu estimaciju konfiguracije robota ***X*** i kretanje robota opisanog slučajnom varijablom ***Y*** potrebno je estimirati poziciju i orijentaciju robota nakon kretanja.
- **Rezultat kretanja je predstavljen sumom navedene dvije slučajne varijable:**

$$\boxed{Z = X + Y(a)} \qquad (***)$$

Uzorkovanje slučajne varijable

- **Budući da slučajne varijable imaju kontinuiranu distribuciju, ne pojedinačne vrijednosti, njihova suma je mnogo kompliciranija za računanje od standardne aritmetičke operacije zbrajanja.**
- Rezultat zbrajanja predstavlja također slučajnu varijablu ***Z***, za čije računanje se mora promatrati ***zajednička distribucija*** varijabli ***X***,***Y***:

$$\boxed{X,Y(a) \equiv f_{X,Y(a)}(x,y)}$$

Uzorkovanje slučajne varijable

- Slučajna varijabla ***Z*** se može odrediti kao projekcija zajedničke distribucije na pojedinačnu distribuciju, za koju je $x + y = z$:

$$f_Z(z) = \int\limits_{z=x+y} f_{X,Y(a)}(x, y)$$

- Integriranje preko skupa $z = x + y$ može se obaviti supstitucijom $x = z - y$ (ili $y = z - x$) tako da se dobiva:

$$f_Z(z) = \int f_{X,Y(a)}(z-y, y)dy = \int f_{X,Y(a)}(x, z-x)dx$$

Uzorkovanje slučajne varijable

- Može se pokazati da za bilo koju zajedničku distribuciju varijabli ***X***,***Y***, srednja vrijednost ***Z***-a predstavlja sumu srednjih vrijednosti slučajnih varijabli ***X*** i ***Y***:

$$\boxed{\mu_Z = \mu_X + \mu_Y}$$

gdje je $\mu_X \equiv E(X) = \int x f_X(x)dx$ i $\mu_Y \equiv E(Y) = \int y f_Y(y)dy$

- Ako su slučajne varijable ***X*** i ***Y*** neovisne (nekorelirane) tada zajednička distribucija poprima jednostavan oblik, to jest umnožak dvije krajnje distribucije.
- Pretpostavka neovisnosti slučajnih varijabli se naziva pretpostavka ***Markovljevog robotskog kretanja***.

Uzorkovanje slučajne varijable

- Ona ima isti oblik kao i probabilistički Markovljev lanac:

$$f_{X,Y(a)}(x,y) = f_X(x) f_{Y(a)}(y)$$

$$f_Z(z) = \int f_X(z-y) f_{Y(a)}(y)dy = \int f_X(x) f_{Y(a)}(z-x)dx$$

- Zbog neovisnosti slučajnih varijabli, varijanca od ***Z*** jednaka je sumi varijanci ***X*** i ***Y***:

$$\mathrm{var}(Z) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$$

Uzorkovanje slučajne varijable

- Varijanca se može izračunati preko srednje kvadratne pogreške kao:

$$\sigma_x^2 \equiv \mathrm{var}(\boldsymbol{X}) \equiv E((\boldsymbol{X}-\mu)^2) = \int (x-\mu)^2 f_X(x)dx$$

$$\sigma_y^2 \equiv \mathrm{var}(\boldsymbol{Y}) \equiv E((\boldsymbol{Y}-\mu)^2) = \int (y-\mu)^2 f_Y(y)dy$$

$$\sigma_z^2 \equiv \mathrm{var}(\mathbf{Z}) \equiv E((\mathbf{Z}-\mu)^2) = \int (z-\mu)^2 f_Z(z)dz$$

- Ako su ulazne varijable korelirane, tada varijanca izlaza poprima veliku vrijednost. **Kod sistemske pogreške devijacija** (drugi korijen varijance) **ima tendenciju povećavanja** (zbrajanje sa prethodnom vrijednošću).

Uzorkovanje slučajne varijable

- Na primjer, ako je robot pogrešno kalibriran tada će izlazi robota dobiveni na temelju mjerenja enkodera biti uvijek veći od stvarnih udaljenosti. Ako pogreška nakon jednog pređenog metra iznosi 10 cm slijedi da će nakon dva metra iznositi 20 cm.
- **Zbog toga se treba zahtijevati da varijanca izlaza (slučajna varijabla *Z*) poprima što je moguće manje vrijednosti.**
- Inicijalna konfiguracija robota ***X*** predstavlja uniformno uzorkovan skup koji sadrži sljedeće elemente:

$$\boxed{\langle (x_i, y_i, \theta_i), p_i \rangle}$$

Uzorkovanje slučajne varijable

- **Postavlja se pitanje koliko je *Y*?**
- Za mala kretanja mobilnog robota on je parametriziran udaljenošću koju robot prelazi i uglom za koji se zakreće robot, to jest $\boldsymbol{Y}(\Delta s, \Delta\theta)$.
- Ova dva parametra utječu na tri elementa slučajne varijable ***Y***, to jest $\langle \Delta x, \Delta y, \Delta\theta \rangle$.
- Da bi se izabrao element slučajne varijable ***Y***, prvo se izabiru elementi slučajnih varijabli $\boldsymbol{\Delta s}$ i $\boldsymbol{\Delta\theta}$.
- Poznato je da one imaju normalne distribucije simetrične oko srednjih uzoraka (vrijednosti) Δs i $\Delta\theta$, čije varijance su dane sa:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{var}(\boldsymbol{\Delta s}) &= k_R \Delta s \\ \mathrm{var}(\boldsymbol{\Delta\theta}) &= k_\theta \left|\Delta\theta\right| + k_D \Delta s \end{aligned}}$$

Uzorkovanje slučajne varijable

- Elementi (uzorci) slučajne varijable ***Y*** se računaju na sljedeći način:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta x_j &= \Delta s_j \cos(\theta_i) \\ \Delta y_j &= \Delta s_j \sin(\theta_i) \\ \Delta \theta_j &= \Delta \theta_j \end{aligned}}$$

  gdje θ_i određuje smjer kretanja robota.

- Na temelju prethodnih izraza slijedi da su elementi slučajne varijable ***Z***:

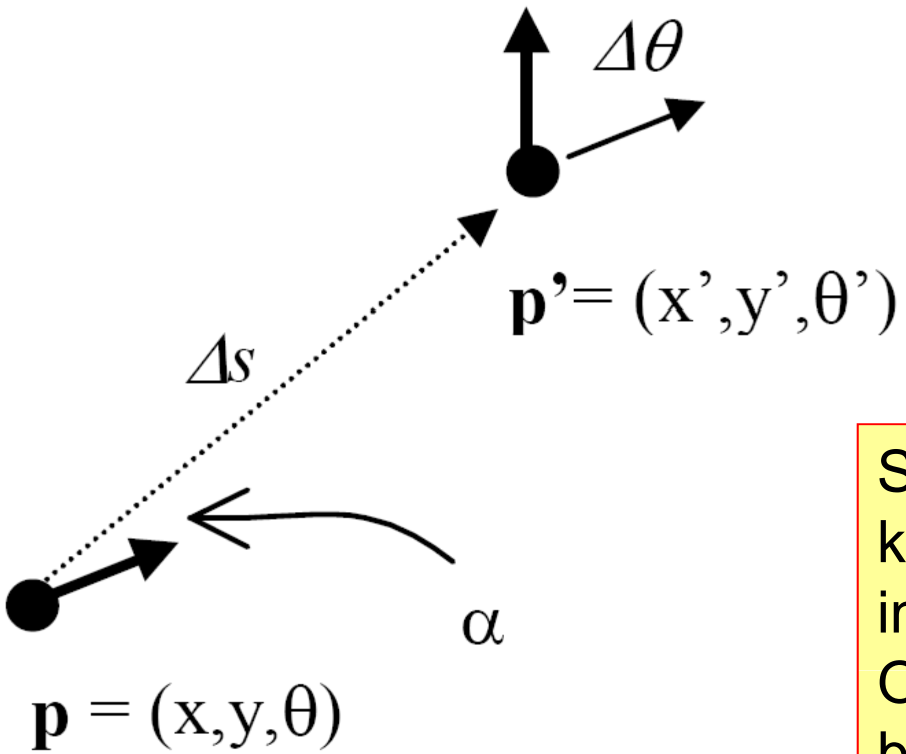
$$\boxed{\begin{aligned} x_i + \Delta x_j &= x_i + \Delta s_j \cos(\theta_i) \\ y_i + \Delta y_j &= y_i + \Delta s_j \sin(\theta_i) \\ \theta_i + \Delta \theta_j &= \theta_i + \Delta \theta_j \end{aligned}}$$

Uzorkovanje slučajne varijable

- Ova jednadžba vrijedi samo za mala kretanja robota.
- Često se zahtijeva kretanje mobilnog robota preko skupa robotskih pozicija koje se samo povremeno posjećuju, nakon što robot pređe značajnu udaljenost.
- U ovom slučaju pravac kretanja nije neophodno da bude isti kao originalni pravac, niti da ga mobilni robot pronađe mijenjanjem svoga ugla zakreta.
- Sljedeća slika prikazuje relevantnu geometriju za prošireno kretanje.
- Ugao α predstavlja razliku između originalnog i stvarnog smjera kretanja robota.

Uzorkovanje slučajne varijable

- Ovaj ugao mora biti izražen u obliku lokalne promjene smjera, odnosno pravca kretanja, dok će se uzorci osvježavati sa različitim zakretima (promjena orijentacije) robota.



Smjer u kome se robot kreće se razlikuje od inicijalnog smjera za ugao α. Ovaj ugao ne mora nužno biti jednak $\Delta\theta$.

Uzorkovanje slučajne varijable

- Kod proširenog kretanja potrebno je prikazati α kao slučajnu varijablu, pri čemu se ugao α može računati na temelju konfiguracija robota ***p*** i ***p'***.
- Ugao između ove dvije konfiguracije minus ugao originalnog smjera θ daje ugao α.
- Računanje izlazne slučajne varijable ***Z*** se obavlja na način opisan ranije, izuzev finalnog, odnosno, završnog koraka. Osvježavanje (prepodešavanje) uzorkovanih vrijednosti varijable ***Z*** su:

$$x_i + \Delta x_j = x_i + \Delta s_j \cos(\theta_i + \alpha)$$
$$y_i + \Delta y_j = y_i + \Delta s_j \sin(\theta_i + \alpha)$$
$$\theta_i + \Delta \theta_j = \theta_i + \Delta \theta_j$$

Uzorkovanje slučajne varijable

- Važno je napomenuti da su udaljenost i promjena ugla (za varijancu) aproksimativne.
- Navedena metoda uzorkovanja zasniva se na pojedinačnoj distribuciji.
- Međutim, u slučaju dužeg kretanja pogreška odometrije se povećava pa je potrebno, umjesto pojedinačne distribucije, koristiti ***kumulativnu distribuciju***.
- Za slučajnu varijablu $\boldsymbol{X}$ čija je funkcija gustoće $f_{\boldsymbol{X}}(x)$ kumulativna distribucija je definirana kao $P(\boldsymbol{X} \leq y)$, odnosno kao vjerojatnost da je slučajna varijabla manja od vrijednosti x.

Uzorkovanje slučajne varijable

- Ovo se iskazuje na sljedeći način:

$$P(\mathbf{X} \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(x)dx$$

- **Kumulativna distribucija se može koristiti za definiranje strategije izdvajanja uzoraka zasnovana na uniformnom uzorkovanju.** Pretpostavimo da se želi izdvojiti veliki broj uzoraka (*N*) iz slučajne varijable ***X***.
- U kumulativnoj distribuciji aN uzoraka treba biti manji ili jednak x_a, gdje:

$$P(\mathbf{X} \leq x_a) = a$$

Uzorkovanje slučajne varijable

- **Postavlja se pitanje kako izdvojiti skup od *N* uzoraka?** Pretpostavimo da se započinje sa uniformnom distribucijom u intervalu [0, 1].
- Neka se izdvojena vrijednost označi sa a.
- Potrebno je pronaći x_a koji zadovoljava jednadžbu (***) i koristiti njenu vrijednost kao element skupa *N*.
- Za ***standardnu normalnu distribuciju*** $N_{0,1}$, kumulativna distribucija se može pronaći korištenjem funkcije pogreške. Za bilo koju vrijednost *x*, kumulativna distribucija je:

$$\boxed{P_{N_{0,1}}(x) = \frac{erf(x/\sqrt{2})+1}{2}}$$

Uzorkovanje slučajne varijable

- Da bi se pronašla vrijednost x_a koja zadovoljava:

$$\boxed{a = P_{N_{0,1}}(x_a)}$$

  potrebno je načiniti ***inverziju*** kumulativne distribucije.
- Postoje brojni načini njenog računanja, pri čemu je najviše korišteni **Gauss-Newtonova iteracija**.
- Za ovu svrhu se koristi tablični prikaz vrijednosti kumulativne funkcije *P* na temelju kojih se mogu izdvajati uzorci iz diskretno uzorkovanih distribucija.

Uzorkovanje slučajne varijable

- U svakom elementu tabele potrebno je prvo izračunati vrijednosti funkcije *P*, pri čemu se u nju uvrštavaju uzorci koji imaju veliku vrijednost funkcije gustoće vjerojatnosti.
- Tabela tipično sadrži oko 100 elemenata (uzoraka).
- Za zadanu vrijednost a, koja se kreće između 0 i 1, pretražuje se tabela korištenjem postupka binarne rekurzivne pretrage.
- Prvo se uzima element iz sredine tabele i uspoređuje sa a.

Uzorkovanje slučajne varijable

- Ako je on veći od a tada se proces pretrage nastavlja nad elementima u donjoj polovici tabele, a ako je manji od a pretražuje se gornja polovica tabele.
- Da bi se okončao proces neophodno je pronaći dva uzastopna elementa koja okružuju a, označena indeksima i i $i+1$.
- Aproksimativna vrijednost inverzne funkcije može se izračunati interpolacijom između ova dva elementa, na temelju njihove usporedbe sa a.

Uzorkovanje slučajne varijable

- Primjenom inverzne kumulativne funkcije nad pojedinačnom vrijednosti a dobit će se vrijednost z za standardnu normalnu distribuciju.
- Da bi se ovo konvertiralo u proizvoljnu normalnu distribuciju, koriste se sljedeći izrazi:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

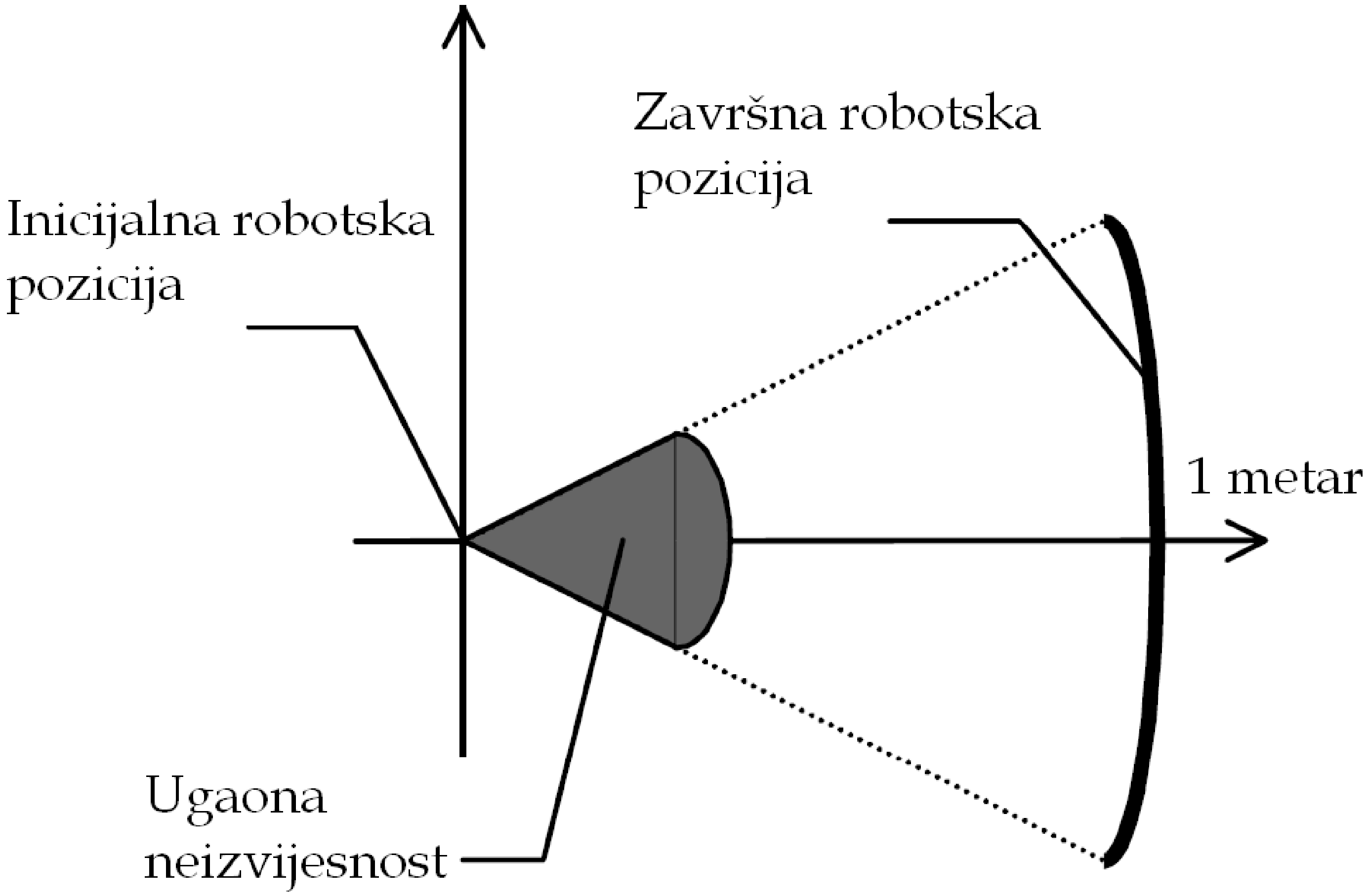
$$x = \sigma z + \mu$$

8.3. Prikaz pogreške normalnom distribucijom

- U prethodnom potpoglavlju je opisano kako se mjere i prikazuju pogreške u odnosu na željeno kretanje robota i kako se u toku kretanja ove pogreške akumuliraju i čine poziciju robota veoma nesigurnom u odnosu na inicijalni, referentni koordinatni sistem.
- Ove nesigurnosti, odnosno neizvjesnosti, proizlaze iz:
  - **dodavanja novih pogreški pozicije,**
  - **evolucija ranijih (prethodnih) pogreški tokom kretanja.**

Prikaz pogreške normalnom distribucijom

- Da bi se vidjelo kako je važan utjecaj drugog mehanizma, razmatra se robot postavljen u ishodište čija je orijentacija neizvjesna.



Prikaz pogreške normalnom distribucijom

- Pretpostavka je da se robot kreće prema naprijed jedan metar bez pogreške u ugaonom intervalu, odnosno da mu je orijentacija ista na početku kretanja i nakon pređenog jednog metra.
- Ako se pretpostavi da u toku kretanja nema nikakvog šuma, pozicija robota nakon jednog metra će biti neizvjesnija nego što je bila u inicijalnoj konfiguraciji, zato što je nepoznat smjer (pravac) kojim se kretao mobilni robot.
- Robot se može zaustaviti u bilo kojoj poziciji duž luka prikazanog na slici.

Prikaz pogreške normalnom distribucijom

- Sa prethodne slike je uočljiva važnost ugaone neizvjesnosti.
- U slučaju da je orijentacija robota nepoznata tokom kretanja tada se neće znati gdje je robot završio kretanje.
- Pogreška pozicije je veoma osjetljiva na ugaonu neizvjesnost, čak i male pogreške orijentacije mogu generirati velike pogreške pozicije kada se robot kreće dovoljno dugo.
- **Tačna navigacija mobilnog robota u globalnom koordinatnom sistemu podrazumijeva određivanje njegove orijentacije i kontinuiranu korekciju bilo koje ugaone neizvjesnosti.**

Prikaz pogreške normalnom distribucijom

- **Neizvjesnost lokacije mobilnog robota u *xy* ravnini je također važna, pri čemu ona ne uzrokuje velike iznose pozicijskih pogreški, za razliku od ugaone neizvjesnosti.**
- Ako se pretpostavi da je ugao zakreta robota poznat sa velikom preciznošću, uz postojanje neizvjesnosti inicijalne lokacije, tada kretanje od jednog metra ne mijenja neizvjesnost lokacije, iako se mijenja prosječna pozicija.
- Kod kretanja mobilnog robota u ravnini postoje tri varijable od interesa: pozicija robota (x, y) i njegova orijentacija u ravnini θ. Ove tri varijable predstavljaju ***konfiguraciju*** robota.
- Ako su ove varijable neovisne, tada se njihove neizvjesnosti mogu prikazati varijancama var(x), var(y) i var(θ).

8.3.1. Računanje kovarijantne matrice

- Konfiguracija mobilnog robota se izražava vektorom položaja:

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

gdje je ***p*** trokomponentni vektor slučajne varijable.

- Važno je napomenuti da ovaj vektor ne definira Euklidski prostor, budući da treća komponenta predstavlja ugao.
- Prve dvije komponente definiraju Euklidski potprostor robotskih pozicija, pa će se koristiti oznaka ***q*** za ovaj potprostor.

Računanje kovarijantne matrice

- Kovarijantna matrica za vektor slučajne varijable ***p*** je definiran umnoškom diferencija:

$$\operatorname{cov}ar(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \Delta \boldsymbol{p}_i \Delta \boldsymbol{p}_i^T = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} \Delta x_i \Delta x_i & \sum_{i=0}^{n} \Delta x_i \Delta y_i & \sum_{i=0}^{n} \Delta x_i \Delta \theta_i \\ \sum_{i=0}^{n} \Delta y_i \Delta x_i & \sum_{i=0}^{n} \Delta y_i \Delta y_i & \sum_{i=0}^{n} \Delta y_i \Delta \theta_i \\ \sum_{i=0}^{n} \Delta \theta_i \Delta x_i & \sum_{i=0}^{n} \Delta \theta_i \Delta y_i & \sum_{i=0}^{n} \Delta \theta_i \Delta \theta_i \end{bmatrix}$$

- Dijagonalni elementi kovarijantne matrice su varijance elemenata vektora ***p***.
- Zbog komutativnog svojstva množenja, matrica je simetrična oko glavne dijagonale.

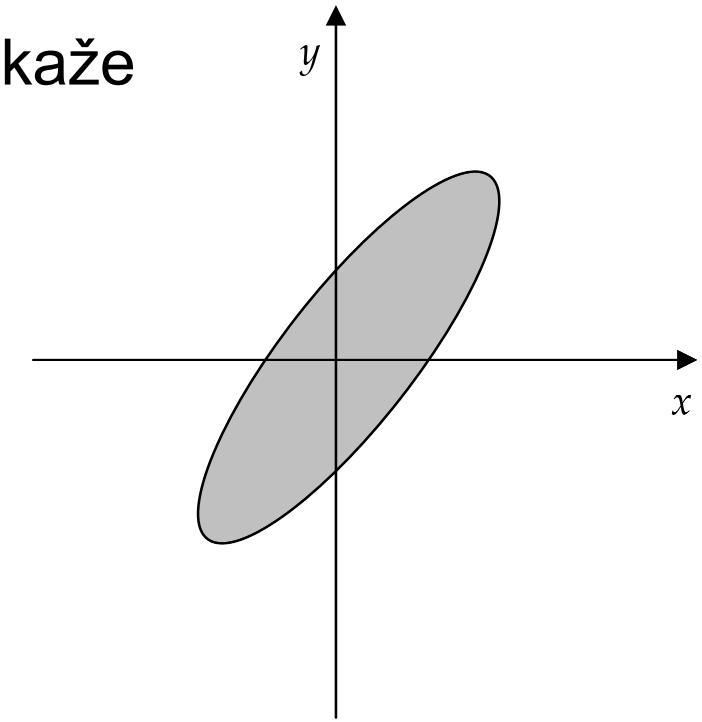
Računanje kovarijantne matrice

- Ako se promatra *xy* potprostor (ravnina) i pretpostavi da je vandijagonalni element (1, 2) pozitivan, to jest:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \Delta x_i \Delta y_i > 0}$$

tada se za slučajne varijable ***x*** i ***y*** kaže da su ***pozitivno korelirane***.

- Grafički prikaz *x* i *y* vrijednosti za ovaj slučaj je prikazan na slici.



Računanje kovarijantne matrice

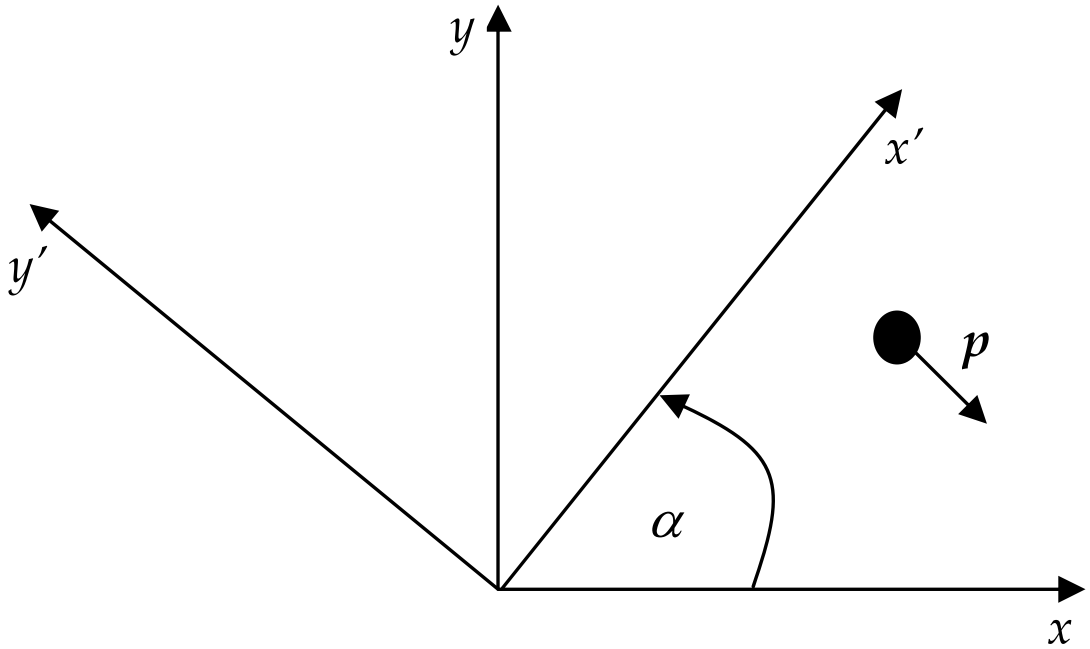
- Ako su vandijagonalni elementi negativni, tada će elipsa pogreške biti nakošena u drugom smjeru, odnosno zakrenuta za ugao od 45° u odnosu na *y* os gledano u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu.
- Ako su vandijagonalni elementi jednaki nuli, tada se osi elipse poklapaju sa koordinatnim osima i njihove amplitude su dane sa varijancama slučajnih varijabli *x* i *y*.

8.3.2. Rotacija kovarijance

- Često je poželjno odabrati različite koordinatne sisteme za varijance.
- Naprimjer, kada se robot kreće tada će varijanca pogreške pozicije biti zadana u lokalnom koordinatnom sistemu robota, to jest koordinatnom sistemu poravnatim sa orijentacijom robota.
- Da bi se ova varijanca pribrojila originalnoj varijanci pozicije, koja je dana u globalnim koordinatama, potrebno ju je transformirati u globalni koordinatni sistem.
- **Budući da su varijance definirane kao diferencije, translacija ne može biti korištena, već samo rotacija.**

Rotacija kovarijance

- **Postavlja se pitanje kako vektore i kovarijantne matrice transformirati u rotacijski koordinatni sistem?**
- U vezi s tim promatra se dijagram na slici koji pokazuje konfiguraciju *p*, originalno definiranu u (*x*,*y*) koordinatnom sistemu, i njenu poziciju u rotacijskom koordinatnom sistemu (*x'*,*y'*).



Rotacija kovarijance

- Elementi vektora položaja robota ***p*** u navedenim koordinatnim sistemima su:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ \theta' &= \theta - \alpha \end{aligned}$$

- Rotacija koordinatnog sistema (*x*,*y*) za ugao α je definirana matricom rotacije:

$$\boldsymbol{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija kovarijance

- Vektor položaja robota ***p'*** u koordinatnom sistemu (*x'*,*y'*) izražen preko vektora položaja ***p*** i matrice rotacije ***R*** glasi:

$$p' = R(\alpha)p + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

- Ova jednadžba govori kako se pojedinačna konfiguracija robota transformira korištenjem rotacije koordinatnog sistema.
- Za transformaciju slučajne konfiguracije ***p***, potrebno je transformirati njenu **srednju vrijednost** (predstavljenu tačkom) i njenu **kovarijancu**.

Rotacija kovarijance

- Podsjetimo se da se svaki od elemenata, koji doprinosi formiranju kovarijance, može dobiti iz vanjskog produkta dva vektora $\Delta \boldsymbol{p}_i$ i $\Delta \boldsymbol{p}_i^T$.
- Ovi se vektori transformiraju na sljedeći način:

$$\Delta \boldsymbol{p}_i' = \boldsymbol{R}(\alpha)\Delta \boldsymbol{p}_i$$

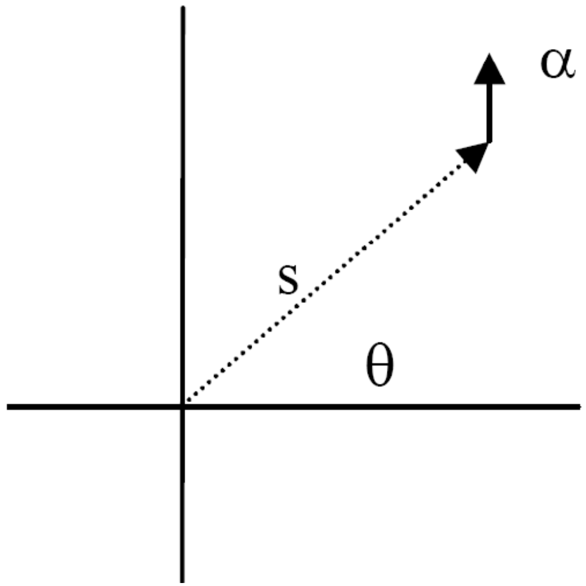
$$\Delta \boldsymbol{p}_i'^T = [\boldsymbol{R}(\alpha)\Delta \boldsymbol{p}_i]^T = \Delta \boldsymbol{p}_i^T \boldsymbol{R}(\alpha)^T = \Delta \boldsymbol{p}_i^T \boldsymbol{R}(-\alpha)$$

- Kovarijantna matrica se dobiva na temelju ovog izraza i glasi:

$$\begin{aligned}\mathrm{covar}(\boldsymbol{p}') &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \Delta \boldsymbol{p}_i' \Delta \boldsymbol{p}_i'^T = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{R}(\alpha)\Delta \boldsymbol{p}_i \Delta \boldsymbol{p}_i^T \boldsymbol{R}(-\alpha) \\ &= \boldsymbol{R}(\alpha)\mathrm{covar}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{R}(-\alpha)\end{aligned}$$

Rotacija kovarijance

- Jednostavna primjena transformacije rotacije je računanje kovarijantne matrice za robota koji starta iz ishodišta koordinatnog sistema pod uglom θ (slika ispod).
- Robot se kreće pravolinijski i prelazi malu udaljenost *s*, nakon čega se zakreće za ugao α u smjeru obrnutom smjeru kretanja kazaljke na satu.



Rotacija kovarijance

- Pretpostavljeno je kratko kretanje zbog pogreške drifta koja se akumulira tokom duljeg kretanja i koja bi prouzročila značajno odstupanje dostignute krajnje pozicije i orijentacije robota od zadanih.
- **Kovarijantna matrica mobilnog robota u vlastitom koordinatnom sistemu (koordinatni sistem pridružen robotu) na početku kretanja je dana sa pogreškama područja, zakreta i drifta:**

$$\mathrm{covar}(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} k_R s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_\theta \theta + k_D s \end{bmatrix}$$

Rotacija kovarijance

- Globalni koordinatni sistem se rotira za ugao $-\theta$ u odnosu na pravac kretanja robota.
- Neka se sa ***p'*** označi konfiguracija robota u globalnom koordinatnom sistemu.
- Korištenjem jednadžbe za računanje kovarijance dobiva se:

$$\begin{aligned}
\mathrm{covar}(\boldsymbol{p}') &= \boldsymbol{R}(-\theta)\begin{bmatrix} k_R s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_\theta \theta + k_D s \end{bmatrix}\boldsymbol{R}(\theta) \\
&= \begin{bmatrix} k_R s \cos^2\theta & k_R s \sin\theta\cos\theta & 0 \\ k_R s \sin\theta\cos\theta & k_R s \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & k_\theta\theta + k_D s \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Rotacija kovarijance

- Važno je naglasiti da se **ugaona pogreška ne mijenja u toku rotacije.**
- Međutim, rotacija ne miješa pogreške po *x* i *y* koordinatama, što rezultira iskošenjem duž globalnih osi.
- Ako je inicijalna robotska orijentacija duž globalnih koordinatnih osi, tada su vandijagonalni elementi matrice jednaki nuli i ona više nije kososimetrična.

8.4. Propagacija pogreške tokom kretanja

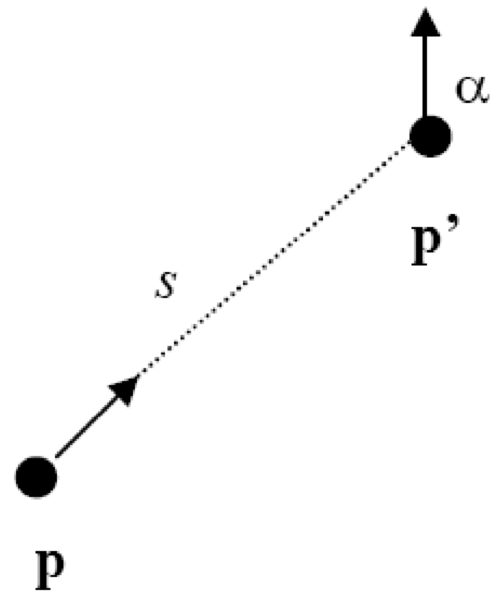
- Sa slike na slajdu 42. je uočljivo da neizvjesnost (nesigurnost) u poziciji može rasti čak i kada je kretanje mobilnog robota tačno.
- U ovom potpoglavlju se formuliraju jednadžbe evolucije kovarijantne matrice unutar stvarnog kretanja mobilnog robota.
- Kao i u prethodnom potpoglavlju pretpostavlja se da robot prelazi malu udaljenost *s* duž prave linije, a nakon pređene udaljenosti *s* se zakreće za ugao α.
- Međutim, u slučaju kada mobilni robot započinje kretanje sa neizvjesnom konfiguracijom ***p*** i ostvari egzaktno kretanje, tada nema pogreški područja, zakreta i drifta (slika ispod).

Propagacija pogreške tokom kretanja

Stvarno (kratko) kretanje mobilnog robota iz neizvjesne pozicije

- Sljedeće tvrdnje vrijede tokom stvarnog kretanja mobilnog robota:

1. Ako konfiguracija ***p*** nema ugaonu pogrešku tada varijanca ostaje ista kao i kod ***p'***, samo se mijenja prosječna vrijednost.
2. Ako postoji ugaona pogreška tada pogreške po x i y koordinatama rastu.
3. U svim slučajevima će ugaona varijanca $\Delta\theta^2$ ostati nepromijenjena tokom stvarnog kretanja mobilnog robota.



Propagacija pogreške tokom kretanja

- U skladu sa prethodnom slikom može se izvesti sljedeći izraz za p_i':

$$\boxed{\boldsymbol{p}_i' = f(\boldsymbol{p}_i, s, \alpha)}$$

gdje je:

$$\boxed{\begin{aligned} x_i' &= f_x(p_i, s, \alpha) = x_i + s\cos\theta_i \\ y_i' &= f_y(p_i, s, \alpha) = y_i + s\sin\theta_i \\ \theta_i' &= f_\theta(p_i, s, \alpha) = \theta_i + \alpha \end{aligned}}$$

- Budući da su ove jednadžbe nelinearne po varijabli θ_i, njih je teško koristiti u izvođenju izraza za osvježavanje kovarijantne matrice covar(***p'***).

Propagacija pogreške tokom kretanja

- Umjesto toga, mogu se koristiti prva dva elementa Taylorovog reda kako bi se dobio aproksimativno linearni oblik:

$$\boxed{p'_i \approx f(\hat{p}, s, \alpha) + F(\hat{p})(p_i - \hat{p})}$$

  gdje je ***F*** derivacija ***f***-a.

- Budući da su $\boldsymbol{p}_i$ vektori i ***f*** vektorska funkcija, slijedi da derivacija od ***f*** predstavlja matricu ***Jacobijana*****.**
- Prije računanja matrice Jacobijana treba uzeti u obzir da iz razvoja u Taylorov red vrijedi:

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{p}' \approx f(\hat{p}) \\ &\Delta p'_i \approx F(\hat{p})\Delta p_i \end{aligned}}$$

Propagacija pogreške tokom kretanja

- Ovdje se umjesto matrice rotacije koristi matrica Jacobijana za računanje kovarijance:

$$\mathrm{covar}(\boldsymbol{p}') = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta \boldsymbol{p}'_i \Delta \boldsymbol{p}'^T_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{p}}) \Delta \boldsymbol{p}_i \Delta \boldsymbol{p}_i^T \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{p}})^T$$
$$= \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{p}})\mathrm{covar}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{p}})^T$$

- Matrica Jacobijana se računa na sljedeći način:

$$\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{p}}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}}\Big|_{\hat{p}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_\theta}{\partial x} & \frac{\partial f_\theta}{\partial y} & \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{\hat{p}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\sin\theta \\ 0 & 1 & s\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propagacija pogreške tokom kretanja

- Korištenjem transformacije kovarijance i matrice Jacobijana moguće je računati osvježavanje kovarijance od ***p'***.
- Jednostavan način za ovo je da se kovarijantna matrica covar(***p'***) napiše simbolički kao $\Delta \boldsymbol{p}' \Delta \boldsymbol{p}'^T$, na temelju čega se dobiva:

$$\Delta \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{p}}) \Delta \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \Delta x - s\Delta\theta \sin\theta \\ \Delta y + s\Delta\theta \cos\theta \\ \Delta\theta \end{bmatrix}$$

- Korištenjem vanjskog produkta moguće je izračunati bilo koji element matrice kovarijance. Na primjer, gornji lijevi element je:

$$\Delta x' \Delta x' = \Delta x \Delta x - 2s\Delta\theta\Delta x \sin\theta + s^2 \Delta\theta\Delta\theta \sin^2\theta \qquad (****)$$

Propagacija pogreške tokom kretanja

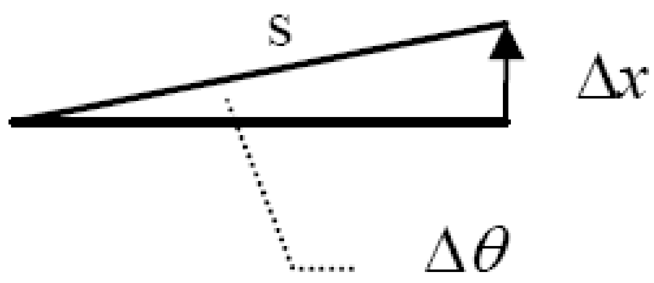
- **Utjecaj ugaone neizvjesnosti na neizvjesnost pozicije nije jasno vidljiv.**
- Ako je $\Delta\theta$ jednak nuli, tada ne postoji promjena u neizvjesnosti x koordinate i njenog djelovanja na stvarno kretanje mobilnog robota.
- Važno je imati na umu mjerne jedinice koje se koriste u transformaciji.
- Preporučeno je koristiti milimetre (mm) za pozicije i stupnjeve (°) za uglove, odnosno za kovarijance njihovi kvadrati, to jest mm^2 i $(°)^2$.
- Međutim, treba voditi računa kada se miješaju razlike uglova i razlike pozicija.

Propagacija pogreške tokom kretanja

- Drugi dio izraza na desnoj strani jednadžbe (****) ima mjernu jedinicu $(°)\cdot$ mm, a treći dio izraza desne strane ima jedinicu $(°)^{2}\cdot mm^{2}$.
- Jasno je da konačni rezultat mora biti izražen u mm^2.
- Šta je potrebno uraditi da se to dobije?
- Odgovor na ovo pitanje je da izraz $s\Delta\theta$ treba biti izražen u milimetrima (mm).
- Da bi se ilustriralo kako se ovo postiže promatra se mali trokut prikazan na sljedećoj slici.

Propagacija pogreške tokom kretanja

- Inkrementalna promjena pozicije:



- Udaljenost Δx se računa kao $s \cdot \sin(\Delta\theta)$. Za male uglove ovo približno iznosi $s\Delta\theta$, pri čemu je $\Delta\theta$ izražen u radijanima.
- **U izrazima za osvježavanje kovarijanci treba biti pažljiv u pretvorbi ugaonih varijanci u radijane.**

Propagacija pogreške tokom kretanja

- Pogreške bi se trebale uvijek povećavati kako se robot kreće, bez obzira na postojanje dodatnih informacija sa senzora koje pomažu njihovom korigiranju.
- Međutim, postoje slučajevi u kojima se pogreške reduciraju korištenjem integriranja pozicije.
- U vezi s tim promatra se robot koji započinje kretanje sa nultom kovarijancom pozicije, ali sa velikom ugaonom kovarijancom.
- Robot se kreće pravolinijski 1 metar.
- Njegova varijanca pozicije sada ima veliku vrijednost u smjeru okomitom na pravac kretanja.
- Nakon pređenog jednog metra robot se zakreće za 180° i kreće se natrag 1 metar.
- Ako se robot nakon toga vrati u početnu poziciju tada će njegova kovarijanca pozicije biti ponovo nula.

Propagacija pogreške tokom kretanja

- Ukupna pogreška tokom kratkog kretanja robota (*s*,*α*)
- Kovarijanca se dobije na temelju utjecaj pogreške integriranja i kretanja robota:

$$\mathrm{covar}(\boldsymbol{p}') = \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{p}})\mathrm{covar}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{p}})^T + \boldsymbol{R}(-\theta)\begin{bmatrix} k_R s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_\theta \theta + k_D s \end{bmatrix}\boldsymbol{R}(\theta)$$

Jednadžba računanja kovarijance za mala kretanja mobilnog robota (*s*,α)

- Prvi izraz na desnoj strani jednadžbe (****) predstavlja **transformaciju pogreške inicijalne konfiguracije ako je kretanje robota egzaktno.**
- Drugi izraz unosi **neizvjesnost u integriranju pozicije**.