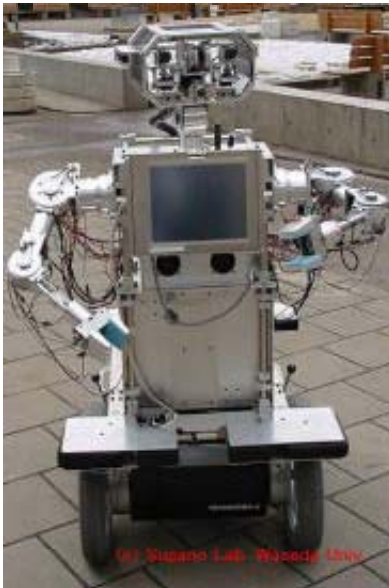


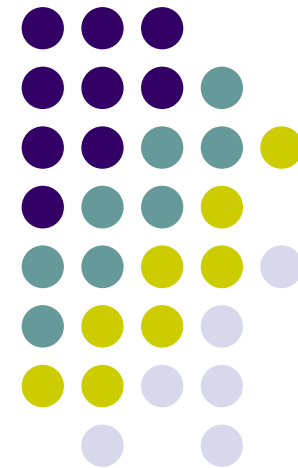
# Lekcija 9: *Lokalizacija korištenjem orijentira i EKF filtra*



Prof.dr.sc. Jasmin Velagić  
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

Kolegij: Mobilna robotika

2012/2013



## 9.1. Orijehtiri za estimaciju položaja

- **Orijentiri predstavljaju posebno istaknute znakove koje robot, na temelju mjerenja senzora, može prepoznati.**
- Orijehtiri mogu biti geometrijskog oblika (pravokutnici, linije, krugovi) i mogu uključivati dodatne informacije (npr. u obliku bar kodova).
- Općenito, orijentiri imaju fiksnu i poznatu poziciju u odnosu na robota, kako bi se on mogao lokalizirati.
- Oni se pažljivo odabiru kako bi se mogli lahko identificirati, naprimjer, moraju biti u dovoljnom kontrastu sa podlogom.



# Orijentiri za estimaciju položaja

- **Prije nego što robot može koristiti orijentire za navigaciju, karakteristike orijentira moraju biti poznate i pohranjene u memoriju robota.**
- **Glavni zadatak lokalizacije je pouzdano prepoznavanje orijentira i na temelju toga računanje položaja robota.**
- Fundamentalni pristupi estimacije položaja zasnivaju se na rješavanju geometrijskih ili trigonometrijskih problema koji uključuju ograničenja na pozicije orijentira.
- U principu, problem je povezan sa estimacijom pozicije orijentira u odnosu na fiksni senzor.
- Važne varijacije problema proizlaze iz toga da li su orijentiri označeni ili ne, da li je orijentire teško detektirati i da li su mjerenja netačna.



# Orijentiri za estimaciju položaja

- Primarni faktori koji diktiraju upotrebu orijentira su sljedeći: **Preko kojeg područja se orijentiri mogu detektirati? Koja je funkcionalna veza mjerenja orijentira i položaja? Kako se manifestiraju pogreške?**
- Dodatni faktori koji karakteriziraju pojedinu estimaciju položaja robota uključuju:
  - **Jesu li orijentiri umjetni ili prirodni?**
  - **Jesu li orijentiri aktivni ili pasivni?**
  - **Koji su modaliteti opažanja (npr. vizija, sonar, itd.)?**
  - **Koja su geometrijska svojstva orijentira (mali ili veliki, tačke ili ravni, itd.)?**
  - **Kako je složeno detektirati, identificirati ili mjeriti orijentire?**



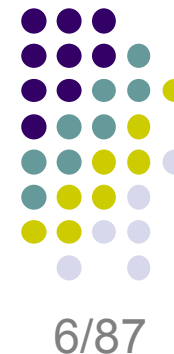
# Orijentiri za estimaciju položaja

- Ključni element u praksi jest da li se orijentiri koriste kao prirodni ili sintetički.
- **Umjetni orijentiri**, koji se postavljaju specifično za potrebe lokalizacije robota, obično se lahko detektiraju i jednoznačno su označeni.
- Njihovo optimalno postavljanje je od posebne važnosti.
- **Prirodno postavljeni orijentiri**, s jedne strane ne modificiraju okolinu, ali s druge strane moraju biti stabilno i robusno detektirani.
- Orijentiri mogu biti **aktivni ili pasivni, prirodni ili umjetni**.
- Aktivni orijentiri su tipični transmiteri koji emitiraju jednoznačne signale i raspoređeni su oko robotske okoline.



## Orientiri za estimaciju položaja

- Aktivni umjetni orientiri prevazilaze mnoge probleme svojstvene pasivnim, odnosno prirodnim orientirima.
- Umjetni orientiri se odabiru da budu jako vidljivi.
- U kontekstu robotike, nekoliko **primarnih opažajućih modaliteta su od posebnog interesa za estimaciju položaja:**
  - Video opažanje ili vizija (to jest računarski vid) može se koristiti u mnogim modelima.
  - Lasersko skeniranje u kombinaciji sa vizijom daje odlične rezultate u detektiranju jako udaljenih orientira.



## Orijentiri za estimaciju položaja

- Zemaljski aktivni radio odašiljači spadaju u klasu jako pouzdanih uređaja za estimaciju pozicije orijentira.
- GPS se temelji na mreži satelita i može se koristiti u bilo kojem postupku lokalizacije vanjskih prostora.
- Sonar kao uređaj za detekciju orijentira je široko primijenjen i jeftin, ali posjeduje nedostatke zbog disperzije svjetlosti, refleksije i šumova okoline. Primjenjuje se uglavnom za detekciju velikih, jednostavnih geometrijskih struktura koje se obično nazivaju geometrijski odašiljači.



## 9.1.1. Prirodni orijentiri

- **Glavni problem u navigaciji prirodnim orijentirima je detekcija i slaganje karakterističnih svojstava na temelju senzorskih ulaza.**
- Računarska vizija, odnosno računarski vid, je dobar izbor senzora za ovakav zadatak.
- Većina prirodnih orijentira koji se detektiraju računarskim vidom su duge vertikalne ivice, kao što su vrata i uglovi zidova i plafona.
- Kada se senzori područja (engl. range sensors) koriste u navigaciji temeljenoj na prirodnim orijentirima, vidljive **oznake, kao što su** uglovi ili rubovi, ili dugi ravni zidovi, se nameću kao dobar izbor.





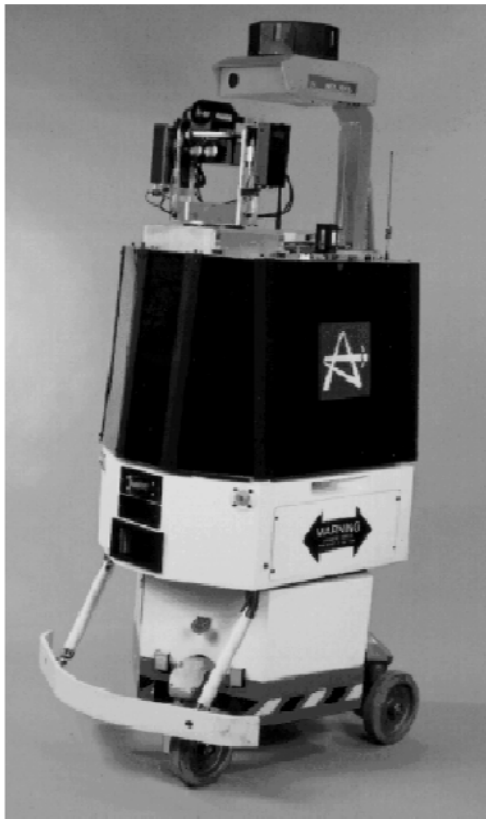
## Prirodni orijentiri

- Sistem pozicioniranja temeljen na prirodnim orijentirima općenito ima sljedeće osnovne komponente:
  - **Senzor** (obično računarski vid) za detekciju orijentira i kontrasta između njih i njihove podloge.
  - **Postupak slaganja** obzerviranih značajki sa mapom poznatih orijentira.
  - **Postupak računanja položaja i pogreški pozicioniranja** proizašlih iz postupka slaganja.



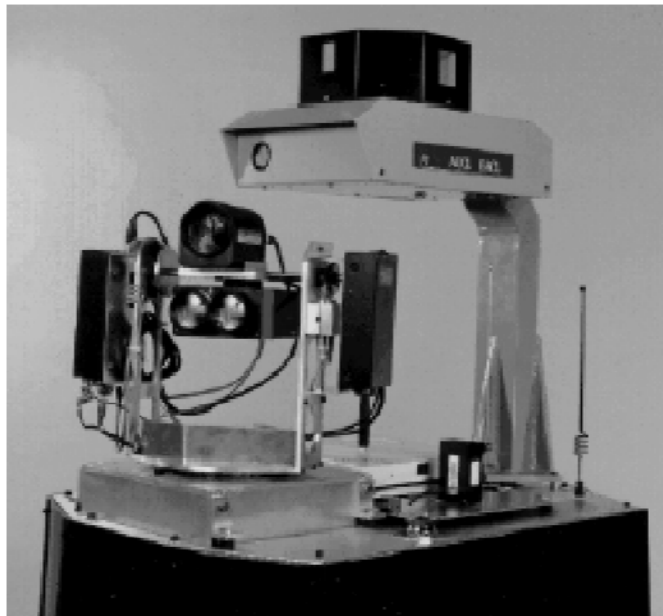
## Prirodni orijentiri

- Primjer sistema koji koristi prirodne orijentire razvijen je prije nekoliko godina u Kanadi.
- Sistem je opremljen Cybermotion K2A+ mobilnom platformom sa brojnim senzorskim podsistemima.



## Prirodni orijentiri

- Na platformi je posebno interesantan navigacijski modul sa CCD kamerom i IR laserskim sistemom u obliku oka.
- VME kartica, računar i mikrokontroler osiguravaju dovoljnu moć obrade. Navigacijski modul se koristi za periodičku korekciju akumuliranih pogrešaka odometrije robota.



## Prirodni orijentiri

- Sistem koristi orijentire kao što su alfanumerički znakovi, polupermanentne strukture ili otvori za vrata.
- Ovdje se može koristiti isključivo kriterij koji može odvojiti (razlikovati) orijentire od podloge scene sa bojama ili kontrastom.
- ARK navigacijski modul koristi interesantan hibridni pristup: sistem pohranjuje (uči) orijentire generiranjem trodimenzionalne "grey-level surface" iz pojedinačne slike dobivene pomoću CCD kamere.
- Laserski pretraživač prostora (engl. laser rangefinder) skenira isto polje dajući dubinu za svaki piksel u "grey-level surface".





## 9.1.2. Umjetni orijentiri

- **Detekcija je mnogo lakša sa umjetnim orijentirima koji su dizajnirani za optimalni kontrast.**
- Dodatno, **stvarne dimenzije (veličina) i oblik umjetnih orijentira su unaprijed poznati.**
- Veličina i oblik mogu dati mnoštvo važnih informacija unutar perspektivne projekcije.
- Istraživači su koristili različite vrste uzoraka ili oznaka, a na temelju njih su se razvile različite metode i tehnike za estimaciju položaja.
- Mnogi sistemi pozicioniranja, koji koriste umjetne orijentire, svoj rad zasnivaju na **računarskoj (robotskoj) viziji.**

## Umjetni orijentiri

- Fukui (1981) je koristio orijentire u obliku dijamanta i primijenio metodu najmanjih kvadrata za pronalaženje linijskih segmenata u ravnini slike.
- Borenstein (1987) je koristio crni pravokutnik sa četiri bijele tačke u njegovim vrhovima.
- Kabuka i Arenas (1987) su koristili krugove, čija je jedna polovina bila bijela, a druga crna, sa jedinstvenim bar kodom za svaki orijentir.
- Razvijeni su i sistemi koji koriste aktivne (naprimjer LED) uzorke za postizanje istog efekta (Fleury and Baron, 1992).



# Umjetni orijentiri

- **Tačnost lokalizacije ovisi o tačnosti geometrijskih parametara orijentira na slici, koji dalje ovise o relativnoj poziciji i uglu između robota i orijentira.**
- **Tačnost se smanjuje sa povećanjem relativne udaljenosti** (rastojanja između robota i orijentira).
- Postoji područje relativnih uglova unutar kojeg se postiže dobra tačnost, dok ona značajno pada kada se vrijednost relativnog ugla udaljava od ovog područja.
- Postoje različiti orijentiri koji se koriste u kombinaciji sa nevizualnim senzorima.
- Najčešće korišteni senzori su reflektori bar kodova za laserske skenere i kružni orijentiri.
- Za kružne orijentire se koristi Hough-ovu transformaciju za ekstrakciju parametara elipse u ravnini slike u stvarnom vremenu.



## Umjetni orijentiri

- **Karakteristike navigacije zasnovane na orijentirima se mogu sumirati na sljedeći način:**
- Prirodni orijentiri se odlikuju fleksibilnošću i ne zahtijevaju modifikacije okoline.
- Umjetni orijentiri su jeftini i mogu posjedovati dodatne informacije kodirane kao uzorci ili oblici.
- Maksimalna efektivna udaljenost između robota i orijentira je znatno kraća nego u sistemima sa aktivnim svjetionicima. Tačnost navigacije sa orijentirima se smanjuje kako se robot udaljuje od orijentira. Visok stupanj tačnosti se postiže samo kada je robot blizu orijentira.





## Umjetni orijentiri

- Znatno veće procesiranje je potrebno kod sistema sa aktivnim svjetionikom. U mnogim slučajevima računar na mobilnoj platformi ne može obraditi algoritme sa prirodnim orijentirima dovoljno brzo za kretanje u stvarnom vremenu.
- Ambijentalni uvjeti, kao što je osvijetljenost, mogu biti problematični. Tako, naprimjer, slabo osvijetljeni orijentiri se teško mogu prepoznati u odnosu na sve ostale objekte u okolini čije su karakteristike slične njihovim karakteristikama. Ovo je težak problem jer može rezultirati u pogrešno određenom položaju mobilnog robota.



## Umjetni orijentiri

- Navigacija zasnovana na orijentirima zahtijeva poznavanje početne lokacije tako da bi robot "znao" gdje se nalaze orijentiri. Ako početna pozicija nije poznata, robot će obavljati vremenski zahtjevan proces pretrage. Ovaj proces pretraživanja može dovesti do pogrešne interpretacije objekata u sceni.
- Mora se održavati baza podataka orijentira i njihovih lokacija u radnoj okolini.
- Postoji ograničena komercijalna podrška za tehnike zasnovane na prirodnim orijentirima.



## 9.2. Triangulacija

- **Triangulacija se sastoji od rješavanja algebarskih jednažbi ograničenja koje povezuju poziciju obzervera sa pozicijama skupa orijentira.**
- Estimacija položaja korištenjem postupaka triangulacije iz poznatih orijentira praktički se primjenjuje dugo vremena i datira od vremena drevnih Rimljana koji su koristili ove postupke za preslikavanje i gradnju puteva tokom rimske imperije.
- Historijski gledano, korijeni triangulacije datiraju još iz vremena Egipćana koji su je primjenjivali u kartografiju. Po nekima su čak i Sumeri koristili triangulaciju.



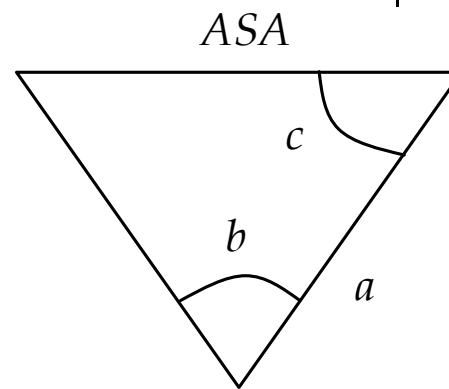
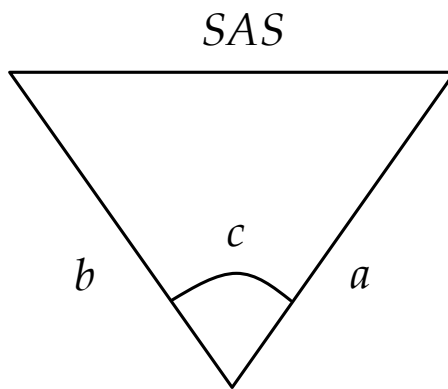
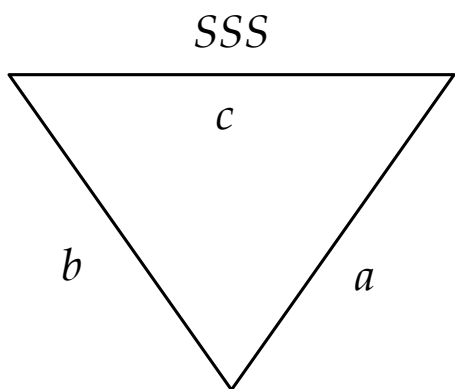
# Triangulacija

- **Najjednostavniji i najviše primjenjivani postupak triangulacije koristi orijentaciju ili mjerenje udaljenosti do dva orijentira da bi riješio zadatak estimacije položaja.**
- Na ovaj način se rješava problem estimacije položaja za parametre trokuta zadane kombinacije stranica i uglova.
- Ovisno o kombinaciji stranica ( $S$ ) i uglova ( $A$ ), problem triangulacije se može opisati kao SSS, SAS, ASA, itd., što je prikazano na sljedećoj slici.
- Na ovoj slici prikazani su ustvari najčešće korišteni riješivi problemi trokuta.



# Triangulacija

- Sva tri parametra trokutova sa slike su rješiva.



21/87

- Najčešće se susreću SAA i SSS slučajevi.
- Općenito, problem može uključivati neke kombinacije algebarskih ograničenja koje su povezane s mjerenjima parametara pozicije.
- One su obično nelinearne, što dovodi do rješenja koje može ovisiti o početnoj estimiranoj pozi ili ograničenju.

# Triangulacija

- Ovo se može formulirati na sljedeći način:

$$\mathbf{X} = F(m_1, m_2, \dots, m_n)$$

gdje vektor  $\mathbf{X}$  izražava estimirane varijable pozicije (vektor položaja robota) i  $\mathbf{M} = m_1, m_2, \dots, m_n$  je vektor mjerenja.

- U specifičnom slučaju estimacije položaja robota orijentiranog u ravnini, gornja jednačba postaje:

$$x = F_1(m_1, m_2, \dots, m_n)$$

$$y = F_2(m_1, m_2, \dots, m_n)$$

$$\theta = F_3(m_1, m_2, \dots, m_n)$$



# Triangulacija

- Ova jednađžba se može riješiti postupcima iteracije, najbržeg spusta, najmanjih kvadrata, itd.
- Ako je samo udaljenost do orijentira raspoloživa, tada su pojedinačna mjerenja robotske pozicije ograničena na luk kružnice.
- Djelovanje poremećaja može se ispitati pomoću matrice Jacobijana:

$$d\mathbf{X} = \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} \mathbf{X} \right) d\mathbf{M} = \mathbf{J} d\mathbf{M}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ d\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial m_1} & \frac{\partial F_1}{\partial m_2} & \frac{\partial F_1}{\partial m_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial m_1} & \frac{\partial F_2}{\partial m_2} & \frac{\partial F_2}{\partial m_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial m_1} & \frac{\partial F_3}{\partial m_2} & \frac{\partial F_3}{\partial m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dm_1 \\ dm_2 \\ dm_3 \end{bmatrix}$$

(\*)



# Triangulacija

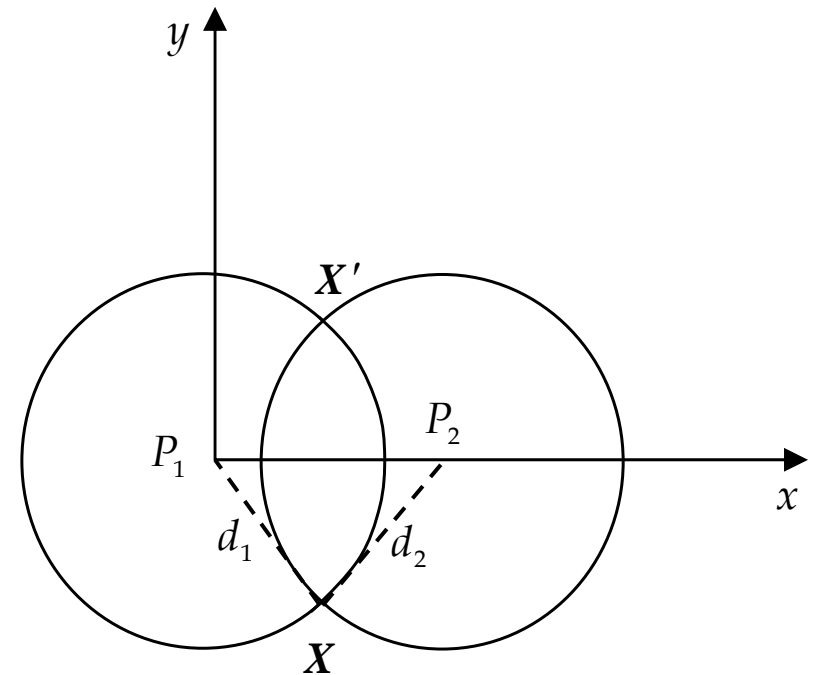
- Karakteristike jednadžbe (\*) su:
  - **matrična jednadžba totalnog diferencijala;**
  - **skraćeni Taylorov niz;**
  - **osjetljivi koeficijenti;**
  - **hiperdimenzionalna prva derivacija;**
  - **aproksimacija ponašanja prvog reda.**
- Ponašanje prvog reda je uvijek linearno u rezultatima mjerenja.
- Matrica  $\mathbf{J}$  je funkcija položaja mobilnog robota i ima isto značenje kao u diferencijalnoj kinematici robotskog manipulatora.





# Triangulacija

- Slika desno predstavlja najjednostavniji slučaj triangulacije.
- Robot u nepoznatoj lokaciji  $X$  osjeća dva orijentira  $P_1$  i  $P_2$  mjerenjem udaljenosti  $d_1$  i  $d_2$  do njih, respektivno.
- Ovo odgovara slučaju u kome svjetiljka iz poznate lokacije emitira signal i robot dobiva informaciju o udaljenosti dobivenu na temelju vremenskog prostiranja signala do robota.





## Triangulacija

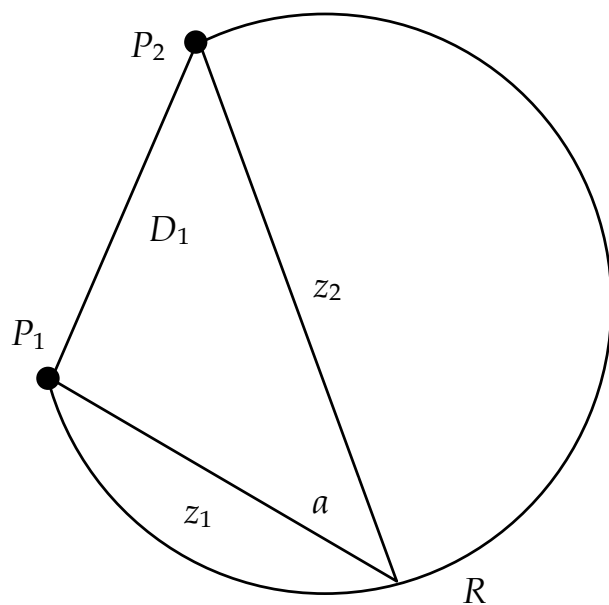
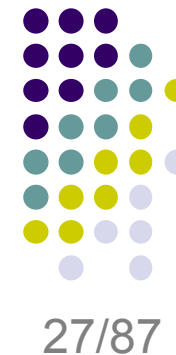
- Robot se mora nalaziti na presjecištu kruga polumjera  $d_1$  sa centrom u  $P_1$  sa krugom polumjera  $d_2$  sa centrom u  $P_2$ . Bez gubitka općenitosti može se pretpostaviti da je  $P_1$  u ishodištu koordinatnog sistema, a  $P_2$  u tački  $(a, 0)$ . Rezultat estimacije pozicije je:

$$x = (a^2 + d_1^2 - d_2^2) / 2a$$
$$y = \pm \sqrt{(d_1^2 - x^2)}$$

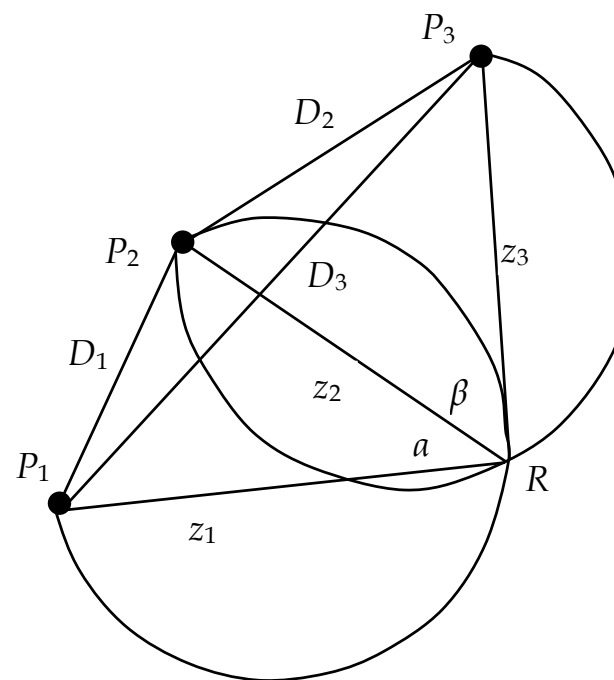
- U tipičnim primjenama su odašiljači postavljeni na zidove i neispravno rješenje se može identificirati zbog toga što ono odgovara lokaciji robota na pogrešnoj strani zida.

# Triangulacija

- Situacije sa dva, odnosno tri orijentira prikazane su na sljedećim slikama.
- Robot detektira dva poznata orijentira i mjeri orijentaciju svoga pravca kretanja u odnosu na orijentire.



(a)



(b)

# Triangulacija



- Ovim se postiže razlika u orijentaciji između pravaca usmjerenih prema orijentirima i ograničenja tačne pozicije robota do linije na:

$$D_1^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2|z_1||z_2|\cos(\alpha)$$

- U ovom slučaju robot vidi poznate orijentire i može očitati ugao  $\alpha$ . Položaj robota je negdje na prikazanom kružnom luku. U slučaju tri poznata orijentira vrijedi:

$$D_1^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2|z_1||z_2|\cos(\alpha)$$

$$D_2^2 = z_2^2 + z_3^2 - 2|z_2||z_3|\cos(\beta)$$

$$D_3^2 = z_1^2 + z_3^2 - 2|z_1||z_3|\cos(\alpha + \beta)$$

Na temelju njih robot može očitati uglove  $\alpha$  i  $\beta$ .

## 9.3. Triangulacija sa neizvjesnostima

- **U realnim situacijama postupak triangulacije je otežan zbog mjerenja senzora koji sadrže neizvjesnosti.**
- Kao rezultat neizvjesnosti, estimacija pozicije dobivena triangulacijom omogućuje distribuciju vjerojatnosti za položaj robota.
- Premda posebno degenerirani slučajevi vode ka dvoznačnim estimacijama položaja, u principu, povećanje ulazne pogreške u postupku estimacije pozicije je neobičan događaj.



# Triangulacija sa neizvjesnostima



- Veza između tačnosti ulaznih mjerenja i tačnosti finalne estimacije željenog položaja je formalizirana **geometrijskom dilutacijom preciznosti (GDOP)**.
- Ovo je metrika koja izražava promjenu u izlaznoj estimaciji varijabli  $\mathbf{X}$  (tj. geometrijske varijable koje konstruiraju pozu) sa promjenama u ulaznim parametrima  $\mathbf{S}$  (to jest senzorskim podacima):

$$\text{GDOP} = \frac{\Delta \mathbf{X}}{\Delta \mathbf{S}}$$

- Kada se uzme da  $\Delta \mathbf{S}$  teži ka nuli dobiva se:

$$\lim_{\Delta \mathbf{S} \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{X}}{\Delta \mathbf{S}} = |\mathbf{J}|$$

# Triangulacija sa neizvjesnostima



31/87

- Karakteristike GDOP-a:
  - Fiksna pogreška ovisi o pogrešci mjerenja i amplitudi GDOP-a, tako da nije nepoželjno da njegova amplituda bude velikog iznosa.
  - Amplituda GDOP –a je u opsegu  $0 < \text{GDOP} < \infty$ .
  - Beskonačnost nije opća, ali je se mora znati razumjeti.
  - Amplituda GDOP-a se mijenja prostorno slično  $|\mathbf{J}|$ .
  - Amplituda GDOP-a se mijenja sa prostorom u realnim situacijama.
  - Amplituda GDOP-a postaje  $\infty$  kada Jacobian ima singularitet ili njegova inverzna matrica ima determinantu jednaku nuli.
  - Jako je teško izračunati GDOP korištenjem transformacija koordinata.
  - Može se istraživati sa konturnim grafovima.
  - Nije potrebno računati  $\mathbf{J}$  eksplicitno, samo se zahtijeva  $|\mathbf{J}|$ .

# Implicitni GDOP

- Često su realne jednađbe ograničenja implicitne.
- Neka se promatraju dva nelinearna ograničenja sa četiri varijable:

$$F(x, y, z, w) = 0$$

$$G(x, y, z, w) = 0$$

- Ove jednađbe definiraju dvije implicitne funkcije  $z(x, y)$  i  $w(x, y)$ .
- Primjenom totalnih diferencijala dobiva se:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz + F_w dw = 0$$

$$G_x dx + G_y dy + G_z dz + G_w dw = 0$$





# Implicitni GDOP

- Na temelju zadnjih jednadžbi dobivaju se simultane linearne jednadžbe za  $dz$  i  $dw$  izražene preko  $dx$  i  $dy$ :

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z & F_w \\ G_z & G_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dz \\ dw \end{bmatrix}$$

- Korištenjem pravila za računanje determinante umnoška i inverzije matrice, dobiva se:

$$|\mathbf{J}| = \det \left[ \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} F_z & F_w \\ G_z & G_w \end{bmatrix} \right]$$

tako da se GDOP može izračunati bez računanja matrice Jacobiana.

## Implicitni GDOP

- U trodimenzionalnom prostoru, **horizontalna geometrijska dilutacija preciznosti** (HDOP) i **pozicijska geometrijska dilutacija preciznosti** (PDOP) se definiraju i odnose se na osjetljivost samo horizontalnih i translacijskih komponenti, dok puni GDOP upućuje na osjetljivost velike klase varijabli.
- Naprimjer, GDOP se ponekad može odnositi na osjetljivost varijabli sistema, uključujući 3-D translaciju jednako kao i estimaciju pogreške vremenskog kloka lokalnog prijemnika.



# Implicitni GDOP

- Promatrajmo jednostavan slučaj orijentira sa slajda broj 25.
- U ovom slučaju je GDOP dan sa:

$$\text{GDOP} = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} d_1/a & -d_2/a \\ d_1(a-x)/ay & xd_2/ay \end{bmatrix}$$

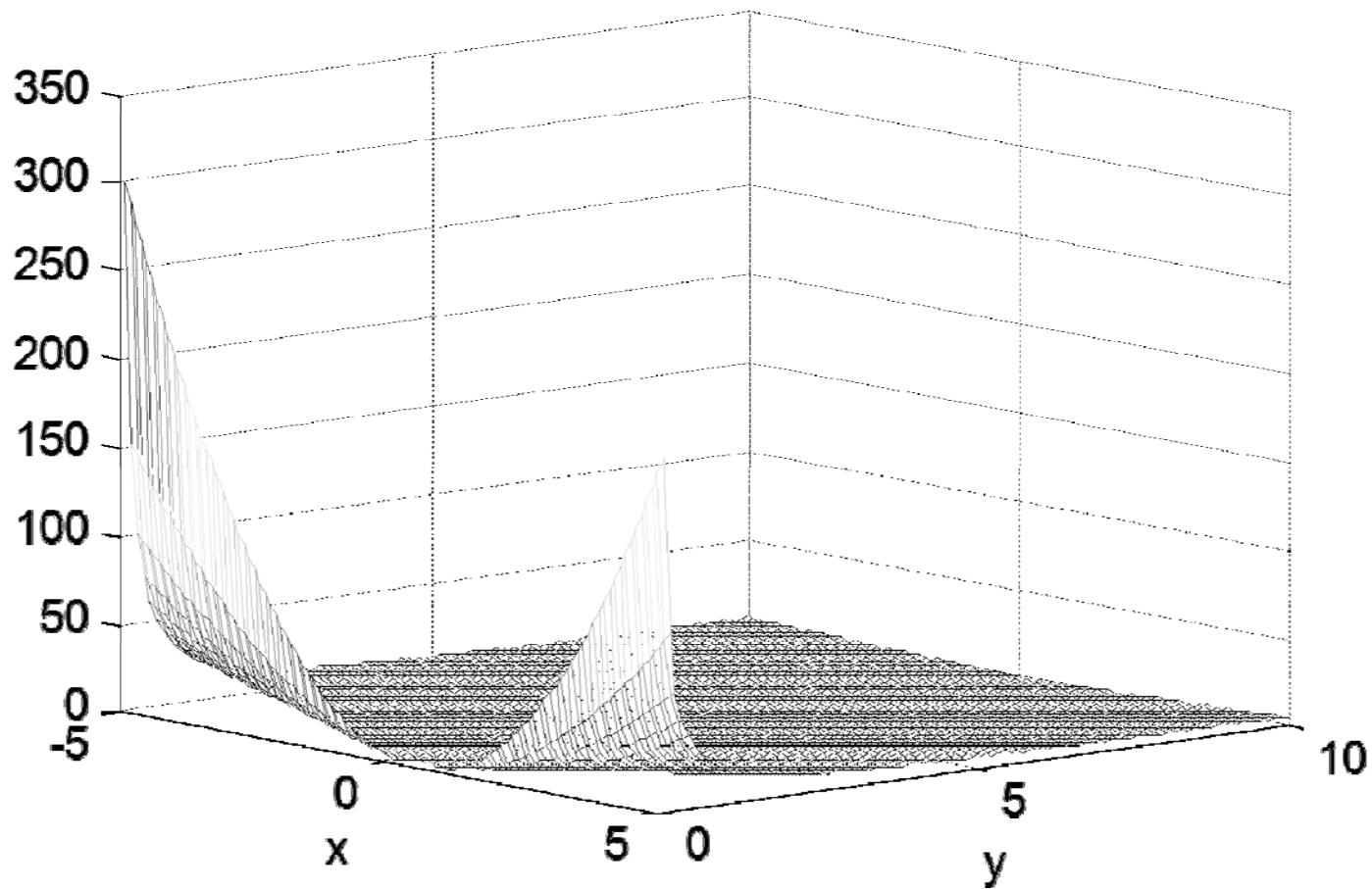
- Dok je amplituda GDOP-a jednaka:

$$|\mathbf{J}| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2}}{y}$$

# Implicitni GDOP

- Amplituda GDOP-a

GDOP za dva orijentira



## Implicitni GDOP

- Na prethodnoj slici dva orijentira su locirana u tačkama  $(0,0)$  i  $(1,0)$  i  $|\mathcal{J}|$  je nacrtan u području  $x=-5\dots5$ ,  $y=-4,\dots,4$ .
- $|\mathcal{J}|$  raste kako se robot udaljava od  $x$  ose.
- Ovo je očekivano zbog toga što se efektivna separacija između krugova smanjuje kako se robot udaljava od orijentira.
- Budući da se tačnost većine senzora smanjuje sa povećanjem područja, upotreba udaljenih orijentira se izbjegava što je moguće više.
- Ono što je manje uočljivo jest povećanje vrijednosti GDOP-a duž  $x$ -osi kako se robot udaljava od područja između dviju prepreka.



## Implicitni GDOP

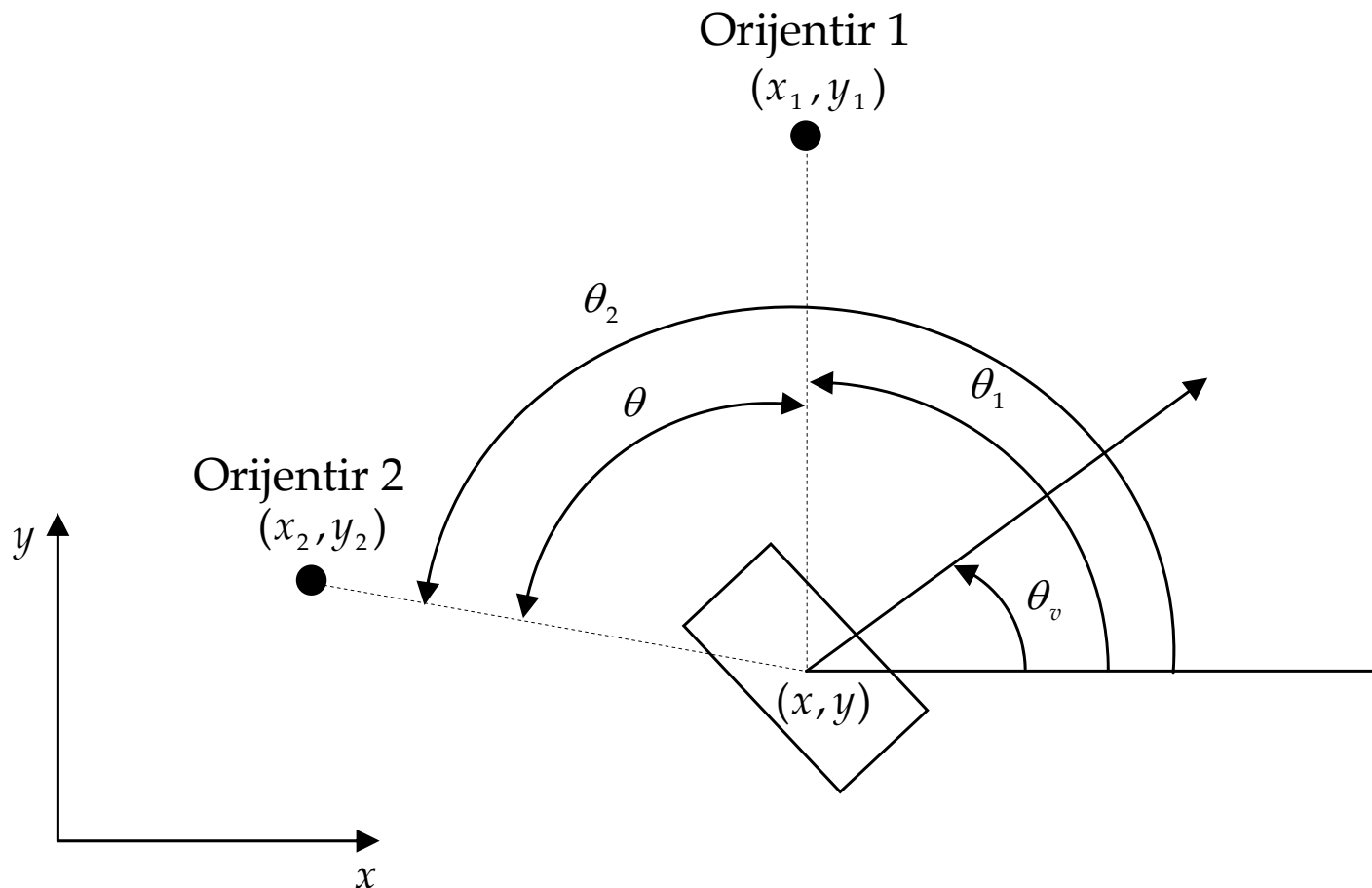
- Greška koja se može pojaviti u estimaciji bilo kojeg položaja robota raste veoma brzo kada su oba orijentira locirana sa iste strane robota i na istoj liniji sa robotom.
- Poznavanje oblika GDOP-a može pomoći robotu pri izboru prepreka koje će se koristiti ako postoji višestruki izbor prepreka.
- U praktičnim situacijama kod robotskih sistema mogu se javiti brojne poteškoće u jednoznačnom identificiranju prepreka ili estimacija položaja može biti nestabilna zbog oblika (geometrije) prepreke.



# Implicitni GDOP

## Primjer triangulacije sa dva orijentira.

- Dvije vrste mjerenja su prisutne u ovom primjeru: mjerenje orijentacije orijentira ( $\theta_1, \theta_2$ ) i napredovanja mobilnog robota (vozila) ( $\theta_v$ ).



# Implicitni GDOP

## Primjer triangulacije sa dva orijentira.

- Jednadžbe ograničenja su:

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$
$$\tan \theta_2 = \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} = \frac{y_2 - y}{x_2 - x}$$

- Ove jednadžbe predstavljaju dvije linearne simultane jednadžbe:

$$(x_1 - x)s_1 = (y_1 - y)c_1$$
$$(x_2 - x)s_2 = (y_2 - y)c_2$$
$$\begin{bmatrix} -s_1 & c_1 \\ -s_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1x_1 + c_1y_1 \\ -s_2x_2 + c_2y_2 \end{bmatrix}$$



# Implicitni GDOP

## Primjer triangulacije sa dva orijentira.

- Ove jednađbe imaju uvijek rješenje, osim u slučaju:

$$-s_1c_2 + s_2c_1 = 0$$

- Ovo je primjer degeneriranja, odnosno nepostojanja rješenja. Uvijek postoji linija između dva orijentira tako da:
  - se ne operira blizu linije,
  - su pozicije orijentira na odgovarajućem rastojanju,
  - se koristi treći orijentir.





# Implicitni GDOP

## Primjer triangulacije sa dva orijentira.

- Važno je napomenuti da nije potrebno da robot bude između orijentira da bi se to dogodilo.
- Što se tiče osjetljivosti, GDOP se može izračunati korištenjem implicitne formule za implicitne funkcije  $x(\theta_1, \theta_2)$  i  $y(\theta_1, \theta_2)$ :

$$F_1(x, y, \theta_1, \theta_2) = s_1(x_1 - x) - c_1(y_1 - y)$$

$$F_2(x, y, \theta_1, \theta_2) = s_2(x_2 - x) - c_2(y_2 - y)$$

- Totalni diferencijali se pišu na sljedeći način:

$$F_{1x} dx + F_{1y} dy + F_{1\theta_1} d\theta_1 + F_{1\theta_2} d\theta_2 = 0$$

$$F_{2x} dx + F_{2y} dy + F_{2\theta_1} d\theta_1 + F_{2\theta_2} d\theta_2 = 0$$

# Implicitni GDOP



## Primjer triangulacije sa dva orijentira.

- Računanje determinante Jacobiana se obavlja kako slijedi:

$$|\mathbf{J}| = \det \left[ \begin{array}{cc} F_{1\theta_1} & F_{1\theta_2} \\ F_{2\theta_1} & F_{2\theta_2} \end{array} \right] / \left[ \begin{array}{cc} F_{1x} & F_{1y} \\ F_{2x} & F_{2y} \end{array} \right]$$

$$|\mathbf{J}| = \det \left[ \begin{array}{cc} c_1 \Delta x_1 + s_1 \Delta y_1 & 0 \\ 0 & c_2 \Delta x_2 + s_2 \Delta y_2 \end{array} \right] / \left[ \begin{array}{cc} -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{array} \right]$$

$$|\mathbf{J}| = \frac{(c_1 \Delta x_1 + s_1 \Delta y_1)(c_2 \Delta x_2 + s_2 \Delta y_2)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}$$

# Implicitni GDOP

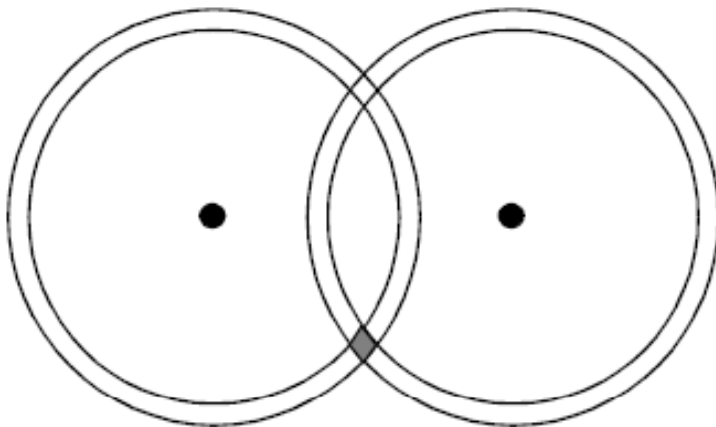
## Zaključak

- GDOP poprima beskonačne vrijednosti u tačkama nedosljednosti.
- GDOP raste sa kvadratom udaljenosti.
- GDOP raste kako linije postaju paralelnije.
- Oba događaja se javljaju na velikim udaljenostima.

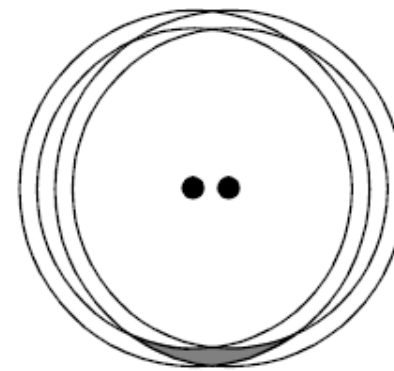


# Konturni dijagram

- Prostiranje pogreške može biti nerazumljivo u smislu prikaza utjecaja malih varijacija u obzervacijama na računanje pložaja mobilnog robota.
- Na ***konturnim dijagramima*** je područje dvoznačnosti, omeđeno originalnim i krivuljama poremećaja, generirano poremećajima pridruženih obzervacijama.

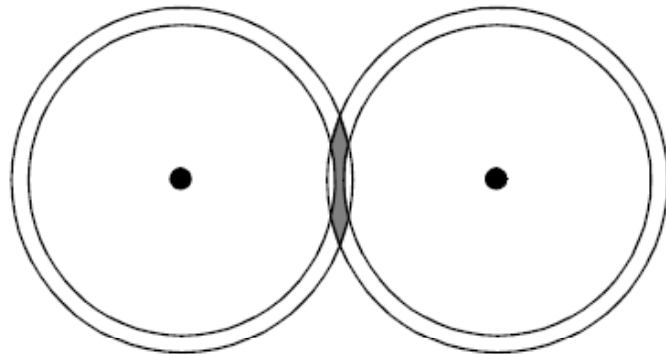


Ugao blizu  $90^\circ$  - dobro



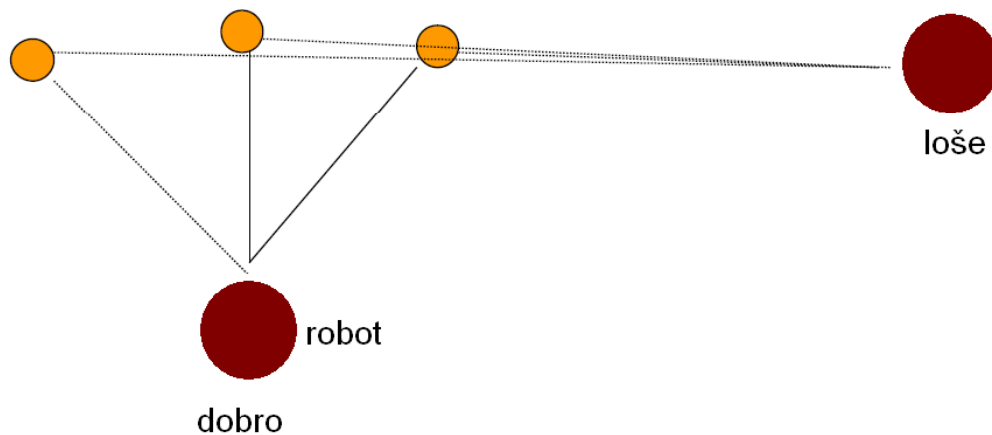
Ugao blizu  $0^\circ$  - loše

# Konturni dijagram

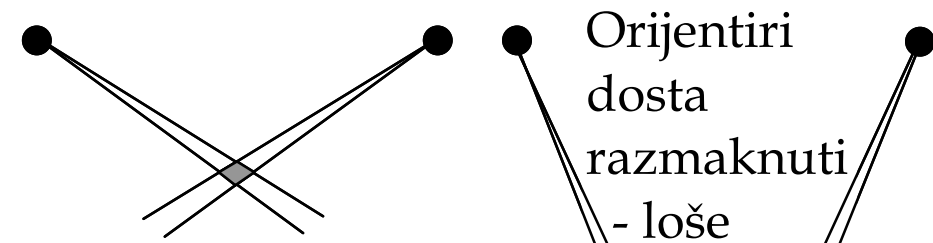
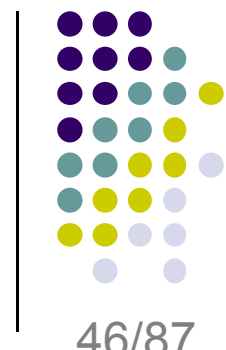


Ugao blizu  $180^\circ$  - loše

Za fiksnu ulaznu pogrešku, veličina regiona i oblik se mijenjaju kako se robot kreće u odnosu na orijentire.



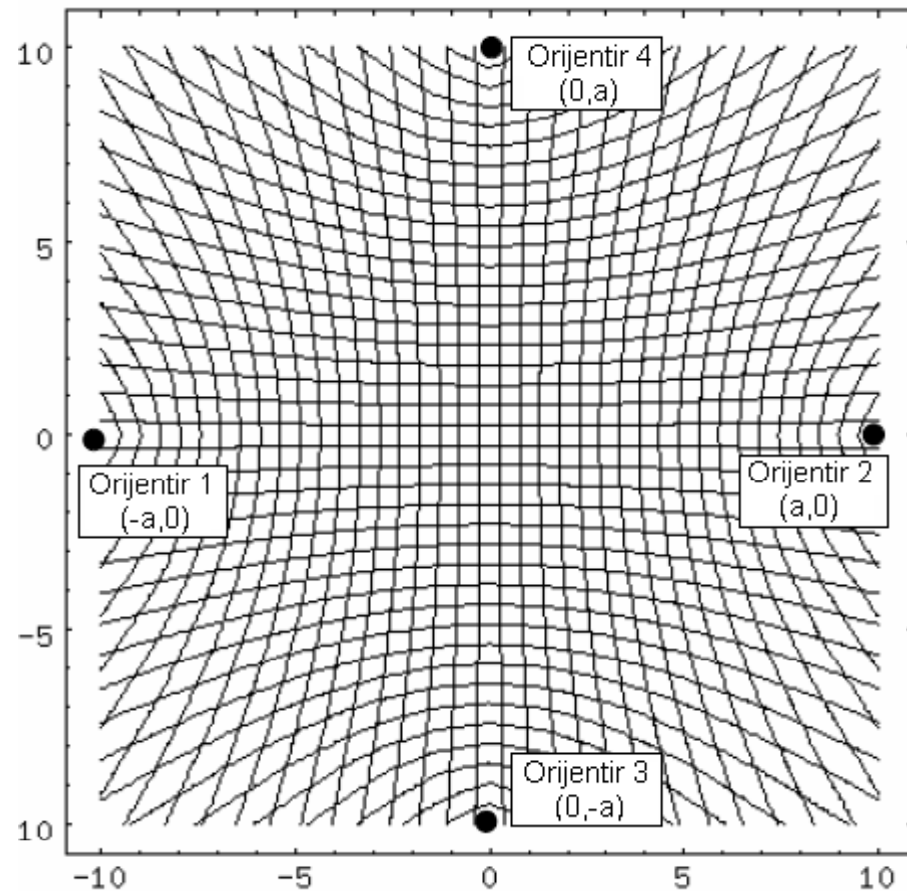
Zasjenčeni region je rezultat računanja položaja robota kao odziv na poremećaje u observacijama.



Ugao između linija blizu  $90^\circ$  - dobro

# Konturni dijagram

- Veličina i oblik regiona nemaju nikakvo značenje, odnosno ne iskazuju dimenziju.
- Važno je napomenuti da su konture jednako razmaknute u obje observacije i da one prolaze kroz pozicije robota.
- Primjer konturnog dijagrama za slučaj četiri orijentira locirana u  $(-a,0)$ ,  $(a,0)$ ,  $(0,-a)$  i  $(0,a)$  prikazan je na slici.



## Konturni dijagram

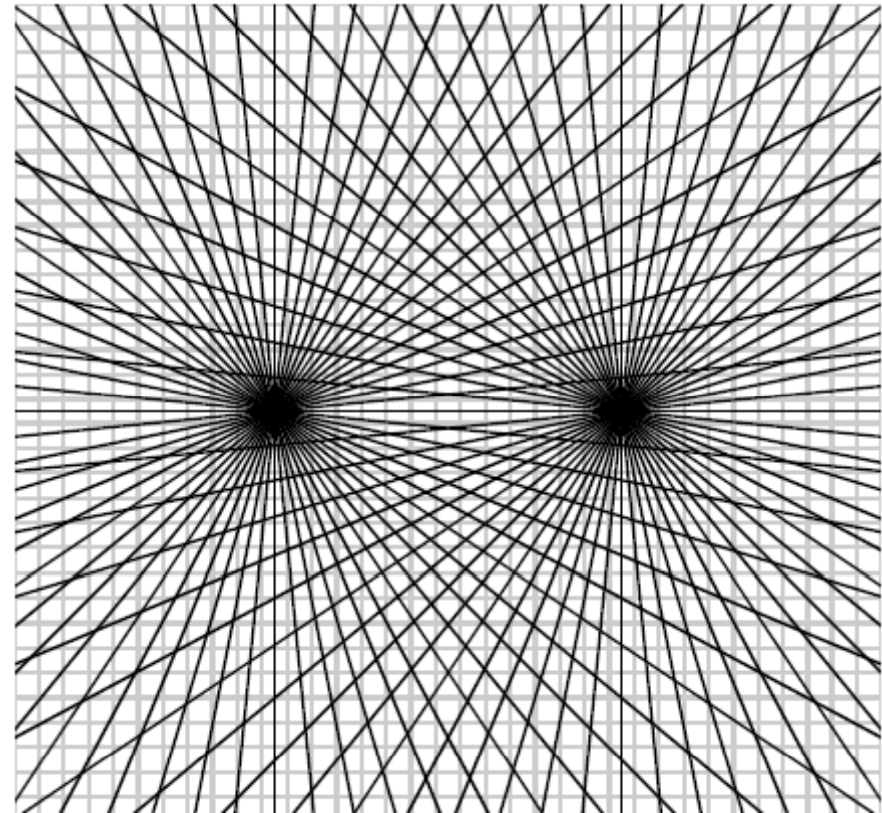
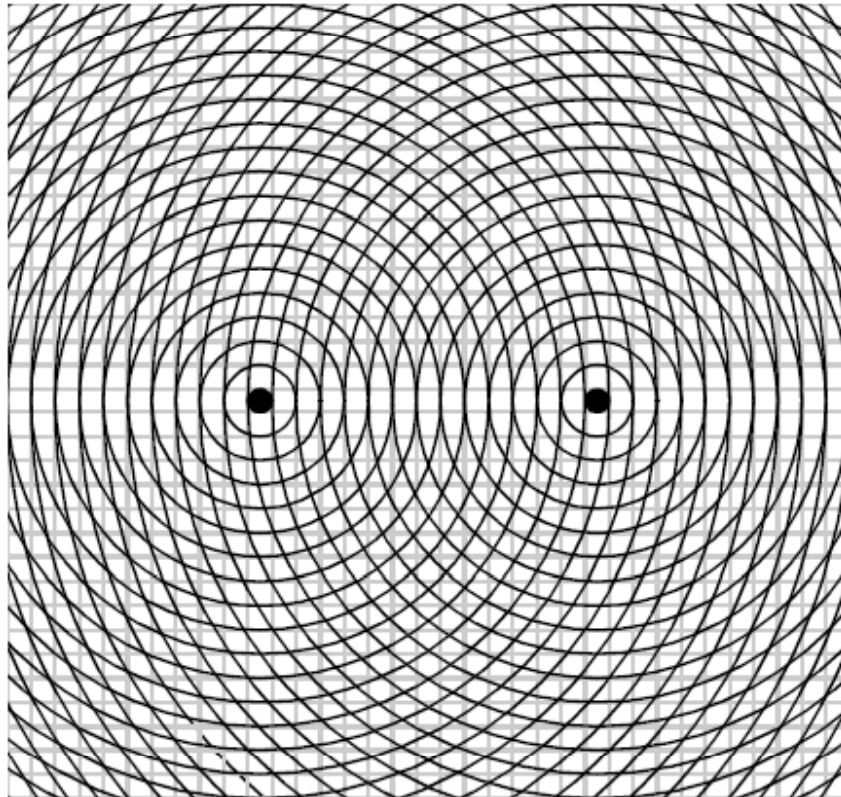
- Također važan aspekt propagacije pogreške je ovisnost o različitom ponašanju u odnosu na stanje, odnosno položaj robota.
- Ova ovisnost se izvodi iz nelinearne prirode observera.
- Sve navedeno postaje upitno kada je region u cijelosti popunjen konturama čije razine su jednako razmaknute, kako je prikazano na sljedećoj slici.





# Konturni dijagram

- Popunjavanjem regiona, prostorna varijacija u veličini i obliku odziva na ulaznu pogrešku može se vizualizirati.



## 9.4. Kalmanov filter za estimaciju stanja

- Određivanje pozicije i orijentacije mobilnog robota je otežano zbog sljedećih razloga:
  - Kinematički model mobilnog robota nije nikad tačan (naprimjer, nije poznat, sa konačnom preciznošću, razmak između osi kotača).
  - Senzorski modeli su podložni djelovanju netačnosti koje mogu značajno usložniti njegov model (naprimjer, eksponencijalni model žiroskopskog drifta).
  - Mjerenja senzora su prekrivena (oštećena) šumom.
  - Kretanje platforme uključuje vanjske izvore pogreške koje ne mogu opaziti (obzervirati) korišteni senzori (naprimjer, klizanje u smjeru kretanja ili u smjeru okomitom na kretanje robota).



## Kalmanov filter za estimaciju stanja

- Kalmanov filter je algoritam za optimalnu estimaciju  $n$  dimenzionalnog stanja sistema, označenog s  $\mathbf{x}$ , za zadani skup mjerenja u  $m$  dimenzionalnom vektoru  $\mathbf{z}$ .
- Stanje lokalizatora sadrži poziciju, orijentaciju i brzinu robota, kao i informacije o stanju samog lokalizatora, kao što su brzina zvuka i vrijeme aktiviranja svjetionika.
- Mjerenja obuhvaćaju vremena dolaska i amplitude primljenih impulsa i informacije o koordinatama položaja dobivenih od enkodera pozicije kotača smještenog na robotu.





## Kalmanov filter za estimaciju stanja

- Lokalizator je modeliran kao vremenski diskretni sistem gdje svaki trenutak uzorkovanja odgovara vremenu ispaljenja svakog svjetionika.
- Tako se stanje podešava više od 6 puta u sekundi.
- Polazne jednačbe za izvođenje Kalmanovog filtra su: **jednačba prijelaza stanja** i **jednačba mjerenja**.
- Za linearni diskretni sistem ove jednačbe poprimaju oblike:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k)$$

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)$$

## Kalmanov filter za estimaciju stanja

- U gornjim jednadžbama je  $\mathbf{x}(k)$  vektor stanja,  $\mathbf{z}(k)$  vektor izlaza (mjerenja),  $\mathbf{u}(k)$  vektor ulaza,  $\mathbf{F}(k)$  matrica stanja prijelaza,  $\mathbf{G}(k)$  matrica ulaza,  $\mathbf{H}(k)$  matrica mjerenja,  $\mathbf{v}(k)$  šum stanja (procesni šum) i  $\mathbf{w}(k)$  mjerni šum.
- Procesni i mjerni šumovi predstavljaju nepoznati bijeli šum srednje vrijednosti nula sa poznatim kovarijancama:

$$E[\mathbf{v}(k)] = 0, \quad E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)] = \mathbf{Q}(k)$$

$$E[\mathbf{w}(k)] = 0, \quad E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)] = \mathbf{R}(k)$$

- gdje je  $E[\ ]$  matematičko očekivanje,  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  dijagonalne varijantne *matrice stanja* i *šuma mjerenja*. Za matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  se pretpostavlja da su poznate ili se mogu estimirati na on-line način.

# Kalmanov filter za estimaciju stanja

- Kalmanov filter ima dva koraka po jednom ciklusu mjerenja: **stanje predikcije** i **proces mjerenja**.

## Predikcija stanja i pogreške

- Kalmanov filter **održava estimaciju stanja**:
  - $\hat{\mathbf{x}}(k | k)$  predstavlja estimaciju stanja  $\mathbf{x}(k)$  za zadana mjerenja  $z(k), z(k-1), \dots$ ,
  - $\hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k)$  predstavlja estimaciju stanja  $\mathbf{x}(k+1)$  za zadana mjerenja  $z(k), z(k-1), \dots$ ,
- i **matricu kovarijance pogreške estimacije stanja**:
  - $\mathbf{P}(k|k)$  predstavlja kovarijancu stanja  $\mathbf{x}(k)$  za zadana mjerenja  $z(k), z(k-1), \dots$ ,
  - $\mathbf{P}(k+1|k)$  predstavlja kovarijancu stanja  $\mathbf{x}(k+1)$  za zadana mjerenja  $z(k), z(k-1), \dots$



# Kalmanov filter za estimaciju stanja



- Ako su poznati  $\hat{\mathbf{x}}(k | k)$ ,  $\mathbf{u}(k)$ ,  $\mathbf{P}(k|k)$  i novo mjerenje  $\mathbf{z}(k+1)$  dobivaju se sljedeće jednažbe estimacije stanja:

1. **Predikcija stanja:**  $\hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k) = \mathbf{F}(k)\hat{\mathbf{x}}(k | k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{u}(k)$

2. **Predikcija mjerenja:**  $\hat{\mathbf{z}}(k + 1 | k) = \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k)$

3. **Rezidual mjerenja:**  $\mathbf{r}(k + 1) = \mathbf{z}(k + 1) - \hat{\mathbf{z}}(k + 1 | k)$

4. **Osvježavanje estimacije stanja:**

$$\hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k + 1) = \hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k) + \mathbf{K}_k(k + 1)\mathbf{r}(k + 1)$$

gdje je  $\mathbf{K}_k(k+1)$  pojačanje Kalmanovog filtra, koje će se u nastavku definirati.





## Kalmanov filter za estimaciju stanja

- Kombiniranjem prethodnih jednažbi dobiva se:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{K}_k(k+1)[\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)]$$

- Matrica predikcije kovarijance pogreške može se izračunati na sljedeći način:

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{F}^T(k) + \mathbf{Q}(k)$$

### Jednažbe mjerenja procesa:

- Kovarijanca predikcije mjerenja glasi:

$$\mathbf{S}(k+1) = \mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{R}(k+1)$$

- Pojačanja Kalmanovog filtra se računa kao:

$$\mathbf{K}_k(k+1) = \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1)\mathbf{S}^{-1}(k+1)$$



# Kalmanov filter za estimaciju stanja



- Osvježavanje (podešavanje) kovarijance stanja:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1|k+1) &= \mathbf{P}(k+1|k) - \mathbf{K}_k(k+1)\mathbf{S}(k+1)\mathbf{K}_k^T(k+1) \\ &= \mathbf{P}(k+1|k) - \mathbf{K}_k(k+1)\mathbf{S}(k+1)[\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1)\mathbf{S}^{-1}(k+1)]^T \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k(k+1)\mathbf{H}^T(k+1)]\mathbf{P}(k+1|k) \end{aligned}$$

57/87

- Budući da je računanje kovarijance neovisno o stanju, ono se može obaviti na off-line način:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1|k) &= \mathbf{F}(k) \cdot \{ \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{P}(k|k-1) \cdot \mathbf{H}^T(k) \cdot \\ &\quad \cdot [\mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{P}(k|k-1) \cdot \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k)]^{-1} \cdot \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{P}(k|k-1) \} \cdot \mathbf{F}^T(k) + \mathbf{Q}(k) \end{aligned}$$

- Prva jednađžba predstavlja Riccatijevu jednađžbu.
- Rješenje ove jednađžbe za vremenski invarijantan sistem konvergira ka kovarijanci ravnotežnog stanja ako je par  $\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\}$  u cijelosti osmotriv (to jest stanje je osmotrivo iz samih mjerenja).

## Kalmanov filter za estimaciju stanja

- Par  $\{F, H\}$  je u cijelosti osmotriv ako i samo ako je *matrica osmotrivosti*:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} F \\ FH \\ \vdots \\ FH^{n-1} \end{bmatrix}$$

punog ranga od  $n$ .

- Konvergencija Riccatijeve jednađbe daje stabilno pojačanje Kalmanovog filtra.
- Upotreba Kalmanovog filtra će se demonstrirati na primjeru padajućeg tijela.



## Kalmanov filter za estimaciju stanja

- Promatra se kruto tijelo koje pada konstantnim gravitacijskim ubrzanjem.
- Ako se sa  $z(t)$  označi visina na kojoj se tijelo nalazi u trenutku  $t$ , tada vrijedi:

$$\ddot{z}(t) = -g$$

iz čega slijedi:

$$\dot{z}(t) = \dot{z}_0(t) - g(t - t_0),$$

$$z(t) = z_0(t) + \dot{z}_0(t)(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2.$$



# Kalmanov filter za estimaciju stanja



- Ako se uzme vremenski inkrement  $t-t_0=1$  dobiva se diskretni sistem oblika:

$$z(k+1) = z(k) + \dot{z}(k) - \frac{g}{2}$$

tada visina  $z(k+1)$  ovisi o prethodnoj brzini i visini tijela u trenutku  $k$ .

- Kao vektor stanja može se uzeti sljedeći vektor:

$$\mathbf{x}(k) = [z(k) \quad \dot{z}(k)]^T$$

koji definira *jednadžbu stanja* i *jednadžbu mjerenja*:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} (-g) \\ &= \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}u(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(k+1) &= [1 \quad 0] \mathbf{x}(k) + v(k) \\ &= \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + v(k) \end{aligned}$$

## Kalmanov filter za estimaciju stanja

- Za primjenu Kalmanovog filtra varijanca  $w(k)$  mora biti poznata.
- Ako su zadani početno stanje sistema i kovarijanca, tada imamo dovoljno informacija na temelju kojih se može naći optimalna estimacija stanja korištenjem jednadžbi Kalmanovog filtra.
- Pretpostavimo da je stvarno početno stanje pozicije jednako 100 i brzine 0, te da je  $g=1$ . Intuitivno postavljamo početno estimirano stanje i početnu kovariantnu matricu stanja  $P(0)$ .
- Elemente kovariantne matrice šuma  $Q$  postavljamo na nulte vrijednosti.



## Kalmanov filter za estimaciju stanja

- Kovarijantna matrica šuma mjerenja je estimirana na temelju poznavanja predikcije obzervacijskih pogrešaka, u našem slučaju se radi o jediničnoj matrici.
- Matrice  $F$ ,  $G$  i  $H$  su poznate iz jednadžbi stanja i mjerenja.
- Rezultati primjene Kalmanovog filtra su dani u tabeli i grafički su predočeni na slici.



# Kalmanov filter za estimaciju stanja

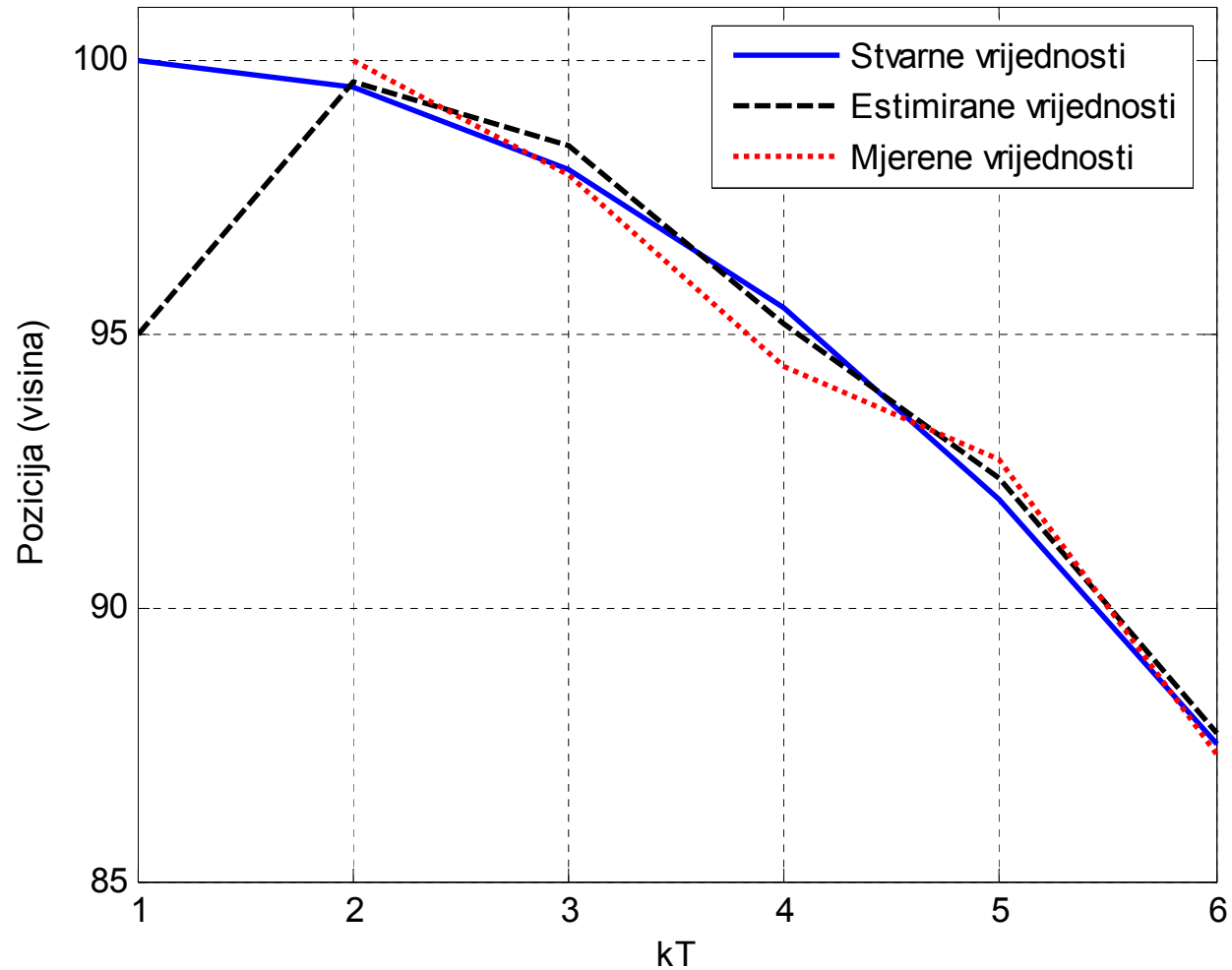


- **Tabela.** Rezultati primjene Kalmanovog filtra

	Stvarne vrijednosti		Mjerene vrijednosti	Estimirane vrijednosti		Pogreške estimacije	
	Pozicija	Brzina		Pozicija	Brzina	Pozicija	Brzina
$t=kT$	$x_1$	$x_2$	$y(k)$	$\hat{x}_1(k)$	$\hat{x}_2(k)$	$P_{11}(k)$	$P_{22}(k)$
1	100.00	0.00		95.00	1.00	10.00	1.00
2	99.50	-1.00	100.00	99.63	0.38	0.92	0.92
3	98.00	-2.00	97.90	98.43	-1.16	0.67	0.58
4	95.50	-3.00	94.40	95.21	-2.91	0.66	0.30
5	92.0	-4.00	92.70	92.35	-3.70	0.61	0.15
6	87.50	-5.00	87.30	87.68	-4.84	0.55	0.08

# Kalmanov filter za estimaciju stanja

- Prikaz stvarnih, estimiranih i mjerenih vrijednosti dobivenih Kalmanovim filtrom





## Kalmanov filter za estimaciju stanja

- Obični Kalmanov filter, opisan u ovom potpoglavlju se može uspješno iskoristiti za estimaciju pozicije i orijentacije linearnih sistema.
- Budući da je model mobilnog robota nelinearan, to se za estimaciju njegove pozicije i orijentacije ne može koristiti obični Kalmanov filter.
- On se može koristiti kao linearizirana verzija ovih jednažbi sa istovremenim gubitkom optimalnosti.
- Za nelinearne sisteme se koristi **prošireni Kalmanov filter** (EKF), koji se u nastavku obrađuje.



## 9.5. Lokalizacija korištenjem EKF-a

- U praksi mnogi sistemi imaju nelinearna stanja ili nelinearne jednažbe mjerenja.
- Za estimaciju nelinearnih procesa ili nelinearnih povezanosti mjerenja koristi se *prošireni Kalmanov filter* (engl. Extended Kalman Filter).
- EKF predstavlja podoptimalno proširenje originalnog, običnog Kalmanovog filtra.



## Predikcija stanja i pogreške predikcije

- Nelinearni sistem u prostoru stanja može se opisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{w}(k)) \\ \mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k)) \end{aligned}$$

- gdje  $\mathbf{f}$  i  $\mathbf{h}$  predstavljaju nelinearne funkcije sistema i mjerenja.
- Estimirane vrijednosti vektora stanja  $\mathbf{x}(k+1)$  i vektora mjerenja  $\mathbf{z}(k+1)$  računaju se na temelju sljedećih izraza:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1 | k) &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k | k), \mathbf{u}(k), \mathbf{0}) \\ \hat{\mathbf{z}}(k+1) &= \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k+1 | k), \mathbf{0}) \end{aligned}$$



## Predikcija stanja i pogreške predikcije

- Kovarijantna matrica pridružena ovoj predikciji opisana je izrazom:

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{F}^T(k) + \mathbf{W}(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{W}^T(k)$$

gdje se matrice Jacobijana sistema ( $\mathbf{f}(\cdot)$ ) i Jacobijana mjernog šuma ( $\mathbf{w}(\cdot)$ ) računaju prema izrazima:

$$\mathbf{F}(k) = \nabla \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k|k))$$

$$\mathbf{W}(k) = \nabla \mathbf{w}(\hat{\mathbf{w}}(k|k))$$

## Jednadžbe mjerenja procesa



- U ovom dijelu se dobivaju stvarna mjerenja  $z(k+1)$  koja se uspoređuje sa predikcijom mjerenja  $\hat{z}(k+1)$ .
- Njihova razlika predstavlja rezidual mjerenja:

$$\mathbf{r}(k+1) = \mathbf{z}(k+1) - \hat{\mathbf{z}}(k+1)$$

- Kovarijanca reziduala (predikcije mjerenja)  $\mathbf{S}(k+1)$  se računa na sljedeći način:

$$\mathbf{S}(k+1) = \mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{V}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{V}^T(k)$$

- gdje matrica Jacobiana  $\mathbf{V}$  povezuje promjene u  $\mathbf{h}$  usljed promjene mjernog šuma  $\mathbf{v}$ .

## Jednadžbe mjerenja procesa

- Iz prethodnog izraza slijedi da je Kalmanovo pojačanje jednako:

$$\mathbf{K}_k(k+1) = \mathbf{P}(k+1 | k) \mathbf{H}^T(k+1) [\mathbf{H}(k+1) \mathbf{P}(k+1 | k) \mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{V}(k) \mathbf{R}(k) \mathbf{V}^T(k)]^{-1}$$

gdje  $\mathbf{H}(k+1)$  predstavlja Jacobijan od  $\mathbf{h}$  dobiven linearizacijom oko estimiranog vektora stanja ( $\hat{\mathbf{x}}(k+1 | k)$ ):

$$\mathbf{H}(k+1) = \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}(k+1 | k))$$



# Jednadžbe mjerenja procesa

## Osvježavanje estimacije mjerenja

- U zadnjem koraku estimacijskog algoritma koristi se rezidual mjerenja  $r(k+1)$  za korekciju predikcije stanja  $\hat{x}(k+1|k)$  i nakon toga računanje osvježene (nove) estimacije stanja  $\hat{x}(k+1|k+1)$ .
- Da bi se to obavilo prvo se računa Kalmanovo pojačanje:

$$\mathbf{K}_k(k+1) = \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1)\mathbf{S}^{-1}(k+1)$$

- te se nakon toga osvježava predikcija stanja:

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + \mathbf{K}_k(k+1)r(k+1)$$



# Jednadžbe mjerenja procesa

## Osvježavanje estimacije mjerenja

- Na kraju se računa kovarijanca povezana sa prethodnim izrazom:

$$\mathbf{P}(k+1 | k+1) = \mathbf{P}(k+1 | k) - \mathbf{K}_k(k+1)\mathbf{S}(k+1)\mathbf{K}_k^T(k+1)$$

odnosno:

$$\mathbf{P}(k+1 | k+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k(k+1)\mathbf{H}^T(k+1)]\mathbf{P}(k+1 | k)$$

- Na sljedećoj slici je dan dijagramski prikaz proširenog Kalmanovog filtra.



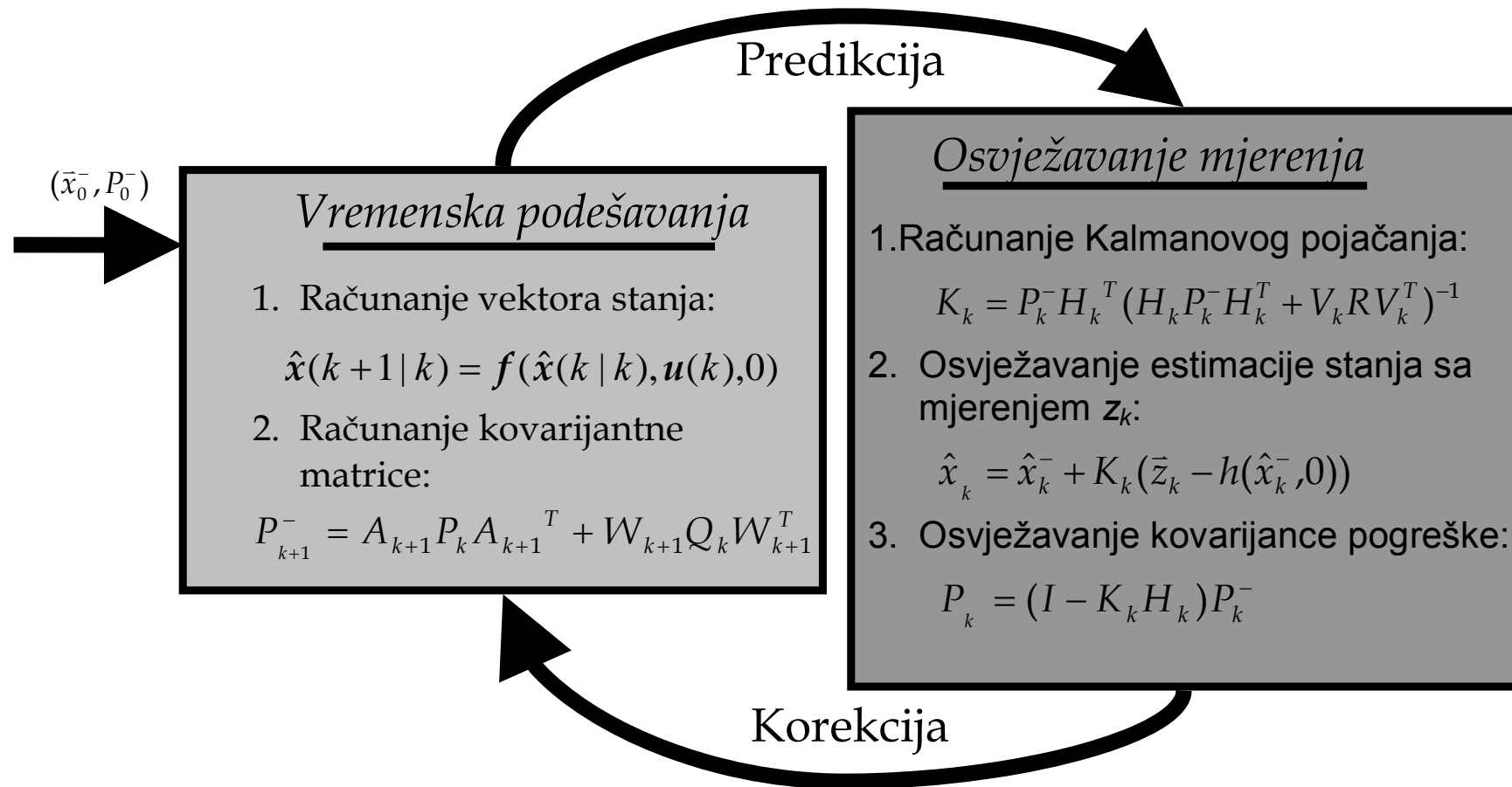


# Jednadžbe mjerenja procesa

## Dijagramski prikaz rada EKF-a



73/87



## Primjer korištenja EKF-a

- Razmatra se mobilni robot sa diferencijalnim pogonom.
- Vektor stanja je definiran pozicijom i orijentacijom mobilnog robota  $\mathbf{x}=[x \ y \ \theta]^T$ .
- **Zadatak se sastoji u estimiranju pozicije i orijentacije mobilnog robota na temelju odometrijskog mjerenja (enkodera na kotačima).**
- Pretpostavlja se da odometrija osigurava dobivanje linijske brzina  $v$  i ugaone brzine  $\omega$ , pri čemu su obje zahvaćene Gausovim šumom.



## Primjer korištenja EKF-a

- Kinematika mobilnog robota s diferencijalnim pogonom opisana je jednažbama:

$$v_t(k) = \frac{v_L(k) + v_R(k)}{2} = \frac{\omega_L(k)r + \omega_R(k)r}{2}$$

$$\omega(k) = \frac{v_R(k) - v_L(k)}{d} = \frac{\omega_R(k)r - \omega_L(k)r}{d}$$

$$\Delta\theta(k) = \omega(k)T$$

$$D(k) = v_t(k)T$$

$$\theta(k+1) = \theta(k) + \Delta\theta(k)$$

$$x(k+1) = x(k) + D(k) \cos \theta(k+1)$$

$$y(k+1) = x(k) + D(k) \sin \theta(k+1)$$

## Primjer korištenja EKF-a

- Oznake na slici:
  - $v_t(k)$  linijska brzina mobilnog robota (centra osovine),
  - $v_R(k)$  i  $v_L(k)$  linijske brzine desnog i lijevog kotača,
  - $\omega(k)$  ugaona brzina mobilnog robota,  $\omega_R(k)$  i  $\omega_L(k)$  ugaone brzine desnog i lijevog kotača,
  - $D(k)$  pređeni put između koraka  $k$  i  $k+1$ ,  $d$  duljina osovine kotača (udaljenost između kotača),  $r$  polumjer kotača.
  - $x(k)$  i  $y(k)$  horizontalna i vertikalna koordinata centra osovine mobilnog robota,  $\theta(k)$  ugao pod kojim se robot kreće,  $\Delta\theta(k)$  ugao rotacije između koraka  $k$  i  $k+1$ ,  $T$  period uzorkovanja.



## Primjer korištenja EKF-a

- U vektorskom zapisu prethodne jednadžbe poprimaju oblik:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= f(x(k), u(k), w(k)) \\ z(k+1) &= h(x(k), v(k))\end{aligned}$$

- Za estimaciju  $x$  i  $z$  u trenutku  $k+1$  koriste se jednadžbe EKF-a:

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1|k) &= f(\hat{x}(k|k), u(k), \mathbf{0}) \\ \hat{z}(k+1) &= h(\hat{x}(k+1|k), \mathbf{0})\end{aligned}$$

- Kovarijantna matrica pridružena ovoj predikciji je:

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{F}^T(k) + \mathbf{W}(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{W}^T(k)$$



## Primjer korištenja EKF-a

Računanje matrice Jacobijana sistema  $F(\cdot)$  i Jacobijana mjernog šuma  $W(\cdot)$ :

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} v_R(k) \\ v_L(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) + D(k) \cdot \cos(\theta(k) + \Delta\theta(k)) \\ x(k) + D(k) \cdot \cos(\theta(k) + \Delta\theta(k)) \\ \theta(k) + \Delta\theta(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x(k)} & \frac{\partial f_x}{\partial y(k)} & \frac{\partial f_x}{\partial \theta(k)} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x(k)} & \frac{\partial f_y}{\partial y(k)} & \frac{\partial f_y}{\partial \theta(k)} \\ \frac{\partial f_\theta}{\partial x(k)} & \frac{\partial f_\theta}{\partial y(k)} & \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -D(k) \sin(\theta(k) + \Delta\theta(k)) \\ 0 & 1 & D(k) \cos(\theta(k) + \Delta\theta(k)) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}(k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial v} & \frac{\partial f_x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial f_y}{\partial v} & \frac{\partial f_y}{\partial \omega} \\ \frac{\partial f_\theta}{\partial v} & \frac{\partial f_\theta}{\partial \omega} \\ \frac{\partial v}{\partial v} & \frac{\partial \omega}{\partial \omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D(k) \sin(\theta(k) + \Delta\theta(k)) & \cos(\theta(k) + \Delta\theta(k)) \\ D(k) \cos(\theta(k) + \Delta\theta(k)) & \sin(\theta(k) + \Delta\theta(k)) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Primjer korištenja EKF-a

- Pretpostavimo da su izvori šumova rotacijskog i linijskog kretanja neovisni i da je kovarijantna matrica  $Q$  oblika:

$$Q(k) = \begin{bmatrix} \Delta\theta^2(k)\sigma_{\Delta\theta}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_R^2 \end{bmatrix}$$

- Jednadžba mjerenja za jedan senzor glasi:

$$z(k) = \sqrt{(x(k) - x_p)^2 + (y(k) - y_p)^2} + v(k)$$

- Prethodni izraz računa udaljenost između estimirane pozicije  $(x_p, y_p)$  i stvarne pozicije  $(x(k), y(k))$  mobilnog robota sa dodanim Gausovim bijelim šumom  $v(k)$ .





## Primjer korištenja EKF-a

- Računanje matrica  $\mathbf{H}$  i  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x(k)} & \frac{\partial h}{\partial y(k)} & \frac{\partial h}{\partial \theta(k)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(\hat{x}(k) - x_p)^2 + (\hat{y}(k) - y_p)^2}} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) - x_p \\ \hat{y}(k) - y_p \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{V}(k) = \mathbf{I}$$

- Stvarna mjerenja  $\mathbf{z}(k+1)$  koja se upoređuju s predikcijom mjerenja  $\hat{\mathbf{z}}(k+1)$ . Njihova razlika predstavlja rezidual mjerenja:

$$\mathbf{r}(k+1) = \mathbf{z}(k+1) - \hat{\mathbf{z}}(k+1)$$

- Kovarijanca reziduala (predikcije mjerenja)  $\mathbf{S}(k+1)$  računa se na sljedeći način:

$$\mathbf{S}(k+1) = \mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{V}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{V}^T(k)$$



## Primjer korištenja EKF-a

- Kalmanovo pojačanje računa se kao:

$$\mathbf{K}_k(k+1) = \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1)[\mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{V}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{V}^T(k)]^{-1}$$

gdje  $\mathbf{H}(k+1)$  predstavlja Jacobijan od  $\mathbf{h}$  dobiven linearizacijom oko estimiranog vektora stanja  $(\hat{\mathbf{x}}(k+1|k))$ :

$$\mathbf{H}(k+1) = \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}(k+1|k))$$

- Na kraju se koristi se rezidual mjerenja  $\mathbf{r}(k+1)$  za korekciju predikcije stanja  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$  i nakon toga računanje osvježene (nove) estimacije stanja  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1)$ :

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{K}_k(k+1)\mathbf{r}(k+1)$$



## Primjer korištenja EKF-a

- Pri čemu se prvo računa Kalmanovo pojačanje:

$$\mathbf{K}_k(k+1) = \mathbf{P}(k+1 | k) \mathbf{H}^T(k+1) \mathbf{S}^{-1}(k+1)$$

a nakon toga osvježava kovarijanca stanja:

$$\mathbf{P}(k+1 | k+1) = \mathbf{P}(k+1 | k) - \mathbf{K}_k(k+1) \mathbf{S}(k+1) \mathbf{K}_k^T(k+1)$$

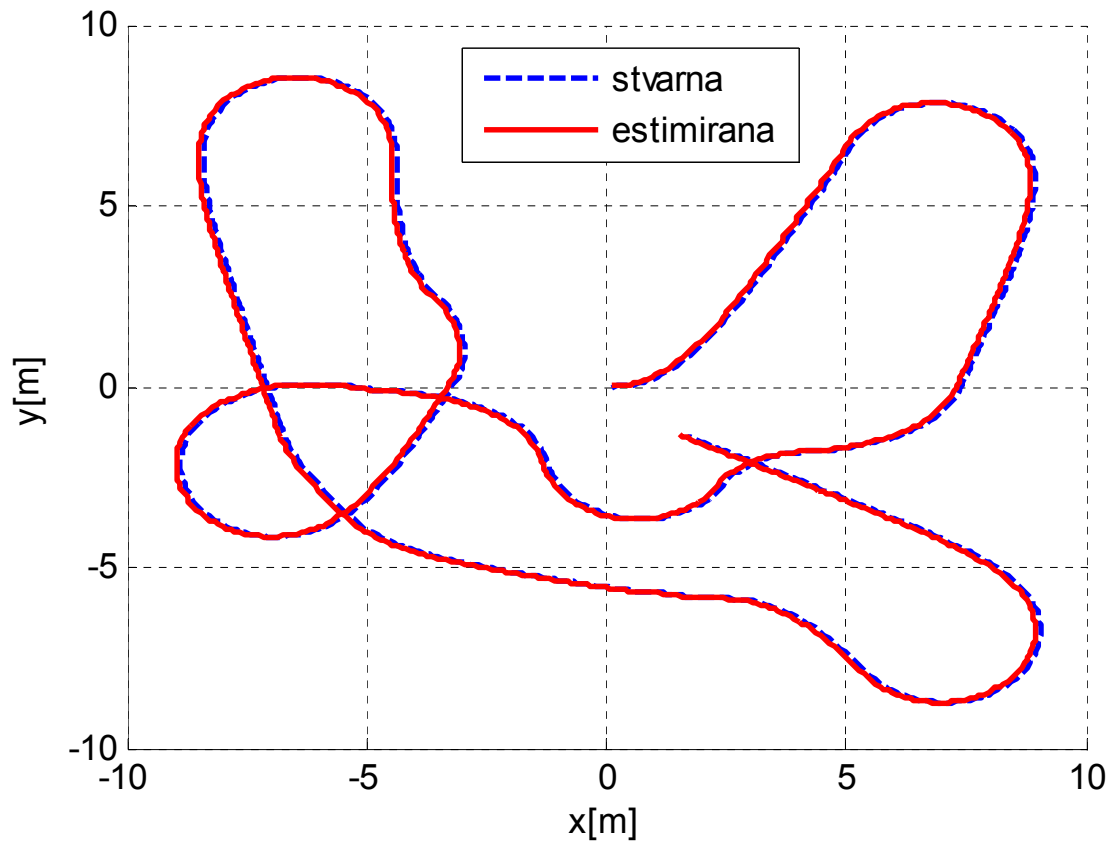
odnosno:

$$\mathbf{P}(k+1 | k+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k(k+1) \mathbf{H}^T(k+1)] \mathbf{P}(k+1 | k)$$



# Primjer korištenja EKF-a

- Mobilni robot započinje kretanje iz ishodišta koordinatnog sistema (0, 0).
- Na slici su prikazane stvarna i estimirana trajektorija mobilnog robota.



## Primjer korištenja EKF-a

- Za određivanje kvaliteta procesa estimacije prikladno je promatrati elipse pogrešaka i ukupnu neizvjesnost tokom kretanja mobilnog robota.
- Za računanje elipsi pogrešaka koristi se funkcija gustoće vjerojatnosti oblika:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\mathbf{P})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu_x)^T \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x} - \mu_x)}$$

- gdje je  $\mu_x$  srednja, odnosno očekivana vrijednost slučajne varijable  $x$ . U ovom slučaju  $1\sigma$  oblast definirana je tačkama  $x$  tako da je:

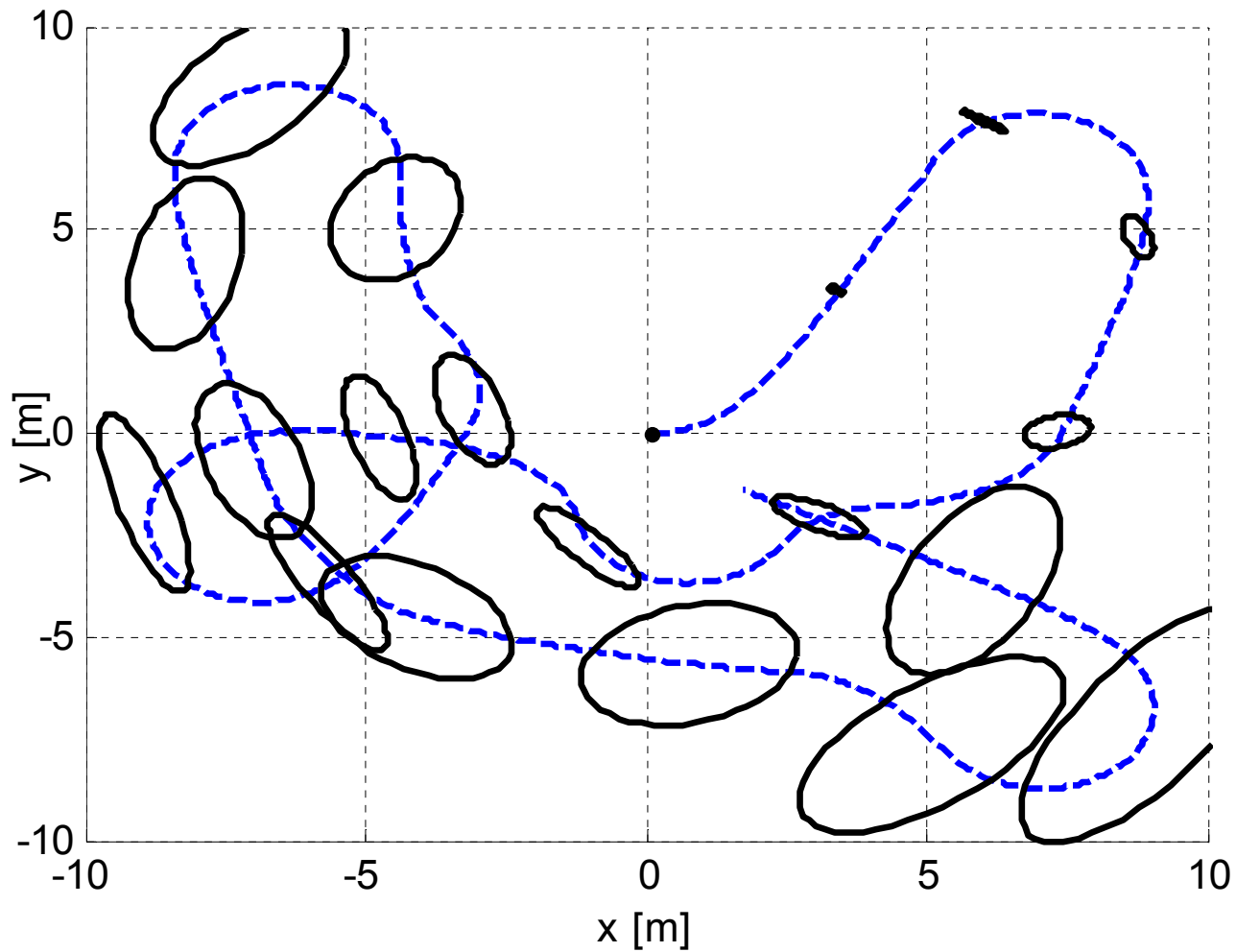
$$(\mathbf{x} - \mu_x)^T \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x} - \mu_x) = 1$$

## Primjer korištenja EKF-a

- Veoma je važno nacrtati elipse za prikaz neizvjesnosti položaja mobilnog robota.
- Elipse sa većom površinom imaju veću vršnu vrijednost funkcije gustoće vjerojatnosti i manju izvjesnost o poziciji, odnosno posjeduju manje znanje o poziciji.
- Kao mjera ukupne neizvjesnosti može se koristiti površina elipse  $\pi r_1 r_2$  gdje su  $r_i = \sqrt{\lambda_i}$ ,  $i = 1, 2$ , svojstvene vrijednosti kovarijantne matrice  $P$ . Budući da je slijedi da je područje elipse (skalarna neizvjesnost) proporcionalno sa  $\sqrt{\det(P)}$ .

# Primjer korištenja EKF-a

- Elipse pogrešaka u procesu estimacije



# Primjer korištenja EKF-a

- Ukupna neizvjesnost predstavlja monotonu rastuću funkciju ( $\sqrt{\det(P)}$ ).

