

- a) Prevođenje zadanog logičkog izraza u oblik izražen preko Shefferove funkcije operaciju po operaciju korištenjem relacija $X = X \uparrow X$, $XY = (X \uparrow Y) \uparrow (X \uparrow Y)$ i $X \vee Y = (X \uparrow X) \uparrow (Y \uparrow Y)$ nije nimalo mudra ideja, jer bi se time dobio nevjerovatno kompliciran izraz. Recimo, mogli bismo krenuti ovako:

$$\overline{AB} = (A \uparrow A)B = ((A \uparrow A) \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow A) \uparrow B)$$

$$A\overline{C} = A(C \uparrow C) = (A \uparrow (C \uparrow C)) \uparrow (A \uparrow (C \uparrow C))$$

$$\overline{BC} = (B \uparrow B)C = ((B \uparrow B) \uparrow C) \uparrow ((B \uparrow B) \uparrow C)$$

Zatim bismo imali

$$\begin{aligned} A\overline{C} \vee \overline{BC} &= \\ &= (((A \uparrow (C \uparrow C)) \uparrow (A \uparrow (C \uparrow C))) \uparrow ((A \uparrow (C \uparrow C)) \uparrow (A \uparrow (C \uparrow C)))) \uparrow \\ &\quad \uparrow (((B \uparrow B) \uparrow C) \uparrow ((B \uparrow B) \uparrow C)) \uparrow (((B \uparrow B) \uparrow C) \uparrow ((B \uparrow B) \uparrow C))) \end{aligned}$$

itd. Vidimo da smo već u ovom stadiju dobili neprihvatljivo kompliciran izraz, odakle vidimo da je bolje potražiti drugi put. Stoga ćemo izvršiti male transformacije u polaznom izrazu zasnovane na primjeni pravila dvojne negacije De Morganovih teorema, sa ciljem da se u izrazu pojave članovi koji se neposredno mogu uraditi preko Shefferove operacije:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \vee A\overline{C} \vee \overline{BC} &= \overline{AB} \vee \overline{A\overline{C}BC} = \overline{AB} \vee (A \uparrow \overline{C})(\overline{B} \uparrow C) = \overline{\overline{\overline{AB} \vee (A \uparrow \overline{C})(\overline{B} \uparrow C)}} = \\ &= \overline{\overline{AB} \vee (A \uparrow \overline{C})(\overline{B} \uparrow C)} = \overline{\overline{AB}} \uparrow (A \uparrow \overline{C})(\overline{B} \uparrow C) = (\overline{A} \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow \overline{C}) \uparrow (\overline{B} \uparrow C)) = \\ &= ((A \uparrow A) \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow (C \uparrow C)) \uparrow ((B \uparrow B) \uparrow C)) \end{aligned}$$

Razumije se da rješenje nije jedinstveno, tako da je ovo jedna od mogućih varijanti.

Razmotrimo šta se može dobiti polazeći od pojednostavljenog oblika funkcije. Za svodenje na Shefferovu operaciju, najpogodnije je krenuti od nekog oblika DNF. Probajmo stoga naći što je god moguće jednostavniju DNF zadane funkcije:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \vee A\overline{C} \vee \overline{BC} &= \overline{AB} \vee \overline{A\overline{C}BC} = \overline{AB} \vee (\overline{A} \vee C)(B \vee \overline{C}) = \overline{AB} \vee \overline{AB} \vee \overline{A} \overline{C} \vee BC = \\ &= \overline{AB} \vee \overline{A} \overline{C} \vee BC = \overline{AB}(C \vee \overline{C}) \vee \overline{A} \overline{C} \vee BC = \overline{ABC} \vee \overline{ABC} \vee \overline{A} \overline{C} \vee BC = \\ &= (\overline{ABC} \vee BC) \vee (\overline{ABC} \vee \overline{A} \overline{C}) = BC \vee \overline{A} \overline{C} \end{aligned}$$

Ovdje je iskorišten isti trik kao u Primjeru 6.8 u udžbeniku. Može se pokazati da je nađena DNF ujedno i najjednostavnija moguća. Odavde je samo jedan korak do prikaza pomoću Shefferove operacije:

$$BC \vee \overline{A} \overline{C} = \overline{\overline{BC} \vee \overline{A} \overline{C}} = \overline{\overline{BC} \overline{A} \overline{C}} = (B \uparrow C) \uparrow ((A \uparrow A) \uparrow (C \uparrow C))$$

- b) Slično vrijedi za izražavanje preko Pierceove operacije. Prevođenje izraza operaciju po operaciju korištenjem relacija $X = X \downarrow X$, $XY = (X \downarrow X) \downarrow (Y \downarrow Y)$ i $X \vee Y = (X \downarrow Y) \downarrow (X \downarrow Y)$ ni ovdje ne vodi ničemu dobrom. Stoga ćemo se ponovo poslužiti pravilom dvojne negacije i De Morganovim teoremama:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \vee A\overline{C} \vee \overline{BC} &= \overline{AB} \vee \overline{A\overline{C}BC} = \overline{AB} \vee (\overline{A} \vee C)(B \vee \overline{C}) = \overline{\overline{\overline{AB} \vee (\overline{A} \vee C)(B \vee \overline{C})}} = \\ &= \overline{A \vee \overline{B} \vee \overline{A} \vee C \vee B \vee \overline{C}} = (A \downarrow \overline{B}) \downarrow ((\overline{A} \downarrow C) \downarrow (B \downarrow \overline{C})) = (A \downarrow \overline{B}) \downarrow ((\overline{A} \downarrow C) \downarrow (B \downarrow \overline{C})) = \\ &= (A \downarrow \overline{B}) \downarrow ((\overline{A} \downarrow C) \downarrow (B \downarrow \overline{C})) = (A \downarrow (B \downarrow B)) \downarrow (((A \downarrow A) \downarrow C) \downarrow (B \downarrow (C \downarrow C))) = \\ &= ((A \downarrow (B \downarrow B)) \downarrow (((A \downarrow A) \downarrow C) \downarrow (B \downarrow (C \downarrow C)))) \downarrow (((A \downarrow (B \downarrow B)) \downarrow (((A \downarrow A) \downarrow C) \downarrow (B \downarrow (C \downarrow C)))) \end{aligned}$$

Naravno, i ovo je samo jedna od mogućih varijanti.

Želimo li prethodno pojednostaviti funkciju, za svodenje na Pierceovu operaciju najpogodnije je krenuti od nekog oblika KNF. Probajmo stoga naći što je god moguće jednostavniju KNF zadane funkcije:

$$\begin{aligned}\overline{AB} \vee \overline{AC} \vee \overline{BC} &= \overline{AB} \vee \overline{AC} \overline{BC} = \overline{AB} \vee (\overline{A} \vee C)(B \vee \overline{C}) = \\ &= (\overline{AB} \vee \overline{A} \vee C)(\overline{AB} \vee B \vee \overline{C}) = (\overline{A} \vee C)(B \vee \overline{C})\end{aligned}$$

Prilično je jasno da kraći oblik KNF za datu funkciju od ovog ne može postojati. Oavde je samo jedan korak do prikaza pomoću Pierceove operacije:

$$(\overline{A} \vee C)(B \vee \overline{C}) = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A} \vee C}}}} \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{B \vee \overline{C}}}}}} = \overline{\overline{\overline{\overline{A} \vee C} \vee \overline{B \vee \overline{C}}}} = ((A \downarrow A) \downarrow C) \downarrow (B \downarrow (C \downarrow C))$$

Vidi se da se dobija neuporedivo jednostavniji izraz nego ukoliko se prethodno ne izvrši pojednostavljivanje.